کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : معادلات دیفرانسیل (**۹ گروه هماهنگ**)	نیمسال (**اول**/ ~~دوم~~) **۰۳-۱۴۰۲**	نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۴۰۲/۱۰/۲۴**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y''-4y'+4y=\dfrac{2e^{2x}}{x}$ $(x\geq 1)$ را بدست آورید. **۲۰ نمره**

سوال۲- معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $x^2y''-4xy'+4y=2\ln x$ $(x\geq 1)$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال۳- دستگاه معادلات زیر را با **روش عملگر** D حل کنید. **۲۰ نمره**

$$\begin{cases} x'=4x-5y+1 \\ y'=5x-4y+3e^{4t} \end{cases}$$

سوال۴- معادله انتگرالی زیر را **با استفاده از روش تبدیل لاپلاس** حل کنید. **۱۰ نمره**

$$x(t)=3t-2-\int_0^t e^{t-u}x(u)\,du$$

سوال۵- الف) تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(s)=\ln\dfrac{2s+1}{2s+3}$ را بیابید. **۱۰ نمره**

ب) تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\dfrac{\sin 4t}{t}$ را بدست آورید. **۱۰ نمره**

سوال۶- مساله مقدار اولیه زیر را **با استفاده از تبدیل لاپلاس** حل کنید. **۱۵ نمره**

$$x''(t)+4x(t)=\begin{cases} 0 & 0\leq t\leq 1 \\ 1 & 1\leq t \end{cases} \quad ; \quad x(0)=0,\ x'(0)=1$$

سوال۷- جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را با **روش سری‌های توانی** حول نقطه $x_0=0$ بیابید. **۲۰ نمره**

$$(1-x)y''-y=0$$

موفق باشید

جواب سوال ۱- ابتدا معادله همگن $y''-4y'+4y=0$ را حل می‌کنیم که یک معادله با ضرایب ثابت است و معادله مشخصه آن عبارت است از $m^2-4m+4=0$ که ریشه تکراری $m=2$ دارد. جواب همگن عبارت است از : $y_h=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$
برای پیدا کردن جواب خصوصی از روش‌های مختلفی می‌توان استفاده کرد.

روش اول (عملگر D) : داریم :
$$(D^2-4D+4)y=\frac{2e^{2x}}{x}\to y_p=\frac{1}{(D-2)^2}\left(\frac{2e^{2x}}{x}\right)=(2e^{2x})\frac{1}{D^2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

بنابر این :
$$y_p=(2e^{2x})\frac{1}{D}(\ln x)=(2e^{2x})x(\ln x-1)=2xe^{2x}(\ln x-1)$$

روش دوم (تغییر پارامتر) : قرار می‌دهیم $y_1=e^{2x}$, $y_2=xe^{2x}$ و خواهیم داشت $w(y_1,y_2)=e^{4x}$

اکنون داریم :
$$y_p=-e^{2x}\int\frac{xe^{2x}}{e^{4x}}\times\frac{2e^{2x}}{x}dx+xe^{2x}\int\frac{e^{2x}}{e^{4x}}\times\frac{2e^{2x}}{x}dx=-e^{2x}\int 2dx+xe^{2x}\int\frac{2}{x}dx$$
$$y_p=-2xe^{2x}+2xe^{2x}\ln x=2xe^{2x}(\ln x-1)$$

در حقیقت، جواب خصوصی عبارت است از $y_p=2xe^{2x}\ln x$ و جواب عمومی برابر است با $y_h=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+2xe^{2x}\ln x$ و یا :
$$y_g=(c_1+c_2x+2x\ln x)e^{2x}$$

جواب سوال ۲- این معادله را هم بدون تغییر متغیر و هم با تغییر متغیر $x=e^t$ می‌توان حل کرد.

روش اول (بدون تغییر متغیر) : ابتدا معادله همگن $x^2y''-4xy'+4y=0$ را حل می‌کنیم که یک معادله اویلر است و معادله مشخصه آن عبارت است از $r^2-5m+4=0$ که دو ریشه $r_1=1\,,\,r_2=4$ دارد. جواب همگن عبارت است از : $y_h=c_1x+c_2x^4$
برای پیدا کردن جواب خصوصی از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم.
قرار می‌دهیم $y_1=x,\ y_2=x^4$ و خواهیم داشت $w(y_1,y_2)=3x^4$

اکنون داریم :
$$y_p=-x\int\frac{x^4}{3x^4}\times\frac{2\ln x}{x^2}dx+x^4\int\frac{x}{3x^4}\times\frac{2\ln x}{x^2}dx=-\frac{2}{3}x\int\frac{\ln x}{x^2}dx+\frac{2}{3}x^4\int\frac{\ln x}{x^5}dx$$
$$y_p=-\frac{2}{3}x\left(-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{3}x^4\left(-\frac{\ln x}{4x^4}-\frac{1}{16x^4}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\ln x+\frac{15}{16}\right)=\frac{1}{8}(4\ln x+5)$$

جواب عمومی معادله برابر است با :
$$y_h=c_1x+c_2x^4+\frac{1}{8}(4\ln x+5)$$

روش اول (با تغییر متغیر $x=e^t$) : با استفاده از این تغییر متغیر به معادله دیفرانسیل $y''-5y'+4y=2t$ می‌رسیم.
معادله همگن آن یک معادله با ضرایب ثابت است که معادله مشخصه آن $m^2-5m+4=0$ است و دو ریشه $m_1=1\,,\,m_2=5$.
جواب همگن عبارت است از $y_h=c_1e^t+c_2e^{4t}$ و جواب خصوصی به کمک روش ضرایب نامعین یا عملگر D و حتی روش تغییر پارامتر به راحتی به دست می‌آید که برابر است با $y_p=\frac{1}{2}t+\frac{5}{8}$. پس جواب عمومی این معادله برابر است با $y_h=c_1e^t+c_2e^{4t}+\frac{1}{2}t+\frac{5}{8}$ یعنی جواب معادله دیفرانسیل اولیه برابر است با : $y_h=c_1x+c_2x^4+\frac{1}{8}(4\ln x+5)$

جواب سوال ۳- برای حل دستگاه معادلات داده شده، کافی است که یکی از دو تابع x یا y را پیدا کنیم.
$$\begin{cases}Dx=4x-5y+1\\ Dy=5x-4y+3e^{4t}\end{cases}\to\begin{cases}(D-4)x+5y=1\\ -5x+(D+4)y=3e^{4t}\end{cases}\to\begin{matrix}5\\ (D-4)\end{matrix}\begin{cases}(D-4)x+5y=1\\ -5x+(D+4)y=3e^{4t}\end{cases}\to(D^2+9)y=5$$

این یک معادله مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت است و جواب عمومی آن عبارت است از $y_g=A\sin 3x+B\cos 3x+\frac{5}{9}$

اکنون با استفاده از معادله دوم دستگاه داده شده تابع x را پیدا می‌کنیم.
$$x=\frac{1}{5}(y'+4y-3e^{4x})=\frac{1}{5}\left(3A\cos 3x-3B\sin 3x+4\left(A\sin 3x+B\cos 3x+\frac{5}{9}\right)-3e^{4x}\right)$$

در نتیجه :
$$x_p=\frac{(4A-3B)}{5}\sin 3x+\frac{(3A+4B)}{5}\cos 3x-\frac{3}{5}e^{4x}+\frac{4}{9}$$

جواب سوال۴- تبدیل لاپلاس طرفین معادله محاسبه می کنیم. $L\{x(t)\}=L\{3t-2-\int_0^t e^{t-u}x(u)\,du\}$

$$\to L\{x\}=L\{3t\}-L\{2\}-L\{e^t\}L\{x\} \to L\{x\}=\frac{3}{s^2}-\frac{2}{s}-\frac{1}{s-1}L\{x\}$$

$$\to \frac{s}{s-1}L\{x\}=\frac{3-2s}{s^2} \to L\{x\}=\frac{-2s^2+5s-3}{s^3}=-\frac{3}{s^3}+\frac{5}{s^2}-\frac{2}{s} \to x(t)=-\frac{3}{2}t^2+5t-2$$

جواب سوال۵- الف) قرار می‌دهیم $g(x)=L^{-1}\{F(s)\}$ و داریم : $L\{g(x)\}=F(s)=\ln\frac{2s+1}{2s+3}$

$$L'\{g(x)\}=\frac{2}{2s+1}-\frac{2}{2s+3} \to -L\{x\,g(x)\}=L\left\{e^{-\frac{x}{2}}-e^{-\frac{3x}{2}}\right\} \to -x\,g(x)=e^{-\frac{x}{2}}-e^{-\frac{3x}{2}}$$

جواب سوال عبارت است از : $g(x)=L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{x}(e^{-\frac{3x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})$

ب) $L\{f(t)\}=L\left\{\frac{\sin 4t}{t}\right\}=\int_s^\infty L\{\sin 4t\}\,ds=\int_s^\infty\frac{4}{s^2+16}\,ds=\left[\arctan\frac{s}{4}\right]_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s}{4}$

جواب سوال۶- داریم $x''(t)+4x(t)=u_1(t)$. تبدیل لاپلاس طرفین معادله را محاسبه می کنیم. $L\{x''(t)+4x(t)\}=L\{u_1(t)\}$

$$s^2L\{x\}-1+4L\{x\}=\frac{e^{-s}}{s} \to L\{x\}=\frac{1}{s^2+4}+\frac{e^{-s}}{s(s^2+4)}=\frac{1}{s^2+4}+\frac{1}{4}e^{-s}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$\to L\{x\}=L\{\tfrac{1}{2}\sin 2t\}+\frac{1}{4}e^{-s}L\{1-\cos 2t\}=L\{\tfrac{1}{2}\sin 2t\}+\frac{1}{4}L\{u_1(t)[1-\cos 2(t-1)]\}$$

$$\to x(t)=\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}u_1(t)[1-\cos 2(t-1)] \to x(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin 2t & 0\le t<1\\ \frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{4}\cos 2(t-1)+\frac{1}{4} & 1\le t\end{cases}$$

جواب سوال۷- این معادله جوابی به صورت سری توانی $y=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ دارد.

$$(1-x)y''-y=0 \to (1-x)\sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^\infty a_nx^n=0$$

$$\to \sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^\infty a_nx^n=0$$

$$\to \sum_{n=0}^\infty (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^\infty (n+1)na_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^\infty a_nx^n=0$$

$$\to \sum_{n=0}^\infty [(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)na_{n+1}-a_n]x^n=0$$

$$\to (n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)na_{n+1}-a_n=0\ ,\ \to a_{n+2}=\frac{n}{n+2}a_{n+1}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n\ ,\ n=0,1,2,\cdots$$

$$\to a_2=\frac{1}{2}a_0\ ,\ a_3=\frac{1}{6}a_1+\frac{1}{6}a_0\ ,\ a_4=\frac{1}{12}a_1+\frac{1}{8}a_0$$

$$y=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=a_0+a_1x+\frac{1}{2}a_0x^2+(\frac{1}{6}a_1+\frac{1}{6}a_0)x^3+(\frac{1}{12}a_1+\frac{1}{8}a_0)x^4+\cdots$$

$$y=a_0(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{8}x^4+\cdots)+a_1(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4+\cdots)$$