نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : ....

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۳/۹/۵**

وقت : **۹۰** دقیقه

امتحان میان ترم درس ریاضی ۲ - فنی (۹ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / دوم) سال تحصیلی ۱۴۰۴- ۱۴۰۳

توجه : از نوشتن با مداد خودداری نمائید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱ ـ معادله صفحه‌ای را بیابید که بر دو صفحه $2x+3y-z=7$ و $3x-3y-2z=5$ عمود باشد و از نقطه $(1,-2,2)$ عبور کند. ۱۵ نمره

سوال ۲ ـ معادله رویه زیر را در مختصات دکارتی نوشته و آن را رسم کنید. ۱۵ نمره

$$\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho\sin^2\varphi\sin^2\theta=4\sin\varphi\sin\theta$$

سوال ۳ ـ تابع بطور پیوسته مشتق‌پذیر $z=f(u,v)$ که در آن $u=\frac{y}{x}$ و $v=x^2-y$ را در نظر گرفته و مقدار z_{xx} را محاسبه کنید. ۱۵ نمره

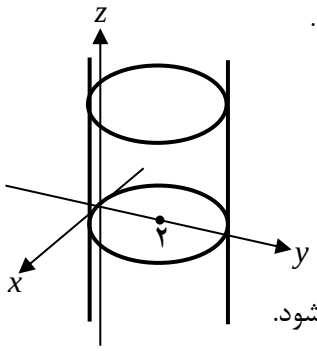
سوال ۴ ـ مقدار انحنای تابع برداری زیر را در لحظه $t=\frac{\pi}{2}$ بدست آورید. ۱۵ نمره

$$R(t)=\cos 2t\,\vec{i}+\sin 2t\,\vec{j}+t^2\vec{k}$$

سوال ۵ ـ یک نقطه بر رویه $z=x^2+y+2$ بیابید که کمترین فاصله را تا مبداء دستگاه مختصات داشته باشد. ۲۰ نمره

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : بردارهای قائم دو صفحه داده شده عبارتند از : $N_۱=(۲,۳,-۱)$, $N_۲=(۳,-۳,-۲)$
صفحه مورد نظر باید بر این دو صفحه عمود باشد پس بردار قائم آن باید بر هر دو بردار $N_۱$ و $N_۲$ عمود باشد. بنابر این، باید با $N_۱\times N_۲$ موازی باشد. پس $N=(۲,۳,-۱)\times(۳,-۳,-۲)=(۹,-۱,۱۵)$
معادله صفحه خواسته شده برابر است با $۹(x-۱)-(y+۲)+۱۵(z-۲)=۰$ یا $۹x-y+۱۵z=۴۱$.



پاسخ سوال۲ : دو طرف معادله را در ρ ضرب می‌کنیم.

$$\rho^۲\sin^۲\varphi\cos^۲\theta+\rho^۲\sin^۲\varphi\sin^۲\theta=۴\rho\sin\varphi\sin\theta$$

اکنون داریم :
$$(\rho\sin\varphi\cos\theta)^۲+(\rho\sin\varphi\sin\theta)^۲=۴\rho\sin\varphi\sin\theta$$
$$\rightarrow\ x^۲+y^۲=۴y \qquad \rightarrow \qquad x^۲+(y-۲)^۲=۴$$

معادله این رویه در دستگاه دکارتی نشان دهنده یک استوانه است که به موازات محور zها رسم می شود.

پاسخ سوال۳ : داریم : $z_x=z_u u_x+z_v v_x \ \rightarrow\ z_{xx}=(z_{uu}u_x+z_{uv}v_x)u_x+z_u u_{xx}+(z_{vu}u_x+z_{vv}v_x)v_x+z_v v_{xx}$

از طرف دیگر داریم :
$$u_x=\frac{-y}{x^۲}\ ,\ u_{xx}=\frac{۲y}{x^۳}\ ,\ v_x=۲x\ ,\ v_{xx}=۲$$

بنابر این :
$$z_{xx}=(\frac{-y}{x^۲}z_{uu}+۲xz_{uv})(\frac{-y}{x^۲})+\frac{۲y}{x^۳}z_u+(\frac{-y}{x^۲}z_{vu}+۲xz_{vv})(۲x)+۲z_v$$
$$\rightarrow \qquad z_{xx}=\frac{y^۲}{x^۴}z_{uu}-\frac{۲y}{x}z_{uv}-\frac{۲y}{x}z_{vu}+۴x^۲z_{vv}+\frac{۲y}{x^۳}z_u+۲z_v$$

پاسخ سوال۴ : داریم : $R'(t)=(-۲\sin۲t,۲\cos۲t,۲t)$, $R''(t)=(-۴\cos۲t,-۴\sin۲t,۲)$

$$R'(\frac{\pi}{۲})=(۰,-۲,\pi)\ ,\ R''(\frac{\pi}{۲})=(۴,۰,۲)\ \rightarrow\ |R'(\frac{\pi}{۲})|=\sqrt{۴+\pi^۲}\ ,\ |R'(\frac{\pi}{۲})\times R''(\frac{\pi}{۲})|=|(-۴,۴\pi,۸)|=۴\sqrt{۵+\pi^۲}$$

مقدار انحنای تابع در لحظه $t=\frac{\pi}{۲}$ برابر است با :
$$\kappa(\frac{\pi}{۲})=\frac{۴\sqrt{۵+\pi^۲}}{(\sqrt{۴+\pi^۲})^۳}$$

پاسخ سوال۵ : فاصله نقطه دلخواه بر روی رویه داده شده تا مبدا مختصات برابر است : $d(x,y,z)=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$
پس باید کمترین مقدار تابع $f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲$ با شرط $z=x^۲+y+۲$ را بیابیم.
برای استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، تابع $g(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲+\lambda(x^۲+y+۲-z)$ را در نظر می گیریم.
برای پیدا کردن نقاط اکسترمم این تابع باید دستگاه معادله زیر را حل کنیم :
$$۲x+۲\lambda x=۰\ ,\ ۲y+\lambda=۰\ ,\ ۲z-\lambda=۰\ ,\ x^۲+y+۲-z=۰$$

در معادله اول اگر $x\neq۰$ آنگاه $\lambda=-۱$ و در معادلات دوم و سوم خواهیم داشت $z=\frac{-۱}{۲}$, $y=\frac{۱}{۲}$. اما در معادله چهارم به $x^۲+۳=۰$ می رسیم که جواب ندارد. پس $x=۰$. اکنون از معادلات دوم و سوم داریم $z=\frac{\lambda}{۲}$, $y=\frac{-\lambda}{۲}$.

با جایگذاری در معادله چهارم خواهیم داشت :
$$۰-\frac{\lambda}{۲}+۲-\frac{\lambda}{۲}=۰\ \rightarrow\lambda=۲$$

جواب سوال نقطه $(۰\ ,\ -۱\ ,\ ۱)$ خواهد بود.