نام و نام‌خانوادگی : . . . .

شماره دانشجویی : . . . .

نام مدرس : . . . .

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۲/۱۰/۳۰**

مدت : **۱۳۵ دقیقه**

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس ریاضی ۲-فنی (۸ گروه هماهنگ)

نیمسال اول سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

توجه : از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

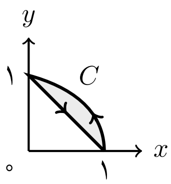
سوال ۱ ـ مطلوب است محاسبه مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=xsin(y+۲z)$ ۱۵ نمره
در نقطه $A=(۲,۱,\frac{-۱}{۲})$ و در امتداد بردار $u=i+j+k$.

سوال ۲ ـ با رسم ناحیه انتگرالگیری، انتگرال دوگانه $I=\int_{۰}^{۲}\int_{\frac{y}{۲}}^{۱} y\,e^{x^۳}dxdy$ ۱۵ نمره
را حل کنید.

سوال ۳ ـ حجم ناحیه محدود به نیمکره $z=\sqrt{۹-x^۲-y^۲}$ و مخروط ۱۵ نمره
$z^۲=x^۲+y^۲$ را بدست آورید.

سوال ۴ ـ مساحت قسمتی از نیمکره $z=\sqrt{۴-x^۲-y^۲}$ که درون استوانه ۲۰ نمره
$x^۲+y^۲=۲y$ قرار دارد را محاسبه کنید.

سوال ۵ ـ انتگرال منحنی‌الخط $\oint_C (۲y+e^{x^۲})dx+(x+\sin y)dy$ ۲۰ نمره



را با استفاده از قضیه گرین (یا بطور مستقیم) محاسبه کنید.
مسیر C مرز ناحیه محدود به منحنی $x=۱-y^۲$ و
$x+y=۱$ است که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

سوال ۶ ـ مقادیر a و b را چنان بیابید که میدان برداری ۱۵ نمره
$$F=(a\,x\sin y)i+(x^۲\cos y+۲b\,z^۲)j+(۲yz)k$$
پایستار باشد و سپس کار انجام شده توسط F روی یک مسیر C از نقطه
$(۰,۰,۰)$ تا نقطه $(۱,\frac{\pi}{۲},۱)$ را محاسبه کنید.

سوال ۷ ـ با استفاده از قضیه واگرایی (دیورژانس)، انتگرال دوگانه $\iint_S F\cdot n\,dS$ ۲۰ نمره
را محاسبه کنید که در آن $F=(x+y)i+(y+z)j+(z+x)k$
n بردار یکانی قائم خارجی بر S و S سطح ناحیه محدود به دو سهمیگون
$z=۱۵x^۲+۳y^۲$ و $z=۱۶-x^۲-y^۲$ است. $(d\sigma=dS)$

موفق باشید

پاسخنامه امتحان پایان ترم درس ریاضی ۲-فنی

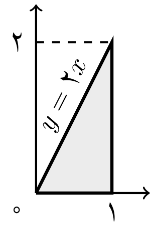
نیمسال اول سال تحصیلی ۰۳-۱۴۰۲ (۸ گروه هماهنگ)

پاسخ سوال ۱ ـ بردار یکه موازی با u برابر است با $v=\frac{u}{|u|}=(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}})$ و گرادیان تابع f عبارت است از :

$$\nabla f(x,y,z)=(\sin(y+۲z),x\cos(y+۲z),۲x\cos(y+۲z))$$

اکنون می‌توانیم مقدار مشتق سویی تابع f در تقطه A و در امتداد بردار یکه v را محاسبه کنیم :

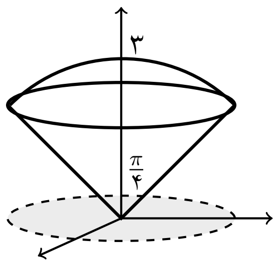
$$D_vf(A)=\nabla f(۲,۱,\frac{-۱}{۲})\cdot v=(۰,۲,۴)\cdot(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}})=۲\sqrt{۳}$$



پاسخ سوال ۲ ـ

$$I=\int_{y=۰}^{۲}\int_{x=\frac{y}{۲}}^{۱}y\,e^{x^۳}dxdy=\int_{x=۰}^{۱}\int_{y=۰}^{۲x}y\,e^{x^۳}dydx=\int_{x=۰}^{۱}\left[(\frac{y^۲}{۲})e^{x^۳}\right]_{۰}^{۲x}dx$$

$$I=\int_{x=۰}^{۱}۲x^۲e^{x^۳}dx=\left[\frac{۲}{۳}e^{x^۳}\right]_{۰}^{۱}=\frac{۲}{۳}(e-۱)$$



پاسخ سوال ۳ ـ با توجه به ناحیه مورد نظر، از مختصات کروی استفاده می‌کنیم :

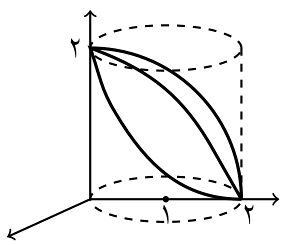
$$V=\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{\varphi=۰}^{\pi/۴}\int_{\rho=۰}^{۳}\rho^۲\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=(\int_{\theta=۰}^{۲\pi}d\theta)(\int_{\varphi=۰}^{\pi/۴}\sin\varphi d\varphi)(\int_{\rho=۰}^{۳}\rho^۲d\rho)$$

$$V=([\theta]_{۰}^{۲\pi})([-\cos\varphi]_{۰}^{\pi/۴})([\tfrac{۱}{۳}\rho^۳]_{۰}^{۳})=۲\pi\times(-\tfrac{\sqrt{۲}}{۲}+۱)\times ۹$$

$$V=۹(۲-\sqrt{۲})\pi$$

پاسخ سوال ۴ ـ تصویر سطح مورد نظر بر روی صفحه $z=۰$ ناحیه داخل دایره $x^۲=(y-۱)^۲=۱$ است که آن را D می‌نامیم. همچنین داریم $z_x=\frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}$, $z_y=\frac{-y}{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}$ و در نتیجه

$$\cos\gamma=\frac{۱}{\sqrt{z_x^۲+z_y^۲+۱}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴-x^۲-y^۲}$$



اکنون داریم $dS=\frac{۱}{\cos\gamma}dxdy=\frac{۲dxdy}{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}$ و مساحت سطح داده شده برابر است با :

$$A=\iint_S d\sigma=\iint_D\frac{۲dxdy}{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}$$

این انتگرال را به کمک مختصات قطبی حل می‌کنیم.

معادله دایره $x^۲+(y-۱)^۲=۱$ در مختصات قطبی به صورت $r=۲\sin\theta$ نوشته می‌شود.

$$A=\iint_D\frac{۲dxdy}{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}=\int_{\theta=۰}^{\pi}\int_{r=۰}^{۲\sin\theta}\frac{۲rdrd\theta}{\sqrt{۴-r^۲}}=\int_{\theta=۰}^{\pi}\left[-۲\sqrt{۴-r^۲}\right]_{r=۰}^{۲\sin\theta}d\theta$$

$$=۴\int_{\theta=۰}^{\pi}(۱-|\cos\theta|)d\theta=۸\int_{\theta=۰}^{\pi/۲}(۱-\cos\theta)d\theta=[\theta-\sin\theta]_{\theta=۰}^{\pi/۲}=۸(\frac{\pi}{۲}-۱)=۴(\pi-۲)$$

پاسخ سوال ۵ ـ ناحیه محدود به خط و سهمی داده شده را D می‌نامیم. به کمک قضیه گرین داریم :

$$I=\iint_D(\frac{\partial}{\partial x}(x+\sin y)-\frac{\partial}{\partial y}(۲y+e^{x^۲}))dxdy=-\iint_D dxdy$$

$$=-\int_{y=۰}^{۱}\int_{x=۱-y}^{۱-y^۲}dxdy=-\int_{y=۰}^{۱}(-y^۲+y)dy=-(\frac{-۱}{۳}+\frac{۱}{۲})=\frac{-۱}{۶}$$

پاسخ سوال ۶ -

برای اینکه نیروی F پایستار باشد باید داشته باشیم : $\mathrm{Curl}F = 0$

$$\mathrm{Curl}F = (2z - 4b\,z)i + (0 - 0)j + (2x\cos y - a\,x\cos y)k = 0$$

$$\rightarrow\ 2z - 4b\,z = 0\ ,\ 2x\cos y - a\,x\cos y\ \rightarrow\ b = \tfrac{1}{2}\ ,\ a = 2$$

اکنون داریم $F = (2x\sin y)i + (x^2\cos y + z^2)j + (2yz)k$ و با محاسبه سه انتگرال

$$\int(2x\sin y)dx\ ,\ \int(x^2\cos y + z^2)dy\ ,\ \int(2yz)dz$$

خواهیم دید که $F = \nabla(x^2\sin y + yz^2)$ اکنون می‌توانیم کار انجام شده توسط F روی مسیر C را محاسبه کنیم

$$W = \int_C F\cdot dr = [x^2\sin y + yz^2]_{(0,0,0)}^{(1,\frac{\pi}{2},1)} = 1 + \tfrac{\pi}{2}$$

پاسخ سوال ۷ - سطح S شامل دو قسمت است. سطح بالایی که متعلق به رویه $z = 16 - x^2 - y^2$ است را S_1 و سطح پایین را که متعلق به رویه $z = 15x^2 + 3y^2$ است را S_2 می‌نامیم. دو سطح S_1 و S_2 در یک منحنی بسته C مشترک هستند. ابتدا سعی می‌کنیم منحنی C را مشخص می‌کنیم. داریم :

$$15x^2 + 3y^2 = 16 - x^2 - y^2\ \rightarrow\ 16x^2 + 4y^2 = 16\ \rightarrow\ 4x^2 + y^2 = 4$$

پس هر نقطه (x،y،z) واقع بر منحنی C در شرط $4x^2 + y^2 = 4$ صدق می‌کند که نشان می‌دهد تصویر منحنی C بر روی صفحه xy بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ است و تصویر هر دو سطح S_1 و S_2 بر روی صفحه xy ناحیه درونی این بیضی است که آن را D می‌نامیم.

برای استفاده از قضیه واگرایی، ناحیه محدود به سطح S را V می‌نامیم و داریم :

$$\iint_S F\cdot n\,d\sigma = \iiint_V \mathrm{div}F\,dV \quad ، \quad \mathrm{div}F = \tfrac{\partial}{\partial x}(x+y) + \tfrac{\partial}{\partial y}(z+y) + \tfrac{\partial}{\partial z}(z+x) = 3$$

این انتگرال سه گانه در دستگاه مختصات دکارتی به صورت

$$J = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}}\int_{z=15x^2+3y^2}^{16-x^2-y^2} 3\,dz\,dy\,dx = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} 12(4 - 4x^2 - y^2)\,dy\,dx$$

در می‌آید. این انتگرال دوگانه، به همین صورت هم قابل حل است اما برای راحتی کار از تغییرمتغیر $x = r\cos\theta\ ,\ y = 2r\sin\theta$ استفاده می کنیم.

$$J = 48\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}(1 - r^2)r\,d\theta\,dr = 96\pi\int_{\theta=0}^{2\pi}(r - r^3)dr = 96\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 24\pi$$