نام و نام خانوادگی : ....
شماره دانشجویی : ....
نام مدرس : ....

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**
تاریخ : **۱۴۰۲/۸/۲۹**
وقت : **۹۰** دقیقه

امتحان میان ترم درس **معادلات دیفرانسیل** (۹ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / دوم) سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

توجه : از نوشتن با مداد خودداری نمائید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱ ـ مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $x^{۲} - ۲cx + y^{۲} = ۰$ را بیابید. ۱۵ نمره

سوال ۲ـ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید : ۱۵ نمره

$$(۲x^{۲}y + ۲y + ۳)dx + (۲x^{۳} + ۲x)dy = ۰$$

سوال ۳ـ معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' + \frac{۲}{x}y = \frac{x\sqrt{y}}{x^{۲}+۴}$ را حل کنید. ۱۵ نمره

سوال ۴ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را بیابید : ۱۵ نمره

$$yy'' = y^{۲}y' + y'^{۲} \quad ; \quad y(۰) = ۲ \, , \, y'(۰) = ۴$$

سوال ۵ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم زیر را بیابید : ۲۰ نمره

$$y'' - y' - ۲y = ۴۰۲e^{۲x} - ۸x + ۲۹$$

موفق باشید

پاسخ سوال ۱ ـ این دسته منحنی، شامل تمام دایره‌هایی است که مرکز آنها بر روی محور xها قرار دارد و در مبدا مختصات بر محور yها مماس هستند. ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های داده شده را پیدا می‌کنیم. برای این کار رابطه داده شده را به صورت $\frac{y^۲}{x}+x=۲c$ نوشته و از طرفین آن مشتق می‌گیریم، داریم : $-\frac{y^۲}{x^۲}+\frac{۲yy'}{x}+۱=۰$ و در نتیجه : $y'=\frac{y^۲-x^۲}{۲xy}$

با معلوم بودن معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های داده شده، می‌توانیم معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم بر آنها را بنویسیم.

$$y'=\frac{۲xy}{x^۲-y^۲}$$

این معادله، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول همگن است. به کمک تغییر متغیر $y=xu$ داریم :

$$u+xu'=\frac{۲u}{۱-u^۲}\quad\rightarrow\quad xu'=\frac{u+u^۳}{۱-u^۲}\quad\rightarrow\quad\frac{(۱-u^۲)du}{u(۱+u^۲)}=\frac{dx}{x}$$

به یک معادله جدایی‌پذیر رسیده‌ایم. با استفاده از تجزیه کسرها خواهیم داشت $(\frac{۱}{u}-\frac{۲u}{۱+u^۲})du=\frac{dx}{x}$. از طرفین تساوی انتگرال می‌گیریم و داریم : $\ln u-\ln(۱+u^۲)=\ln x+a\quad\rightarrow\quad\frac{u}{۱+u^۲}=bx\quad\rightarrow\quad\frac{xy}{x^۲+y^۲}=bx$

معادله این دسته از منحنی‌ها را می‌توانیم به صورت $x^۲-۲ky+y^۲=۰$ بنویسیم. این دسته منحنی، شامل تمام دایره‌هایی است که مرکز آنها بر روی محور yها قرار دارد و در مبدا مختصات بر محور xها مماس هستند.

پاسخ سوال ۲ ـ قرار می‌دهیم $M=۲x^۲y+۲y+۳\ ,\ N=۲x^۳+۲x$ و داریم $M_y=۲x^۲+۲\ ,\ N_x=۶x^۲+۲$
چون $M_y\neq N_x$ پس این معادله یک معادله کامل نیست. اما می‌بینیم که کسر $\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{-۴x^۲}{۲x^۳+۲x}=\frac{-۲x}{x^۲+۱}$ یک تابع فاقد y است. پس این معادله، یک عامل انتگرالساز یک متغیره بر حسب x دارد. عامل انتگرالساز، تابع

$$\mu(x)=e^{\int\frac{-۲x}{x^۲+۱}dx}=e^{-\ln(x^۲+۱)}=\frac{۱}{x^۲+۱}$$

است. با ضرب این تابع در دو طرف معادله به یک معادله کامل خواهیم رسید : $(۲y+\frac{۳}{x^۲+۱})dx+۲xdy=۰$

اکنون قرار می‌دهیم $f(x,y)=\int(۲y+\frac{۳}{x^۲+۱})dx=۲xy+۳\arctan x$ و چون $f_y=۲x$ پس معادله حل شده است و جواب معادله عبارت است از : $۲xy+۳\arctan x=c$

پاسخ سوال ۳ ـ معادله داده شده یک معادله برنولی است. دو طرف تساوی را بر $\sqrt{y}$ تقسیم کرده $\frac{y'}{\sqrt{y}}+\frac{۲}{x}\sqrt{y}=\frac{x}{x^۲+۴}$
و سپس تغییر متغیر $u=\sqrt{y}$ را اعمال می‌کنیم. $۲u'+\frac{۲}{x}u=\frac{x}{x^۲+۴}\quad\rightarrow\quad u'+\frac{۱}{x}u=\frac{x}{۲(x^۲+۴)}$
اکنون به یک معادله خطی مرتبه اول رسیده‌ایم و جواب آن برابر است با : $u=e^{-\int\frac{dx}{x}}(c+\int\frac{x}{۲(x^۲+۴)}e^{\frac{dx}{x}}dx)$

$$u=\frac{۱}{x}(c+\int\frac{x^۲}{۲(x^۲+۴)}dx)\quad\rightarrow\quad u=\frac{۱}{x}(c+\int(\frac{۱}{۲}-\frac{۲}{x^۲+۴}dx)\quad\rightarrow\quad u=\frac{۱}{x}(c+\frac{x}{۲}-\arctan\frac{x}{۲})$$

چون $u=\sqrt{y}$، جواب معادله برنولی داده شده برابر است با : $y=\frac{۱}{x^۲}(c+\frac{x}{۲}-\arctan\frac{x}{۲})^۲$

پاسخ سوال ۴ ـ این معادله مرتبه دوم، یک معادله فاقد x است. بنابر این، از روش‌های کاهش مرتبه استفاده می‌کنیم. با استفاده از تغییر متغیر $u = y'$ خواهیم داشت $\quad \rightarrow \quad yuu' = y^2u + u^2$. اگر $u = 0$ آنگاه $y' = 0$ و نتیجه می‌دهد که خطهای افقی $y = c$ یک دسته ازجواب‌های معادله هستند. اگر $u \neq 0$ آنگاه به معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی $y' - \frac{1}{y}u = y$ می‌رسیم و جواب آن برابر است با : $\quad u = e^{\int \frac{dy}{y}}(c + \int ye^{-\int \frac{dy}{y}}dy) \ \rightarrow \ u = y(c + \int dy) \ \rightarrow \ u = y(c + y)$

اکنون داریم $y' = y(c + y)$ که یک معادله جدایی‌پذیر است. اگر از دو شرط مقدار اولیه $y(0) = 2 \ , \ y'(0) = 4$ خواهیم داشت $2(c + 2) = 4$ که نتیجه می‌دهد $c = 0$. یعنی معاده دیفرانسیل به صورت ساده‌تر $y' = y^2$ در می‌آید.

جواب این معادله عبارت است از $y = \frac{-1}{x + b}$ و با توجه به شرط اولیه $y(0) = 2$ خواهیم داشت $b = \frac{-1}{2}$ و بالاخره جواب نهایی معادله عبارت است از :
$$y = \frac{2}{1 - 2x}$$

پاسخ سوال ۵ ـ ابتدا معادله همگن نظیر معادله داده شده را حل می‌کنیم. معادله $y'' - y' - 2y = 0$ یک معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت است که معادله جبری $m^2 - m - 2 = 0$ معادله مشخصه آن و دارای دو ریشه حقیقی و متمایز $m_1 = -1$ و $m_2 = 2$ است. پس جواب همگن عبارت است از : $\quad y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$

برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله به کمک روش ضرایب نامعین، با توجه به تابع سمت راست معادله یعنی $h(x) = 402e^{2x} - 8x + 29$ و با توجه به اینکه تابع e^{2x} یک جواب معادله همگن است، جواب خصوصی را به صورت $y_p = axe^{2x} + bx + c$ حدس زده و آن را در معادله قرار می‌دهیم :

$$y'' - y' - 2y = (4x + 4)ae^{2x} - [(2x + 1)ae^{2x} + b] - (2axe^{2x} + 2bx + 2c) = 3ae^{2x} - 2bx - b - 2c$$

اکنون باید داشته باشیم $3ae^{2x} - 2bx - b - 2c = 402e^{2x} - 8x + 29$ یعنی $3a = 402 \ , \ -2b = -8 \ , \ -b - 2c = 29$ که نتیجه می‌دهد $a = 134 \ , \ b = 4 \ , \ c = \frac{-33}{2}$.

پس جواب خصوصی معادله برابر $y_p = 134xe^{2x} + 4x - \frac{33}{2}$ و جواب عمومی معادله عبارت است از :

$$y_g = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + 134xe^{2x} + 4x - \frac{33}{2}$$