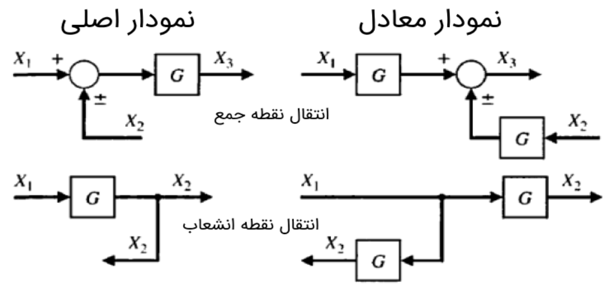
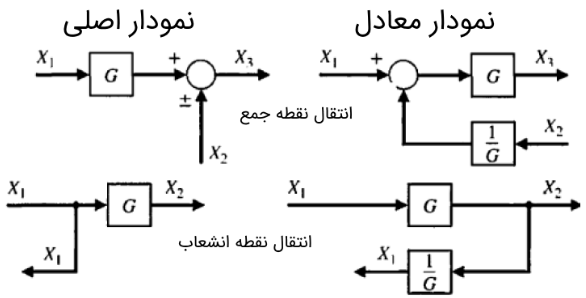
کنترل خطی

جبر نمودار بلوکی



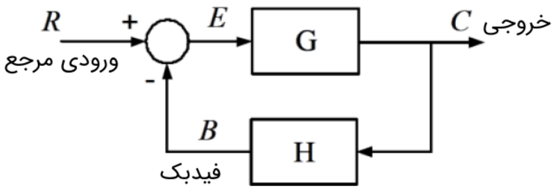


$\frac{C}{E}=G$ پیش‌خور

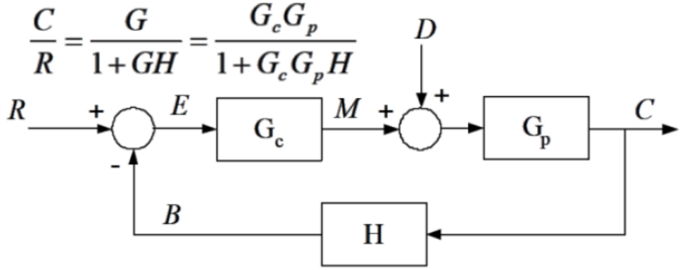
$\frac{B}{E}=GH$ حلقه‌باز

$\frac{C}{R}=\frac{G}{1+GH}$ حلقه‌بسته

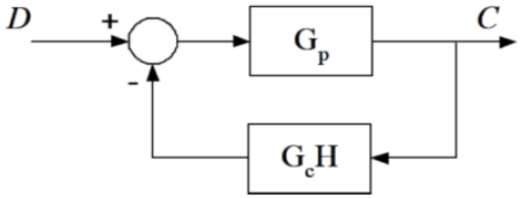
$\frac{E}{R}=\frac{1}{1+GH}$ خطا

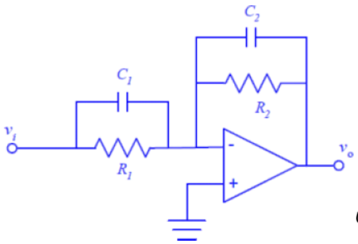


$$\frac{C}{R}=\frac{G}{1+GH}=\frac{G_cG_p}{1+G_cG_pH}$$



$$\frac{C}{D}=\frac{G}{1+GH}=\frac{G_p}{1+G_pG_cH}$$





$$z=\frac{1}{R}+\frac{1}{X}=\frac{R}{RCs+1}$$

$$\frac{V_O(s)}{V_i(s)}=-\frac{R_2(R_1C_1s+1)}{R_1(R_2C_2s+1)}$$

در حالت سری: $z=R+Cs=\frac{RCs+1}{Cs}$

فرمول بهره میسون (Mason's Gain Formula)

$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\sum_{i=1}^{N}P_i\Delta_i}{\Delta},\quad \Delta=1-\sum L_i+\sum L_iL_j-\sum L_iL_jL_k+\cdots+(-1)^m\sum\cdots+\cdots$$

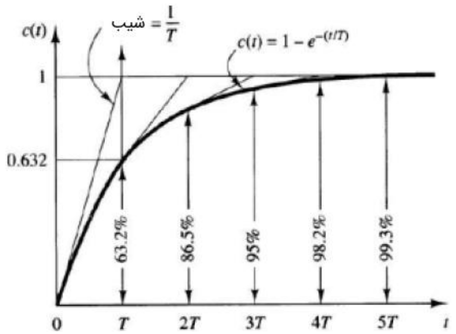
- $C(s)$: گره خروجی
- $R(s)$: گره ورودی
- $T(s)$: تابع تبدیل یا بهره بین $R(s)$ و $C(s)$
- P_i: بهره iاُمین مسیر پیش‌رو

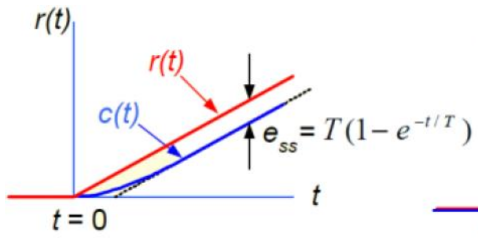
- L_i: بهره هر حلقه از سیستم
- L_iL_j: حاصل‌ضرب بهره‌های دو حلقه از سیستم که تماسی با هم ندارند.
- $L_iL_jL_k$: حاصل‌ضرب بهره‌های سه حلقه از سیستم که تماسی با هم ندارند.
- Δ_i: مقدار Δ برای مسیر پیش‌روی iاُم که با حلقه‌های درگیر با همان مسیر در تماس نیست.

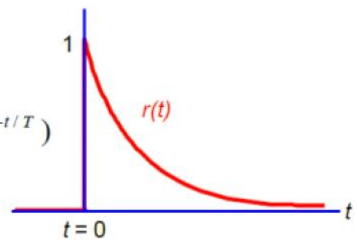
برای مشاهده دیگر «تقلب‌نامه‌های» مجله فرادرس، به این لینک مراجعه فرمایید.

پاسخ سیستم مرتبه‌اول

ضربه واحد	$c(t) = K/Te^{-t/T}$	$\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{K}{Ts+1}$
پله واحد	$c(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right)$	
شیب واحد	$c(t) = K\left(t - T - Te^{-t/T}\right)$	





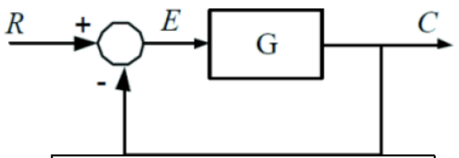


پارامترهای پاسخ گذرا

فرکانس طبیعی میرا	$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	**زمان پیک**	$t_r = \pi/\omega_d$
زمان صعود	$t_r = \dfrac{\pi - \beta}{\omega_d} = \dfrac{\tan^{-1}\left(\sqrt{1-\zeta^2}/-\zeta\right)}{\omega_d}$	**زمان نشست**	$t_s = 4T\ (2\%)$ $t_s = 4T\ (2\%)\ \ T = 1/\zeta\,\omega_n$
حداکثر فراجهش	$M_p = e^{-\left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi}$		$\int t\,e^{-st}\,dt = -\dfrac{e^{-st}(st+1)}{s^2}, \int (-t+2)e^{-st}\,dt = \dfrac{e^{-st}(-as+st+1)}{s^2}$

برای مشاهده دیگر «تقلب‌نامه‌های» مجله فرادرس، به این لینک مراجعه فرمایید.

خطای حالت ماندگار (Steady-State Error)



$$\boxed{e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}}$$

	ورودی پله $r = 1$	ورودی شیب $r = t$	ورودی سهمی $r = t^2/2$
سیستم نوع ۰	$1/(1+K)$	∞	∞
سیستم نوع ۱	0	$1/K$	∞
سیستم نوع ۲	0	0	$1/K$
e_{ss}	$\lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)}$	$\lim_{s\to 0} \frac{1}{sG(s)}$	$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2G(s)}$

معیار پایداری راث – هرویتز (Routh-Hurwitz Criterion)

$$a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0 \quad \leftarrow 1 + G(s)H(s) = 0$$

$$\begin{array}{llll}
s^4 & a_0 & a_2 & a_4 \\
s^3 & a_1 & a_3 & 0 \\
s^2 & (a_1a_2 - a_0a_3)/a_1 & a_4 & \\
s^1 & (b_1a_3 - a_1a_4)/b_1 & 0 & \\
s^0 & b_2 & &
\end{array}$$

$$\boxed{b_1 = (a_1a_2 - a_0a_3)/a_1}$$

$$\boxed{b_2 = (b_1a_3 - a_1a_4)/b_1}$$

- به ازای هر تغییر علامت در ستون اول، یک قطب سمت راست محور موهومی وجود دارد.
- اگر یکی از ضرایب یا همه آن‌ها در یکی از سطرهای محاسبه‌شده صفر باشد، بدین معنی است که ریشه‌هایی با اندازه برابر، به‌صورت متقارن نسبت به مبدأ قرار دارند. در این مورد، از چندجمله‌ای کمکی استفاده می‌کنیم که ضرایب آن از سطر قبلی به دست می‌آیند؛ بدین صورت که از معادله کمکی مشتق می‌گیریم و ضرایب مشتق را به جای ضرایب صفر قرار می‌دهیم.
- در حالت خاص صفر شدن درایه ستون اول یک سطر، متغیر کوچک اپسیلن (ϵ) را جایگزین صفر کرده و محاسبات را ادامه می‌دهیم. بعد از آنکه کل آرایه تشکیل شد، می‌توانیم مقدار ϵ را به صفر میل داده و مقدار حدی را محاسبه کنیم. در این صورت می‌توان راجع به تغییر علامت در ستون اول بحث کرد.

برای مشاهده دیگر «تقلب‌نامه‌های» مجله فرادرس، به این لینک مراجعه فرمایید.

مکان ریشه (Root Locus)

۱. محل صفرها و قطب‌ها را تعیین کنید. هر شاخه، از یک قطب شروع و به یک صفر ختم می‌شود. اگر صفر محدود وجود نداشته باشد، صفرها در بی‌نهایت قرار دارند.

۲. تعداد شاخه‌ها، برابر با تعداد قطب‌ها یا همان مرتبه معادله مشخصه است. مکان ریشه‌ها روی محور حقیقی، در جایی وجود دارد که تعداد فردی قطب و صفر در سمت راست آن وجود داشته باشد.

$$\text{زاویه مجانب‌ها} : \theta = \frac{n\,180^\circ}{\text{تعداد قطب‌ها} - \text{تعداد صفرها}} \quad , \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \cdots$$

$$\text{نقطه شروع مکان ریشه روی محور حقیقی} : \sigma_a = \frac{\text{مجموع جبری قطب‌ها} - \text{مجموع جبری صفرها}}{\text{تعداد قطب‌ها} - \text{تعداد صفرها}}$$

۳. در نقاط شکست، رابطه $N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0$ برقرار است. معادله مشخصه، به صورت $1 + KG(s)H(s) = 1 + K\frac{N(s)}{D(s)} = 0$ است.

۴. تقاطع با محور موهومی را به دو صورت می‌توان محاسبه کرد:

الف) از معیار راث برای تعیین مقدار k که به ازای آن، سیستم میرای بحرانی است.

ب) از آن‌جایی که ریشه‌ها روی محور موهومی قرار دارند، با قرار دادن $s = j\omega$ در معادله مشخصه، می‌توان آن را برای ω و K حل کرد.

۵. زاویه خروج از یک قطب مختلط p_j برابر است با: (مجموع زوایای بین p_j و قطب‌های دیگر) – (مجموع زوایای بین p_j و همه صفرها) + 180°

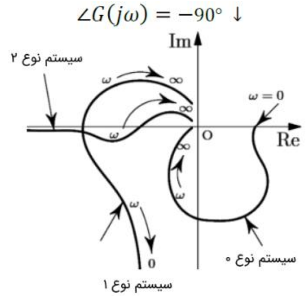
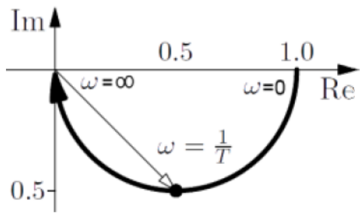
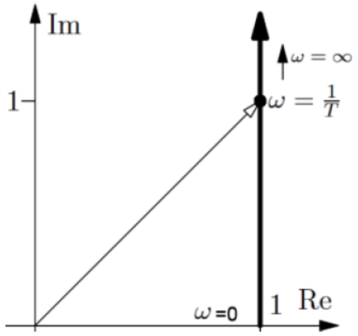
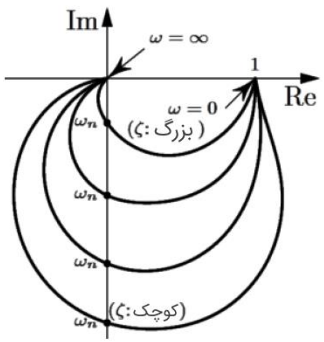
۶. زاویه رسیدن به یک صفر مختلط z_j برابر است با: (مجموع زوایای بین z_j و همه قطب‌ها) – (مجموع زوایای بین z_j و صفرهای دیگر) + 180°

نمودار بُد (Bode Plot)

خطا $= 20 \log_{10} \sqrt{2} = 3dB$

$$y(t) = A_0 |G(j\omega)| \sin\big(\omega t + \angle G(j\omega)\big), \quad |G(j\omega)| = \sqrt{Re\big(G(j\omega)\big)^2 + Im\big(G(j\omega)\big)^2}, \qquad \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{Im\big(G(j\omega)\big)}{Re\big(G(j\omega)\big)}\right]$$

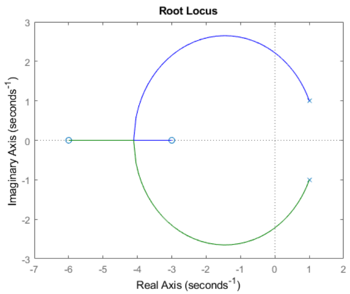
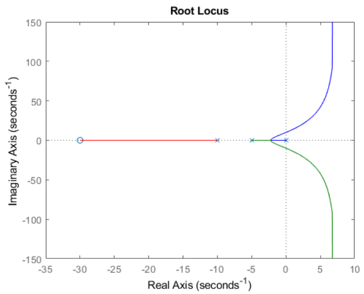
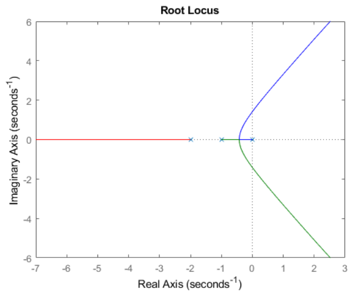
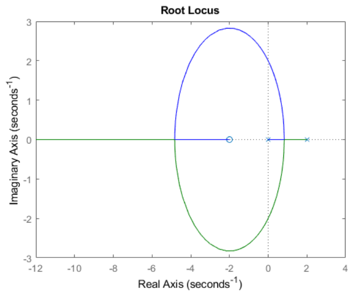
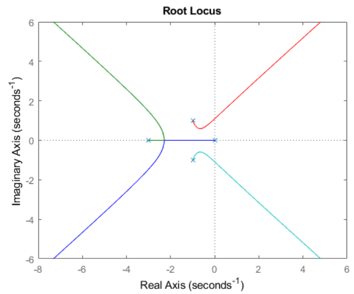
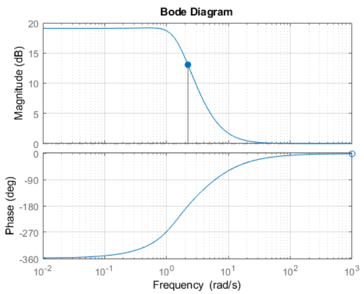
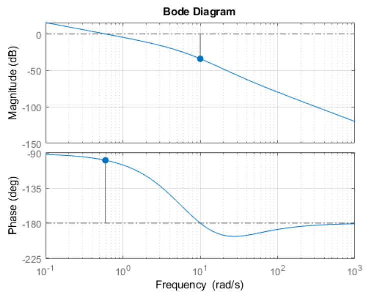
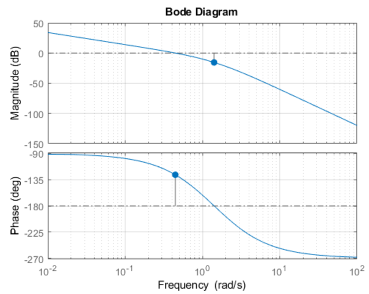
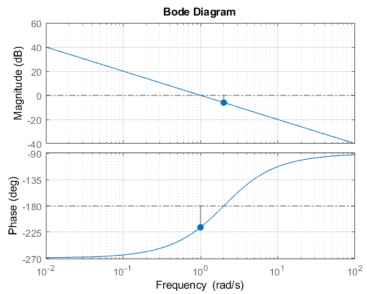
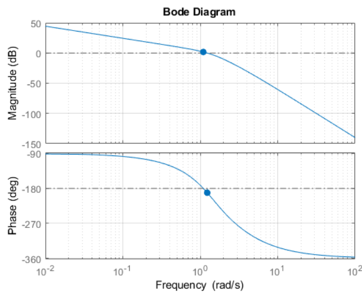
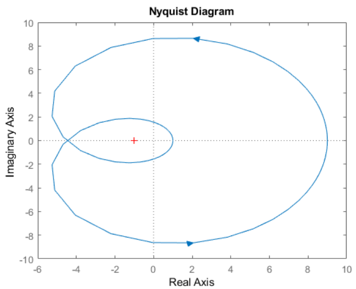
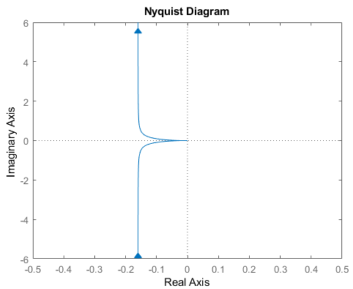
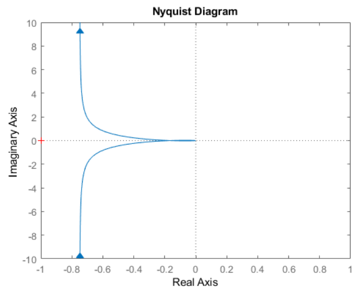
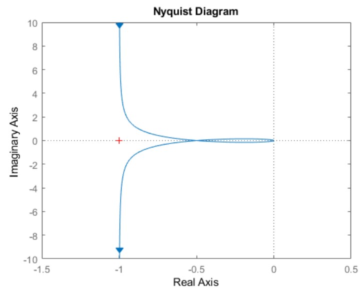
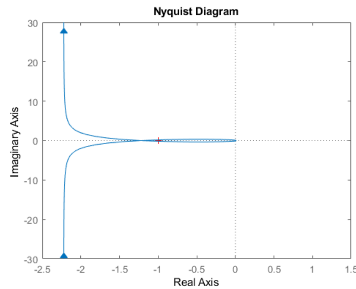
	بهره	صفر در مبدأ	قطب در مبدأ	صفر	قطب	قطب مختلط	زمان تأخیر
تابع	$G(s) = K$	$G(s) = s$	$G(s) = 1/s$	$G(s) = \frac{s}{\omega_c} + 1$	$G(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_c} + 1}$	$G(s) = \frac{1}{\frac{1}{{\omega_n}^2} s^2 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1}$	$G(s) e^{-sT_d}$
بهره	$20 \log K$ خط راست	$0dB$ در $\omega = 1$ شیب $= 20\ dB$ ↗	$0dB$ در $\omega = 1$ شیب $= -20\ dB$ ↘	$0dB$ در $\omega \le \omega_c$ شیب $= 20\ dB$ ↗	$0dB$ در $\omega \le \omega_c$ شیب $= -20\ dB$ ↘	$0dB$ در $\omega = 1$ شیب $= -40\ dB$ ↘↘	خط $0dB$
فاز	$0°$	90°	-90°	$\omega \le 0.1\omega_c, \angle G(j\omega) \to 0°$ $\omega = \omega_c, \angle G(j\omega) = 45°$ $\omega \ge 10\omega_c, \angle G(j\omega) \to 90°$	$\omega \le 0.1\omega_c, \angle G(j\omega) \to 0°$ $\omega = \omega_c, \angle G(j\omega) = -45°$ $\omega \ge 10\omega_c, \angle G(j\omega) \to -90°$	$\omega \le 0.1\omega_c, \angle G(j\omega) \to 0°$ $\omega = \omega_c, \angle G(j\omega) = -90°$ $\omega \ge 10\omega_c, \angle G(j\omega) \to -180°$	$\angle G(j\omega) = -\omega T_d$

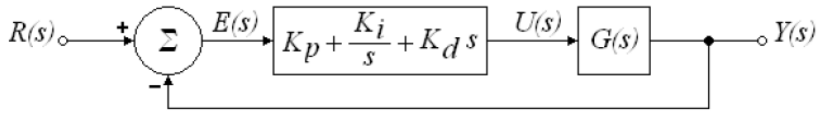
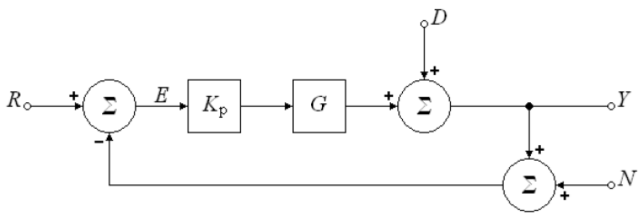
نمودار قطبی (Polar Plot)					
	مشتق‌گیر	انتگرال‌گیر	پس‌فاز مرتبه‌اول	پیش‌فاز مرتبه‌اول	پس‌فاز مرتبه‌دوم
تابع	$G(s) = s$	$G(s) = 1/s$	$G(s) = \dfrac{1}{sT+1}$	$G(s) = sT + 1$	$G(s) = \dfrac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + 1}$
نمودار	$\angle G(j\omega) = 90° \uparrow$				

معیار نایکوئیست (Nyquist Criterion)	
تعداد قطب‌های حلقه‌بسته در سمت راست محور موهومی، برابر با مجموع تعداد دوران‌های نمودار نایکوئیست حول نقطه -1 و تعداد قطب‌های حلقه‌باز در نیم‌صفحه سمت راست محور موهومی است.	
حاشیه بهره	$\dfrac{1}{\lvert G(j\omega)H(j\omega)\rvert}$
حاشیه فاز	فاز $G(j\omega)H(j\omega)$ در فرکانس عبور بهره $+\ 180°$
فرکانس عبور بهره، فرکانسی است که در آن، اندازه بهره برابر با 1 است. فرکانس عبور فاز، فرکانسی است که در آن، جابه‌جایی فاز $-180°$ است.	

برای مشاهده دیگر «تقلب‌نامه‌های» مجله فرادرس، به این لینک مراجعه فرمایید.

مثال

<table>
<tr>
<td>$G(s) = \dfrac{(s+3)(s+6)}{(s-i+j)(s-1-j)}$</td>
<td>$G(s) = \dfrac{s+30}{s(s+5)(s+10)}$</td>
<td>$G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$</td>
<td>$G(s) = \dfrac{s+2}{s(s-2)}$</td>
<td>$G(s) = \dfrac{10}{s^4+5s^3+8s^2+6s}$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">دو نمودار بلوکی متداول</th></tr>
<tr><th>نمایش کنترل‌کننده PID</th><th>نمایش نویز و اغتشاش در سیستم</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$$U(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s\right) E(s)$$ $$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)\,dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$</td><td>$$Y = \frac{K_p G}{1 + K_p G} R - \frac{K_p G}{1 + K_p G} N + \frac{1}{1 + K_p G} D$$ $$E = R - Y = \frac{1}{1 + K_p G} R + \frac{K_p G}{1 + K_p G} N - \frac{1}{1 + K_p G} D$$</td></tr>
</table>

مجموعه آموزش‌های مهندسی کنترل فرادرس (+کلیک کنید)

برای مشاهده دیگر «تقلب‌نامه‌های» مجله فرادرس، به این لینک مراجعه فرمایید.

جهت آگاهی از آخرین تقلب‌نامه‌های منتشر شده، در کانال تلگرام مجله فرادرس عضو شوید.

تهیه و تنظیم: مجله فرادرس

منبع

برای مشاهده دیگر «تقلب‌نامه‌های» مجله فرادرس، به این لینک مراجعه فرمایید.