نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : **سیدرضا موسوی**

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۲/۳/۲۰**

وقت : **۱۲۰** دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس **ریاضی۱** (علوم پایه)

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۴۰۲-۱۴۰۱**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=3\cos(\pi x)+2$ را به دست آورید. **۱۵ نمره**

سوال ۲- در صورت وجود ، محاسبه کنید : **۲۰ نمره**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-7x+3}$$

سوال ۳- مشتق تابع $f(x)=(x^2+3x)\sqrt{3x+10}$ را محاسبه کرده و به کمک آن مقدار $f'(-2)$ را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال ۴- معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=\dfrac{9x-2}{x+1}$ را در نقطه به طول $x=-2$ (واقع بر نمودار آن) بنویسید. **۱۵ نمره**

سوال ۵- نمودار تابع مثلثاتی $f(x)=\cos 2x-5\sin x+6$ را به کمک جدول تغییرات رسم کنید. **۲۰ نمره**

سوال ۶- انتگرال نامعین زیر را محاسبه کنید : **۱۵ نمره**

$$F(x)=\int 40x^4(2x^5-1)^3\,dx$$

سوال ۷- مساحت ناحیه محدود به دو سهمی $y=x^2$ و $y=\frac{3}{4}x^2+1$ را بدست آورید. **۲۰ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان پایان‌ترم درس ریاضی۱ (علوم پایه)

نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۱

پاسخ سوال۱: دوره تناوب تابع $y = 3\cos(\pi x) + 2$ برابر است با $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. چون $-1 \le \cos(\pi x) \le 1$ خواهیم داشت $-3 + 2 \le 3\cos(\pi x) + 2 \le 3 + 2$ که نتیجه می‌دهد $-1 \le y \le 5$. یعنی : $\max y = 5$ و $\min y = -1$

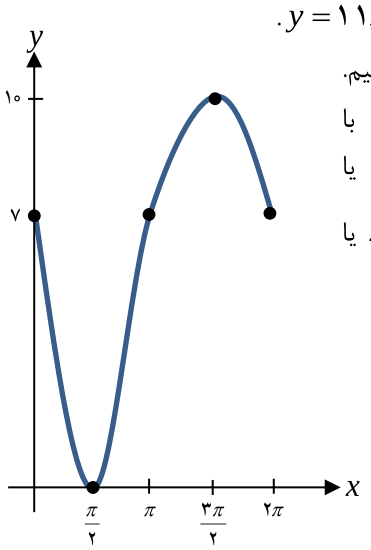
پاسخ سوال۲: $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 7x + 3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)\,(2x-1)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x-2}{2x-1} = \frac{3-2}{2\times 3 - 1} = \frac{1}{5}$

پاسخ سوال۳:

$$f(x) = (x^2 + 3x)\sqrt{3x + 10} \;\rightarrow\; f'(x) = (2x+3)\sqrt{3x+10} + \frac{3(x^2 + 3x)}{2\sqrt{3x+10}}$$

$$\rightarrow\; f'(x) = \frac{15x^2 + 67x + 60}{2\sqrt{3x+10}} \quad , \quad f'(-2) = \frac{60 - 134 + 60}{2\sqrt{4}} = \frac{-7}{2}$$

پاسخ سوال۴: چون $y(-2) = 20$ پس نقطه تماس عبارت است از $A = (-2, 20)$. چون $y' = \frac{11}{(x+1)^2}$ پس شیب خط مماس در نقطه A برابر است با $y'(-2) = 11$ و معادله خط مماس بر منحنی در نقطه A عبارت است از $y = 11x + 42$.



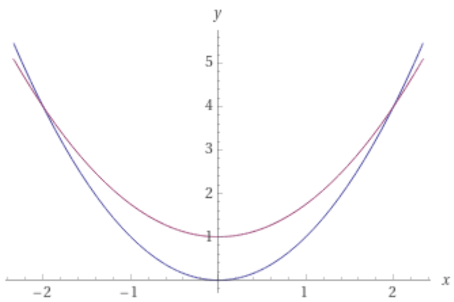
پاسخ سوال۵: دوره تناوب این تابع برابر $T = 2\pi$ است. نمودار آن را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم می‌کنیم. دو نقطه ابتدا و انتهای منحنی $(0,7)$ و $(2\pi, 7)$ هستند. مشتق تابع برابر است با $f'(x) = -2\sin 2x - 5\cos x$. اگر $f'(x) = 0$ آنگاه $-2\sin 2x - 5\cos x = 0$ و یا $-\cos x(4\sin x + 5) = 0$. چون $4\sin x + 5 \ne 0$ پس $\cos x = 0$ که نتیجه می‌دهد $x = \frac{\pi}{2}$ یا $x = \frac{3\pi}{2}$. نقاط ماکزیمم یا مینیمم (احتمالی) تابع عبارتند از : $(\frac{\pi}{2}, 0)$ و $(\frac{3\pi}{2}, 10)$.

جدول تغییرات تابع را کامل می‌کنیم.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	7	$\searrow$	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	7

پاسخ سوال۶: اگر فرض کنیم $f'(x) = 4x^3$ و $g(x) = 2x^5 - 1$ آنگاه داریم $f(x) = x^4$ و $g'(x) = 10x^4$ و انتگرال را می‌توان به صورت $F(x) = \int (10x^4)[4(2x^5 - 1)^3]dx = \int g'(x)\, f' \circ g(x)dx$ نوشت. به کمک فرمول مشتق همراه ، جواب این انتگرال برابر است با : $F(x) = f \circ g(x) = (2x^5 - 1)^4 + c$

پاسخ سوال۷: شکل تقریبی دو سهمی را رسم می‌کنیم.



دو نقطه برخورد سهمی‌ها با حل دستگاه معادله زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{3}{4}x^2 + 1 \end{cases} \rightarrow\; x^2 = \frac{3}{4}x^2 + 1 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix} \;,\; \begin{vmatrix} -2 \\ 4 \end{vmatrix}$$

مساحت ناحیه محدود به هر سهمی و محور xها را در بازه $[-2, 2]$ محاسبه می‌کنیم :

$$S_1 = \int_{-2}^{+2} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-2}^{+2} = \frac{1}{3}(8 + 8) = \frac{16}{3} \qquad S_2 = \int_{-2}^{+2} (\frac{3}{4}x^2 + 1)dx = \frac{1}{4}x^3 + x \Big|_{-2}^{+2} = 4 + 4 = 8$$

مساحت ناحیه محدود به سهمی $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$ و محور xها برابر است با :

مساحت ناحیه خواسته شده برابر است با : $S_2 - S_1 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$