نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۱/۱۰/۱۸**

وقت : **۱۳۵** دقیقه

امتحان پایان‌ترم درس : **معادلات دیفرانسیل** (۷ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۴۰۲- ۱۴۰۱**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- به کمک روش ضرایب نامعین، جواب خصوصی معادله زیر را یافته و سپس جواب عمومی معادله را بنویسید.

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} + x^2$$

۱۵ نمره

سوال ۲- معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + 2xy' - 2y = -3x^2 e^x$ را حل کنید. **۲۰ نمره**

سوال ۳- دستگاه معادلات

$$\begin{cases} 2(D+1)x + 3Dy = e^{3t} \\ Dx + 2(D-1)y = t \end{cases}$$

را حل کنید. **۲۰ نمره**

سوال ۴- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به کمک سری‌های توانی حول نقطه $x = 0$ بیابید. **۱۵ نمره**

$$y'' + (x+1)y' + y = 0$$

سوال ۵- معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید. **۱۵ نمره**

$$x'' + 4x = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 3 \\ 5e^{2t} & 3 \le t \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x(0) = -1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

سوال ۶-معادله انتگرالی زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید. **۱۵ نمره**

$$x(t) = 1 + 2\int_0^t \sin(t-u)\,x(u)\,du$$

سوال ۷- محاسبه کنید : **۲۰ نمره**

الف) $L^{-1}\{\frac{2s+7}{s^2+4s+4}\}$

ب) $L\{\int_0^t u\cos u\,du\}$

موفق باشید

پاسخ سوال۱: معادله مشخصه معادله همگن $y''+4y'+4y=0$ عبارت است از $m^2+4m+4=0$ که دو ریشه تکراری $m=-2$ دارد. پس جواب معادله همگن برابر است با : $y_h=(a+bx)e^{-2x}$

جواب خصوصی متناظر با هر یک از توابع $h_1(x)=e^{-2x}$ و $h_2(x)=x^2$ را به صورت جداگانه بدست می‌آوریم.

با توجه به جواب عمومی ، y_{p_1} را به صورت $y_{p_1}=mx^2e^{-2x}$ حدس می زنیم و در معادله قرار می‌دهیم.

$$m(4x^2-8x+2)e^{-2x}+4m(-2x^2+2x)e^{-2x}+4mx^2e^{-2x}=e^{-2x}$$

$$\rightarrow\ 2me^{-2x}=e^{-2x}\ \rightarrow 2m=1\ \rightarrow\ m=\frac{1}{2}\quad\rightarrow\ y_{p_1}=\frac{1}{2}x^2e^{-2x}$$

y_{p_2} را به صورت $y_{p_2}=ax^2+bx+c$ حدس می زنیم و در معادله قرار می‌دهیم.

$$2a+4(2ax+b)+4(ax^2+bx+c)=x^2\quad\rightarrow\ 4ax^2+(8a+4b)x+(2a+4b+4c)=x^2$$

$$\rightarrow\ 4a=1,\ 8a+4b=0,\ 2a+4b+4c=0\ \rightarrow\ a=\frac{1}{4},\ b=\frac{-1}{2}\ ,\ c=\frac{3}{8}\ \rightarrow\ y_{p_2}=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}$$

اکنون جواب عمومی معادله داده شده عبارت است از : $y_g=y_h+y_{p_1}+y_{p_2}=(a+bx)e^{-2x}+\frac{x^2}{2}e^{-2x}+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}$

پاسخ سوال۲: ابتدا معادله همگن نظیر این معادله را حل می‌کنیم یعنی ، $x^2y''+2xy'-2y=0$ که یک معادله اویلر است. معادله مشخصه آن عبارت است از $m(m-1)+2m-2=0$ که دو ریشه حقیقی و متمایز $m_1=1$ و $m_2=-2$ دارد.

پس جواب معادله همگن عبارت است از : $y_h=ax+\frac{b}{x^2}$

برای پیدا کردن جواب خصوصی از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $y_1=x$ و $y_2=\frac{1}{x^2}$ و $h(x)=-3e^x$

وداریم $w(y_1,y_2)=-\frac{3}{x^2}$ و در نتیجه $\frac{h(x)}{w(y_1,y_2)}=x^2e^x$ و جواب خصوصی معادله برابر است با :

$$y_p=-x\int(\frac{1}{x^2})(x^2e^x)dx+\frac{1}{x^2}\int(x)(x^2e^x)dx\quad\rightarrow\ y_p=-x\int e^xdx+\frac{1}{x^2}\int x^3e^xdx$$

$$\rightarrow\ y_p=-xe^x+\frac{1}{x^2}(x^3-3x^2+6x-6)e^x\quad\rightarrow\ y_p=\frac{-3}{x^2}(x^2-2x+2)e^x$$

اکنون جواب عمومی معادله داده شده عبارت است از : $y_h=ax+\frac{b}{x^2}-3(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})e^x$

پاسخ سوال۳: ابتدا y را حذف کرده و x_p را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} 2(D-1) \\ -3D \end{array}\left\{\begin{array}{l} 2(D+1)x+3Dy=e^{3t} \\ Dx+2(D-1)y=t \end{array}\right.$$

$$\rightarrow\ (D^2-4)x=4e^{3t}-3\ \rightarrow x_p=\frac{1}{D^2-4}e^{3t}-\frac{1}{D^2-4}(3)\quad\rightarrow\quad x_p=\frac{4}{5}e^{3t}+\frac{3}{4}$$

بطور مشابه ، x را حذف کرده و y_p را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} -D \\ 2(D+1) \end{array}\left\{\begin{array}{l} 2(D+1)x+3Dy=e^{3t} \\ Dx+2(D-1)y=t \end{array}\right.$$

$$\rightarrow\ (D^2-4)y=-3e^{3t}+2(t+1)\ \rightarrow y_p=\frac{-3}{D^2-4}e^{3t}+\frac{2}{D^2-4}(t+1)\quad\rightarrow\quad y_p=\frac{-3}{5}e^{3t}-\frac{1}{2}(t+1)$$

برای پیدا کردن جواب دستگاه معادله همگن نظیر این معادله قرار می دهیم :

$$\begin{vmatrix} ۲(D+۱) & ۳D \\ D & ۲(D-۱) \end{vmatrix} = ۰ \;\rightarrow\; D^۲ - ۴ = ۰ \;\rightarrow\; D = \pm ۲$$

جواب همگن به صورت $\begin{cases} x_h = ae^{۲t} + be^{-۲t} \\ y_h = Ae^{۲t} + Be^{-۲t} \end{cases}$ خواهد که پس از جایگذاری در معادله دوم دستگاه خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x_h = ae^{۲t} + be^{-۲t} \\ y_h = Ae^{۲t} + Be^{-۲t} \end{cases} \rightarrow (۲a + ۲A)e^{۲t} + (-۲b - ۶B)e^{-۲t} = ۰ \;\rightarrow a = -A \;,\; b = -۳B$$

پس جواب همگن برابر $\begin{cases} x_h = -Ae^{۲t} + -۳Be^{-۲t} \\ y_h = Ae^{۲t} + Be^{-۲t} \end{cases}$ و جواب عمومی عبارت است از :

$$\begin{cases} x_h = -Ae^{۲t} - ۳Be^{-۲t} + \frac{۴}{۵}e^{۳t} + \frac{۳}{۴} \\ y_h = Ae^{۲t} + Be^{-۲t} - \frac{۳}{۵}e^{۳t} - \frac{۱}{۲}(t+۱) \end{cases}$$

پاسخ سوال ۴ : الف) این معادله یک جواب به صورت سری توانی $y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ دارد. این جواب را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)a_n x^{n-۲} + (x+۱)\sum_{n=۱}^{\infty} na_n x^{n-۱} + \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n = ۰$$

عبارت سمت راست را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)a_n x^{n-۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=۱}^{\infty} na_n x^{n-۱} + \sum_{n=۰}^{\infty} ۴a_n x^n = ۰$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty} (n+۲)(n+۱)a_{n+۲} x^n + \sum_{n=۱}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=۰}^{\infty} (n+۱)a_{n+۱} x^n + \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n = ۰$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty} [(n+۲)(n+۱)a_{n+۲} + (n+۱)a_{n+۱}(n+۱)a_n]x^n = ۰$$

اکنون باید داشته باشیم :

$$(n+۲)(n+۱)a_{n+۲} + (n+۱)(a_{n+۱} + a_n) = ۰ \quad , \quad n = ۰,۱,۲,\cdots$$

و یا :

$$a_{n+۲} = \frac{-۱}{n+۲}(a_{n+۱} + a_n) \quad , \quad n = ۰,۱,۲,\cdots$$

تعدادی از ضرایب چندجمله‌ای را محاسبه می‌کنیم:

$$a_۲ = -\frac{۱}{۲}a_۰ - \frac{۱}{۲}a_۱ \;,\; a_۳ = \frac{۱}{۶}a_۰ - \frac{۱}{۶}a_۱ \;,\; a_۴ = \frac{۱}{۱۲}a_۰ + \frac{۱}{۶}a_۱ \;,\; a_۵ = -\frac{۱}{۲۰}a_۰ \quad , \; a_۶ = -\frac{۱}{۱۸۰}a_۰ - \frac{۱}{۳۶}a_۱ \;, \cdots$$

بنابر این، این معادله یک جواب به صورت سری توانی زیر است :

$$y = a_۰ + a_۱x + (-\frac{۱}{۲}a_۰ - \frac{۱}{۲}a_۱)x^۲ + (\frac{۱}{۶}a_۰ - \frac{۱}{۶}a_۱)x^۳ + (\frac{۱}{۱۲}a_۰ + \frac{۱}{۶}a_۱)x^۴ + (-\frac{۱}{۲۰}a_۰)x^۵ + (-\frac{۱}{۱۸۰}a_۰ - \frac{۱}{۳۶}a_۱)x^۶ + \cdots$$

$$y = a_۰\underbrace{(۱ - \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۱۲}x^۴ - \frac{۱}{۲۰}x^۵ - \frac{۱}{۱۸۰}x^۶ + \cdots)}_{y_۱} + a_۱\underbrace{(x - \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۶}x^۴ - \frac{۱}{۳۶}x^۶ + \cdots)}_{y_۲}$$

پاسخ سوال۵ : به کمک تابع پله‌ای واحد، معادله را به صورت $x''+4x=5u_3(t)e^{2t}$ بازنویسی می‌کنیم.
اکنون به کمک تبدیلات لاپلاس معادله را حل می‌کنیم.

$$L\{x''+4x\}=L\{5u_3(t)e^{2t}\} \quad \to \quad s^2L\{x\}-x(0)s-x'(0)+4L\{x\}=5e^{-3s}L\{e^{2(t+3)}\}$$

$$\to \quad (s^2+4)L\{x\}=-s+1+\frac{5e^6e^{-3s}}{s-2} \quad \to \quad L\{x\}=\frac{-s+1}{s^2+4}+\frac{5e^{-3s}}{(s-2)(s^2+4)}$$

به کمک تجزیه کسرها داریم :

$$L\{x\}=\frac{1}{s^2+4}-\frac{s}{s^2+4}+\frac{5e^6}{8}e^{-3s}\left(\frac{1}{s-2}-\frac{2}{s^2+4}-\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$\to \quad L\{x\}=L\{\frac{1}{2}\sin 2t-\cos 2t\}+\frac{5e^6}{8}e^{-3s}L\{e^{2t}-\sin 2t-\cos 2t\}$$

$$\to \quad x(t)=\frac{1}{2}\sin 2t-\cos 2t+\frac{5e^6}{8}u_3(t)[e^{2(t-3)}-\sin 2(t-3)-\cos 2(t-3)]$$

پاسخ سوال۶ :

$$L\{x(t)\}=L\{1+2\int_0^t \sin(t-u)x(u)\,du\} \quad \to \quad L\{x\}=\frac{1}{s}+2L\{\sin t\}L\{x\}$$

$$\to \quad L\{x\}=\frac{1}{s}+\frac{2L\{x\}}{s^2+1} \quad \to \quad \frac{s^2-1}{s^2+1}L\{x\}=\frac{1}{s} \quad \to \quad L\{x\}=\frac{s^2+1}{s(s^2-1)}$$

$$\to \quad L\{x\}=\frac{-1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1} \quad L\{x\}=L\{-1+e^t+e^{-t}\} \quad \to \quad x(t)=-1+e^t+e^{-t}$$

پاسخ سوال۷ : الف)

$$L^{-1}\{\frac{2s+7}{s^2+4s+4}\}=L^{-1}\{\frac{2s+7}{(s+2)^2}\}=L^{-1}\{\frac{2}{s+2}+\frac{3}{(s+2)^2}\}=e^{-2t}L^{-1}\{\frac{2}{s}+\frac{3}{s^2}\}=e^{-2t}(2+3s)$$

ب)

$$L\{\int_0^t u\cos u\,du\}=\frac{1}{s}L\{u\cos u\}=-\frac{1}{s}L'\{\cos u\}=-\frac{1}{s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'=-\frac{1}{s}\times\frac{-s^2+1}{(s^2+1)^2}=\frac{s^2-1}{s(s^2+1)^2}$$