نام و نام خانوادگی :		گروه آموزشی : **ریاضی**
شماره دانشجویی :		تاریخ : **۱۴۰۳/۱۰/۲۳**
نام مدرس :	**دانشکده علوم ریاضی**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

امتحان پایان ترم درس **معادلات دیفرانسیل** (۱۱ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۴۰۴-۱۴۰۳**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید. به هیچ سوالی در جلسه امتحان پاسخ داده نمی‌شود. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

سوال ۱- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. **(۱۵ نمره)**

$$y''+۴y=\frac{۱}{\sin^{۲}x}$$

سوال ۲- دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید. **(۲۰ نمره)**

$$\begin{cases}(۲D-۱)x+(D+۱)y=۵e^{t}\\(D+۱)x+(D+۳)y=۱۶t\end{cases}$$

سوال ۳- معادله $x^{۲}y''-۵xy'+۱۰y=\frac{۱}{x^{۳}}$ را حل کنید. **(۲۰ نمره)**

سوال ۴- جواب عمومی معادله زیر را حول نقطه $x_{۰}=۰$ به دست آورید. **(۱۵ نمره)**

$$y''+(۲x+۱)y'+۴y=۰$$

(حداقل پنج جمله اول سری محاسبه شود.)

سوال ۵- مساله مقدار اولیه زیر را **با استفاده از تبدیل لاپلاس** حل کنید. **(۱۵ نمره)**

$$x''+۹x=۱۸e^{-۳t}\quad ;\quad x(۰)=۷\ ,\ x'(۰)=۳$$

سوال ۶- معادله انتگرالی $۳\sin ۲t=y+۹\int_{۰}^{t}(t-u)y(u)du$ را حل کنید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۷- تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید. **(۲۰ نمره)**

$$g(t)=\begin{cases}۲t-۱ & t<۳\\ e^{۳t} & ۳\le t\end{cases}\qquad\qquad f(t)=te^{-۲t}\cos ۳t$$

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : معادله همگن نظیر این معادله یعنی $y''+4y=0$ را حل می کنیم که یک معادله خطی با ضرایب ثابت است.
معادله مشخصه آن $m^2+4=0$ است که دو ریشه‌های مختلط $m=\pm 2i$ دارد.
پس جواب معادله همگن برابر است با : $y_h = a\sin 2x + b\cos 2x$
جواب خصوصی معادله را به کمک روش تغییر پارامتر محاسبه می‌کنیم.

$$y_1=\sin 2x\ ,\ y_2=\cos 2x\ ,\ r(x)=\frac{1}{\sin^2 x}\ \to w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\sin 2x & 2\cos 2x\\ \cos 2x & -2\sin 2x\end{vmatrix}=-2$$

$$y_p=\sin 2x\int\frac{-\cos 2x}{-2}\times\frac{1}{\sin^2 x}dx+\cos 2x\int\frac{\sin 2x}{-2}\times\frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$=\sin 2x\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin^2 x}dx-\cos 2x\int\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x\int(\cot^2 x-1)\,dx-\cos 2x\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\frac{1}{2}\sin 2x(-2x-\cot x)-\cos 2x\ln\sin x$$

$$=-x\sin 2x-\cos^2 x-\cos 2x\ln\sin x$$

جواب عمومی معادله عبارت است از : $y_g = a\sin 2x + b\cos 2x-(x\sin 2x+\cos^2 x+\cos 2x\ln\sin x)$

پاسخ سوال۲ : داریم : ابتدا مجهول y را حذف می‌کنیم.

$$\begin{matrix}D+3\\-(D+1)\end{matrix}\begin{cases}(2D-1)x+(D+1)y=5e^t\\(D+1)x+(D+3)y=16t\end{cases}\to\begin{cases}(2D^2+5D-3)x+(D^2+4D+3)y=20e^t\\(-D^2-2D-1)x-(D^2+4D+3)y=-16(t+1)\end{cases}$$

$$\to\ (D^2+3D-4)x=20e^t-16(t+1)$$

اکنون به یک معادله یک مجهولی رسیده‌ایم و می‌توانیم جواب عمومی آن را پیدا کنیم. برای پیدا کردن جواب همگن قرار می‌دهیم
$D^2+3D-4=0$ که دو ریشه حقیقی ۱ و ۴− دارد و در نتیجه : $x_h=ae^t+be^{-4t}$
اکنون می‌دانیم که $y_h=ce^t+de^{-4t}$ و برای پیدا کردن روابط بین چهار پارامتر a,b,c,d این جوابها را در معادله دوم قرار می‌دهیم :

$$(D+1)(ae^t+be^{-4t})+(D+3)(ce^t+de^{-4t})=0\ \to\ 2ae^t-3be^{-4t}+4ce^t-de^{-4t}=0$$

$$\to\ (2a+4c)e^t-(3b+d)e^{-4t}=0\ \to\ 2a+4c=0\ ,\ 3b+d=0\ \to\ a=-2c\ ,\ d=-3b$$

بنابر این، جواب دستگاه همگن عبارت است از : $x_h=-2ce^t+be^{-4t}\ ,\ y_h=ce^t-3be^{-4t}$
جواب خصوصی معادله برابر است با

$$x_p=\frac{1}{D^2+3D-4}(20e^t-16(t+1))=\frac{20}{D^2+3D-4}(e^t)-\frac{16}{D^2+3D-4}(t+1)$$

$$=\frac{20}{(D-1)(D+4)}(e^t)+\frac{4}{(1-D)(1+\frac{D}{4})}(1+t)=\frac{20}{D-1}(\frac{e^t}{5})+4(1+D+\cdots)(1-\frac{D}{4}+\cdots)(1+t)$$

$$=4e^t\frac{1}{D}(1)+4(1+D+\cdots)(t+\frac{3}{4})=4e^t\times t+4(t+\frac{7}{4})\qquad\to\qquad x_p=4te^t+(4t+7)$$

اکنون داریم : $x_g=-2ce^t-3de^{-4t}+4te^t+(4t+7)$

برای پیدا کردن y_p معادله اول دستگاه را از معادله دوم کم می‌کنیم. داریم : $(2-D)x+2y=2t-3e^t$

و در نتیجه داریم : $y_p=\frac{1}{2}(D-2)x_p-\frac{5}{2}e^t+8t$

$$\rightarrow\ y_p=\frac{1}{2}(D-2)(4te^t+(4t+7))-\frac{5}{2}e^t+8t=(-2t+2)e^t+(-4t-5)-\frac{5}{2}e^t+8t$$

$$\rightarrow\ y_p=-(2t+\frac{1}{2})e^t+(4t-5)$$

جواب نهایی دستگاه معادله برابر است با :

$$\begin{cases} x_g=-2ce^t+be^{-4t}+4te^t+(4t+7) \\ y_g=ce^t-3be^{-4t}-(2t+\frac{1}{2})e^t+(4t-5) \end{cases}$$

پاسخ سوال ۳ : معادله دیفرانسیل غیر همگن $x^2y''-5xy'+10y=\frac{1}{x^3}$ یک معادله اویلر است. با فرض $x>0$ و با استفاده از تغییر متغیر $x=e^t$ خواهیم داشت.

$$y''-6y'+10y=e^{-3t}$$

معادله مشخصه معادله دیفرانسیل همگن نظیر این معادله (که یک معادله خطی همگن است) عبارت است از $m^2-6m+10=0$ که دو ریشه مختلط $m=3\pm i$ دارد. بنابر این جواب معادله همگن برابر است با : $y_h=e^{3t}(A\sin t+B\cos t)$

برای پیدا کردن جواب خصوصی با استفاده از روش ضرایب نامعین، حدس می زنیم $y_p=ae^{-3t}$ و در معادله غیرهمگن قرار می‌دهیم. خواهیم داشت :

$$9ae^{-3t}+18ae^{-3t}+10ae^{-3t}=e^{-3t}\ \rightarrow\ 37ae^{-3t}=e^{-3t}\ \rightarrow\ a=\frac{1}{37}\ \rightarrow\ y_p=\frac{1}{37}e^{-3t}$$

اکنون جواب عمومی معادله با ضرایب ثابت به صورت $y_g=e^{3t}(A\sin t+B\cos t)+\frac{1}{37}e^{-3t}$ بدست آمده است

پس جواب معادله اویلر داده شده برابر است با : $y_g=x^3(A\sin\ln x+B\cos\ln x)+\frac{1}{37x^3}$

پاسخ سوال ۴ : نقطه $x_0=0$ یک نقطه عادی معادله است بنابر این ، معادله دارای یک جواب به صورت سری توانی $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ است و داریم :

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

این جواب را در معادله قرار می دهیم :

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+(2x+1)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

ضرایب پشت زیگماها را به داخل زیگما منتقل می‌کنیم .

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0$$

توان‌های x در تمام زیگماها را به توان n تبدیل می‌کنیم :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0$$

اکنون داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+2(n+2)a_n]x^n=0$$

که نتیجه می‌دهد

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+2(n+2)a_n=0\quad,\quad n=0,1,2,\cdots$$

و یا

$$a_{n+2}=\frac{-(n+1)a_{n+1}-2(n+2)a_n}{(n+2)(n+1)}=\frac{-1}{n+2}a_{n+1}-\frac{2}{n+1}a_n\quad,\quad n=0,1,2,\cdots$$

با قرار دادن مقادیر مختلف n تعدادی از ضرایب را محاسبه می‌کنیم.

$$a_2=\frac{-1}{2}a_1-2a_0\ ,\quad a_3=\frac{-1}{3}a_2-a_1=\frac{-5}{6}a_1+\frac{2}{3}a_0,\quad a_4=\frac{-1}{4}a_3-\frac{2}{3}a_2=\frac{13}{24}a_1+\frac{7}{6}a_0$$

با جایگذاری ضرایب بدست آمده در سری جواب داریم :

$$y=a_0(1-2x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{6}x^4+\cdots)+a_1(x-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x^3+\frac{13}{24}x^4+\cdots)$$

پاسخ سوال۵ : تبدیل لاپلاس دو طرف معادله را محاسبه می‌کنیم.

$$L\{x''+9x\}=L\{18e^{-3t}\}\qquad\rightarrow\qquad s^2L\{x\}-7s-3+9L\{x\}=\frac{18}{s+3}$$

$$\rightarrow\ (s^2+9)L\{x\}=7s+3+\frac{18}{s+3}\ \rightarrow\ L\{x\}=\frac{7s}{s^2+9}+\frac{3}{s^2+9}+\frac{18}{(s+3)(s^2+9)}$$

باید کسر $\frac{2}{(s+3)(s^2+9)}$ را به کسرهای ساده‌تر تجزیه کنیم. داریم :

$$\frac{18}{(s+3)(s^2+9)}=\frac{1}{s+3}+\frac{3-s}{s^2+9}$$

اکنون داریم :

$$L\{x\}=\frac{6s}{s^2+9}+\frac{6}{s^2+9}+\frac{1}{s+3}\qquad\rightarrow\qquad x=6\cos 3t+2\sin 3t+e^{-3t}$$

پاسخ سوال۶ : ساده‌ترین روش برای حل این معادله، استفاده از تبدیل لاپلاس است.

$$L\{3\sin 2t\}=L\{y+9\int_0^t(t-u)y(u)du\}\qquad\rightarrow\qquad\frac{6}{s^2+4}=L\{y\}+9L\{t\}L\{y\}$$

$$\rightarrow\quad\frac{6}{s^2+4}=(1+\frac{9}{s^2})L\{y\}\ \rightarrow\ L\{y\}=\frac{6s^2}{(s^2+4)(s^2+9)}=\frac{6}{5}(\frac{9}{s^2+9}-\frac{4}{s^2+4})$$

$$\rightarrow\quad y=\frac{6}{5}(3\sin 3x-2\sin 2x)$$

پاسخ سوال۷ – از فرمول‌های تبدیل لاپلاس با ترتیب مناسب استفاده می‌کنیم :

$$L\{f\}=L\{te^{-2t}\cos 3t\}=L\{t\cos 3t\}_{s\to s+2}=-L'\{\cos 3t\}_{s\to s+2}=-(\frac{s}{s^2+9})'_{s\to s+2}$$

$$=-(\frac{-s^2+9}{(s^2+9)^2})_{s\to s+2}=\frac{(s+2)^2-9}{((s+2)^2+9)^2}$$

ابتدا تابع g را با استفاده از تابع پله‌ای واحد به یک ضابطه تبدیل می‌کنیم و سپس تبدیل لاپلاس آن را محاسبه می‌کنیم.
می‌توانیم بنویسیم :

$$g(t)=2t-1+u_3(t)[e^{3t}-2t+1]$$

$$L\{g\}=L\{2t-1+u_3(t)[e^{3t}-2t+1]\}=L\{2t-1\}+L\{u_3(t)[e^{3t}-2t+1]\}$$

$$=\frac{2-s}{s^2}+e^{-3s}L\{e^{3(t+3)}-2(t+3)+1]\}=\frac{2-s}{s^2}+e^{-3s}L\{e^9e^{3t}-2t-5]\}$$

$$=\frac{2-s}{s^2}+e^{-3s}(\frac{e^9}{s-3}-\frac{2}{s^2}-\frac{5}{s})=\frac{2-s}{s^2}+\frac{(e^9-5)s^2+13s+6}{s^2(s-3)}e^{-3s}$$