تمرینات فصل اول - اعداد مختلط

ریاضی ۱ - فنی همانند

۱) اعداد مختلط زیر را ساده کنید و به شکل $x+iy$ بنویسید.

$A=(1-i)^4$ ، $B=\frac{3}{(i-1)(2+3i)(3-i)}$ و $C=\frac{1+2i}{3-4i}$

$D=\frac{5+4i}{3-i}$ ، $E=\frac{2i^{60}-i+2}{i^{39}+1}$ ، $F=(\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3})-i$

۲) اعداد مختلط زیر را به شکل قطبی $re^{i\theta}$ نمایش دهید.

$A=i^5+i-2$ ، $B=(1-i)^4$ ، $C=\frac{1+2i}{3-4i}$ و $D=(1-\sqrt{3}i)^{60}$

۳) اعداد مختلط زیر را به شکل $x+iy$ بنویسید.

$A=4e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $B=8e^{i\frac{5\pi}{3}}$ ، $C=-2ie^{i\frac{2\pi}{3}}$

۴) آرگومان و آرگومان اصلی اعداد مختلط زیر را بیابید.

$Z=(1-i)^3$ و $w=\frac{1+\sqrt{3}i}{(1+i)^2}$ و $P=\frac{i}{-2-2i}$

۵) معادلهٔ مختلط خط $ax+by+c=0$ را بیابید.

۶) معادلهٔ مختلط دایره‌ای به شعاع $R_0\in\mathbb{R}$ و مرکز $Z_0\in\mathbb{C}$ را بیابید.

۷) مجموعه نقاطی را در $\mathbb{C}$ بیابید که در رابطهٔ $|z+1-2i|=0$ صدق می‌کنند.

۸) مکان هندسی نقاطی را در $\mathbb{C}$ بیابید که در رابطهٔ $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|<2$ صدق می‌کنند.

۹) مکان هندسی نقاطی را در $\mathbb{C}$ بیابید که در رابطهٔ $z^2+\bar{z}^2=\frac{1}{2}$ صدق کنند.

Scanned by CamScanner

۱۰) حاصل $\frac{z i + \sqrt{1+z^2}}{z - i\sqrt{1+z^2}}$ را به ازای هر $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ بدست آورید.

---

۱۱) قسمت های حقیقی و موهومی عدد z را طوری بیابید که $\sum_{k=1}^{100} i^k = z$

---

۱۲) اعداد a و b را طوری بیابید که $z = 1 - i$ یک ریشه معادله زیر باشد:
$z^7 + az^5 + b = 0$

---

۱۳) فرض کنید a و b ریشه های معادله $z^2 - 2z + 4 = 0$ باشد. ثابت کنید که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:
$a^n + b^n = 2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

---

۱۴) معادلات زیر را در $\mathbb{C}$ حل کنید.

$z^2 + (2i - 4)z - i + 5 = 0$

$(1+z)^n = z^n$

$iz^3 + 8 = 0$

$(z+i)^4 + 1 = 0$

$z^4 - 1 = 0$

$(1+z)^2 - (i-z)^2 = 0$

$|z - 1 + i| = 0$

$z^4 + 2z^2 + 1 = 0$

---

۱۵) دستگاه دو معادله دو مجهول زیر را در $\mathbb{C}$ حل کنید.

$$\begin{cases} (1+i)z_1 - iz_2 = 2 + i \\ (2+i)z_1 + (2-i)z_2 = 2i \end{cases}$$

---

۱۶) ریشه های ششم عدد $w = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ را بیابید.

---

۱۷) نشان دهید که اگر $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ آنگاه $\bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}}, \frac{\bar{z}-z}{iz\bar{z}}\right)$.

---

۱۸) با توجه به فرمول دی موآور $\cos(3\theta)$ و $\cos(4\theta)$ را برحسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ بنویسید.

---

۱۹) نشان دهید که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $\theta \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ همواره داریم:
$\left(\frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}\right)^n = \frac{1 + i\tan(n\theta)}{1 - i\tan(n\theta)}$

Scanned by CamScanner

۲۰) نشان دهید که اگر z ریشه یک معادله چندجمله‌ای درجه $n \geq 2$ با ضرایب حقیقی باشد آنگاه $\bar{z}$ نیز ریشه آن معادله است.

---

۲۱) فرض کنید $z_1 = re^{i\theta_1}$ و $z_2 = re^{i\theta_2}$. نشان دهید که

$$Re(z_1 \bar{z}_2) = |z_1||z_2| \iff \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

---

۲۲) فرض کنید $z \in \mathbb{C}$ طوری باشد که $|z| = 1$. نشان دهید که برای هر $a, b \in \mathbb{C} - \{0\}$ داریم:

$$\left| \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \right| = 1$$

---

۲۳) نشان دهید که $|1 - \bar{z}_1 z_2| = |z_1 - z_2|$ اگر و فقط اگر $|z_1| = 1$ یا $|z_2| = 1$.

---

۲۴) فرض کنید که $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} - \{0\}$ و بعلاوه $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ و $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.
نشان دهید که:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$$

---

۲۵) فرض کنید که $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. نشان دهید که $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$.

---

۲۶) نشان دهید که:

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = (z^n)^{-1} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \ , \ z \in \mathbb{C}$$

$$|Re(z)| + |Im(z)| \leq \sqrt{2}\,|z| \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2| \quad , \quad z_1 \in \mathbb{C} \ , \ z_2 \in \mathbb{C}$$

---

۲۷) نشان دهید که:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad , \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad , \quad \bar{\bar{z}} = z$$

---

۲۸) نشان دهید که اگر $z \neq 1$ ریشه n ام عدد یک باشد. آنگاه داریم:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0 \quad ,$$

$$nz^{n-1} + (n-1)z^{n-2} + \cdots + 2z + 1 = \frac{n}{z-1} \ .$$

Scanned by CamScanner