نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۲/۹/۶**

وقت : **۹۰** دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم درس **ریاضی ۲-فنی** (۸ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / دوم) سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

توجه : از نوشتن با مداد خودداری نمائید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱ـ فصل مشترک دو صفحه $x-۲y+۳z+۲=۰$ و $۲x+y-۴z-۱۶=۰$ را بدست آورید. سپس مقدار a را چنان بیابید که صفحه $ax+۲y-z=۵$ با فصل مشترک فوق موازی باشد. ۱۵ نمره

سوال ۲ـ رویه $\rho=۲\cos\varphi+۴\sin\varphi\cos\theta$ در مختصات کروی داده شده است. معادله رویه در دستگاه دکارتی را نوشته و شکل تقریبی آن را رسم کنید. ۱۵ نمره

سوال ۳ـ منحنی C توسط تابع برداری $r(t)=(t,t\sin t,t\cos t)$ داده شده است. انحنای منحنی را در نقطه $t=۰$ بدست آورید. ۱۵ نمره

سوال ۴ـ فرض کنید $w=f(x,y)$ و مشتقات جزئی مرتبه دوم f موجود و پیوسته باشند و $x=t^{۲},\ y=\ln t$.
مطلوب است محاسبه w_t و w_{tt} بر حسب مشتقات جزئی f. ۱۵ نمره

سوال ۵ـ اکسترمم‌های تابع $f(x,y,z)=xyz$ با شرط $xy+yz+zx=۱۲$ را بیابید. ۲۰ نمره

موفق باشید

پاسخ سوال ۱ ـ برای پیدا کردن فصل مشترک دو صفحه، یکی از متغیرها را، مثلا z، بر حسب دو متغیر دیگر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{matrix} ۲ \\ \end{matrix} \begin{cases} ۲x + y - ۴z - ۱۶ = ۰ \\ x - ۲y + ۳z + ۲ = ۰ \end{cases} \to ۵x - ۵z - ۳۰ = ۰ \to z = x - ۶$$

$$\begin{matrix} \\ -۲ \end{matrix} \begin{cases} ۲x + y - ۴z - ۱۶ = ۰ \\ x - ۲y + ۳z + ۲ = ۰ \end{cases} \to ۵y - ۱۰z - ۲۰ = ۰ \to z = \frac{y - ۴}{۲}$$

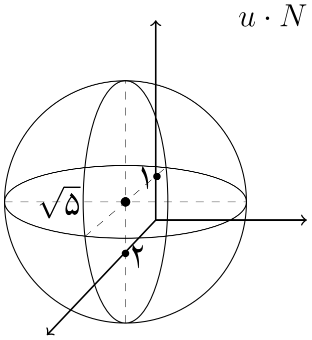
اکنون داریم $z = \frac{y-۴}{۲} = x - ۶$ که معادله فصل مشترک دو صفحه داده شده است.

بردار هادی این خط راست، بردار $u = (۱, ۲, ۱)$ و بردار قائم صفحه $ax + ۲y - z = ۵$ عبارت است از :

$$N = (a, ۲, -۱)$$

اگر این فصل مشترک با صفحه موازی باشد آنگاه باید بر بردار قائم صفحه عمود باشد. پس باید داشته باشیم :

$$u \cdot N = ۰ \to (۱, ۲, ۱) \cdot (a, ۲, -۱) = a + ۳ = ۰ \to a = -۳$$



پاسخ سوال ۲ ـ برای نوشتن معادله رویه در دستگاه دکارتی، دو طرف معادله را در ρ ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت :

$$\rho^۲ = ۲\rho\cos\varphi + ۴\rho\sin\varphi\cos\theta$$
$$\to x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲z + ۴x$$
$$\to (x-۲)^۲ + y^۲ + (z-۱)^۲ = ۵$$

این رویه، یک کره با شعاع $\sqrt{۵}$ و به مرکز نقطه (۱،۰،۲) است.

پاسخ سوال ۳ ـ داریم :

$$r'(t) = (\,۱\,,\,\sin t + t\cos t\,,\,\cos t - t\sin t\,) \to r'(۰) = (\,۱\,,\,۰\,,\,۱\,)$$

$$r''(t) = (\,۰\,,\,۲\cos t - t\sin t\,,\,-۲\sin t - t\cos t\,) \to r''(۰) = (\,۰\,,\,۲\,,\,۰\,)\,,\ |r'(۰)| = \sqrt{۲}$$

اکنون می‌توانیم انحنای منحنی را $t = ۰$ محاسبه کنیم :

$$\kappa(۰) = \frac{|r'(۰) \times r''(۰)|}{|r'(۰)|^۳} = \frac{|(\,۱\,,\,۰\,,\,۱\,) \times (\,۰\,,\,۲\,,\,۰\,)|}{\sqrt{۲}^۳} = \frac{|(\,-۲\,,\,۰\,,\,۲\,)|}{\sqrt{۸}} = \frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۸}} = ۱$$

پاسخ سوال ۴ ـ برای محاسبه مشتقات خواسته شده، باید از قاعده مشتق زنجیری استفاده کنیم.

داریم $\frac{dx}{dt} = ۲t\,,\ \frac{dy}{dt} = \frac{۱}{t}$ و در نتیجه : $w_t = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} = ۲tf_x + \frac{۱}{t}f_y$

$$\begin{aligned} w_{tt} = \frac{dw_t}{dt} &= ۲f_x + ۲t\frac{df_x}{dt} - \frac{۱}{t^۲}f_y + \frac{۱}{t}\frac{df_y}{dt} \\ &= ۲f_x + ۲t(۲tf_{xx} + \frac{۱}{t}f_{xy}) - \frac{۱}{t^۲}f_y + \frac{۱}{t}(۲tf_{yx} + \frac{۱}{t}f_{yy}) \\ &= ۴t^۲f_{xx} + \frac{۱}{t^۲}f_{yy} + ۲(f_{xy} + f_{yx}) + ۲f_x - \frac{۱}{t^۲}f_y \end{aligned}$$

پاسخ سوال ۵ ـ از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. برای این کار، تابع ۴ متغیره g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$g(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(xy + yz + zx - ۱۲)$$

اکنون باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g_z = 0 \\ g_\lambda = 0 \end{cases} \to \begin{cases} yz - \lambda(y+z) = 0 \\ xz - \lambda(x+z) = 0 \\ xy - \lambda(x+y) = 0 \\ xy + yz + zx = 12 \end{cases} \to \begin{cases} xyz - \lambda(xy+zx) = 0 \\ xyz - \lambda(xy+yz) = 0 \\ xyz - \lambda(zx+yz) = 0 \\ xy + yz + zx = 12 \end{cases} \to \begin{cases} \lambda xy = \lambda yz = \lambda zx \\ xy + yz + zx = 12 \end{cases}$$

اگر $\lambda = 0$ آنگاه حداقل دو متغیر از سه متغیر x و y و z باید برابر ۰ باشند و شرط $xy + yz + zx = 12$ نقض می‌شود.
پس داریم $xy = yz = zx$ و با توجه به شرط آخر خواهیم داشت $xy = yz = zx = 4$.
این تساوی‌ها نشان می دهد که $x = y = z = \pm 2$. و $f(2,2,2) = 8$ و $f(-2,-2,-2) = -8$.
همچنین، می‌توانستیم بنویسیم $(xyz)^2 = (xy)(yz)(zx) = 4^3 = 64$ و در نتیجه $xyz = 8$ یا $xyz = -8$.
می‌توان دید که با توجه به شرط داده شده داریم $\max f = 8$ و $\min f = -8$.