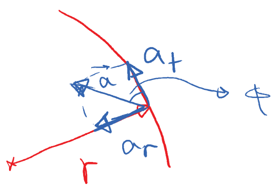
$$\Rightarrow \alpha(t=1) = 12\ \mathrm{rad}/s^2 \qquad a_t = r\alpha = 2(12) = 24\ m/s^2$$

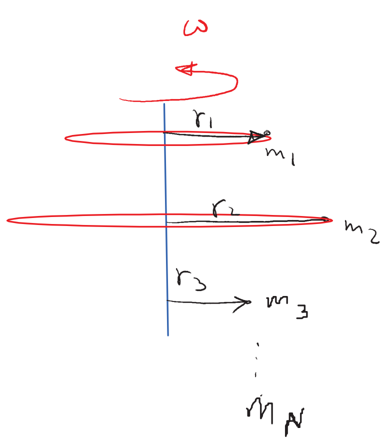
$$a_r = r\omega^2 = v^2/r = (10)^2 \times 2 = 200\ m/s^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{(24)^2 + (200)^2} \qquad \vec{a} = -a_r \hat{r} + a_t \hat{\theta}$$



$$\tan\phi = \frac{a_r}{a_t} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}(a_r/a_t)$$

انرژی جنبشی دوران



$$K = K_1 + K_2 + \dots + K_N$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots + \tfrac{1}{2} m_N v_N^2$$

$$v = r\omega \Rightarrow K = \tfrac{1}{2} m_1 (r_1\omega)^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (r_2\omega)^2 + \tfrac{1}{2} m_3 (r_3\omega)^2 + \dots + \tfrac{1}{2} m_N (r_N\omega)^2$$

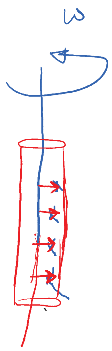
$$\Rightarrow K = \tfrac{1}{2}\Big[\underbrace{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_N r_N^2}_{I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2}\Big]\omega^2 = \tfrac{1}{2} I \omega^2$$

ممان اینرسی دورانی

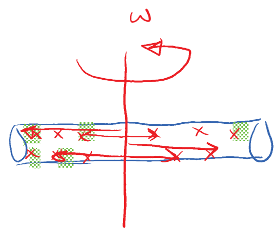
$$K = \tfrac{1}{2} m v^2 \qquad K = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \qquad I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

$K = \frac{1}{2} m v$ $\qquad$ $K = \frac{1}{2} I \omega$ $\qquad$ $I = \sum_{i=1} m_i r_i$

I : ممان اینرسی سیستم در حال دوران، هم به جرم سیستم و هم به نحوه ی توزیع آن نسبت به محور مرکز دوران بستگی دارد



(I)



(II)

ممان اینرسی توزیع جرم گسسته :

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

ممان اینرسی « جرم پیوسته

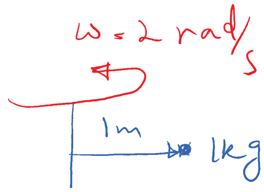
$$I = \lim \sum_{i=1}^{N \to \infty} dm_i \, r_i^2$$

$$I = \int r^2 \, dm$$

فاصله المان dm تا مرکز محور دوران

یک المان دلخواه روی توزیع جرم

ممان اینرسی سیستم زیر را بدست آورید و انرژی جنبشی آن را محاسبه نمایید.



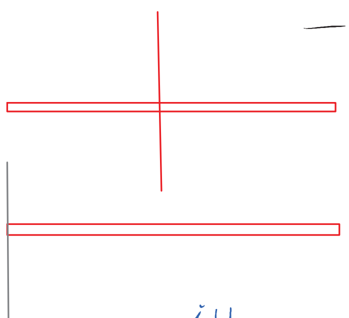
$$I = \sum_{i=1}^{N=3} m_i r_i^2 = 1(1)^2 + 5(2)^2 + 3(4)^2 = 69\ kg\,m^2$$

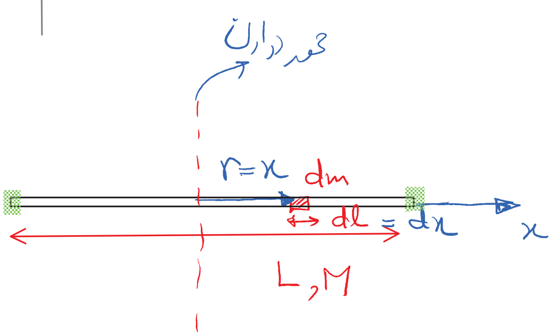
$$k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{\cancel{2}}(69)(2)^{\cancel{2}} = 138\ J$$

ممان اینرسی میله‌ای به طول L و جرم M را بدست آورید

a) نسبت به محوری که از وسط آن می‌گذرد

b) 〃 〃 〃 که از یک انتهایش می‌گذرد





a) توزیع جرم خطی: مسئله یک بعدی

$r = x$ فاصله المان dm تا محور دوران

$$I = \int x^2\, dm \implies dm = ??$$

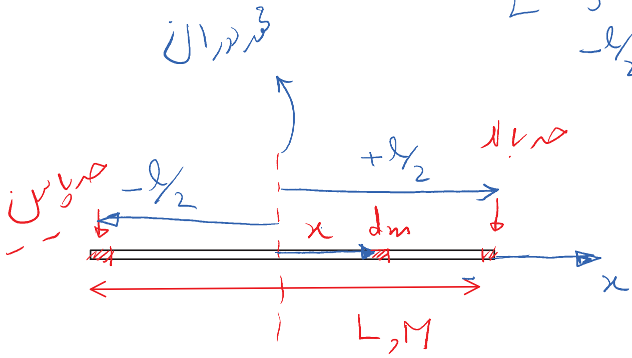
M	L
dm	dl

$$\implies dm = \frac{M}{L}\, dl$$

$$I = \int x^2 \frac{M}{l}\, dl \overset{dl = dx}{=} \frac{M}{l}\int x^2 dx = \frac{M}{l}\int x^2 dx$$

$$I = \frac{M}{l}\int^{+l/2} x^2 dx = \frac{M}{l}\, \frac{x^3}{3}\Big|^{l/2}$$

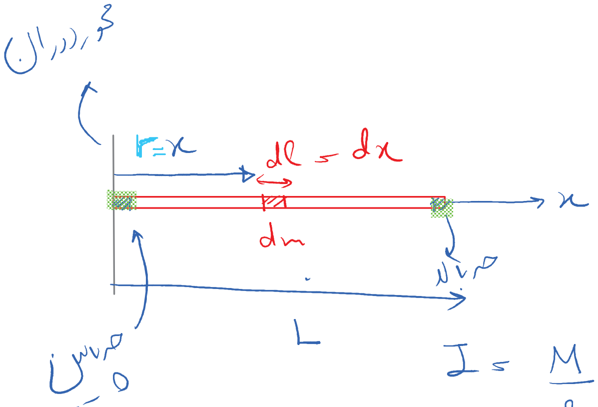
$$I = \frac{M}{L}\int_{-l/2}^{l/2} x^2\,dx = \frac{M}{l}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-l/2}^{l/2}$$



$$\to \frac{M}{3l}\left(\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\frac{l}{2}\right)^3\right)$$

$$= \frac{M}{3l}\left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right)$$

$$= \frac{\cancel{2}^{1} M l^{\cancel{3}}}{12\,\cancel{24}\,\cancel{l}} = \frac{1}{12} M l^2$$

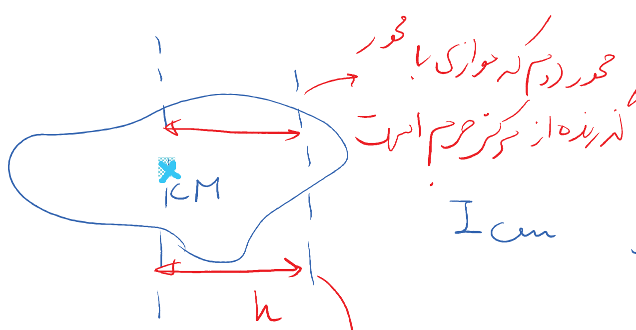


$$I = \int r^2\,dm = \int x^2\,dm = \frac{M}{l}\int x^2\,dx$$

از بالا (قسمت a)

$$I = \frac{M}{l}\int_0^L x^2\,dx = \frac{M}{l}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \frac{M}{l}\,\frac{L^3}{3}$$

$$= \frac{1}{3} M l^2$$



قضیه محورهای موازی

I_{cm} ممان اینرسی حول محوری که از مرکز جرم جسم می‌گذرد

$$I = I_{cm} + M h^2$$

جرم جسم

فاصله محورهای بین دو محور

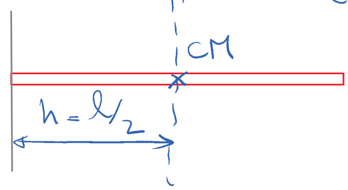
$$\to I_{CM} = \frac{1}{12} M l^2 \leftarrow (a$$

b)

CM

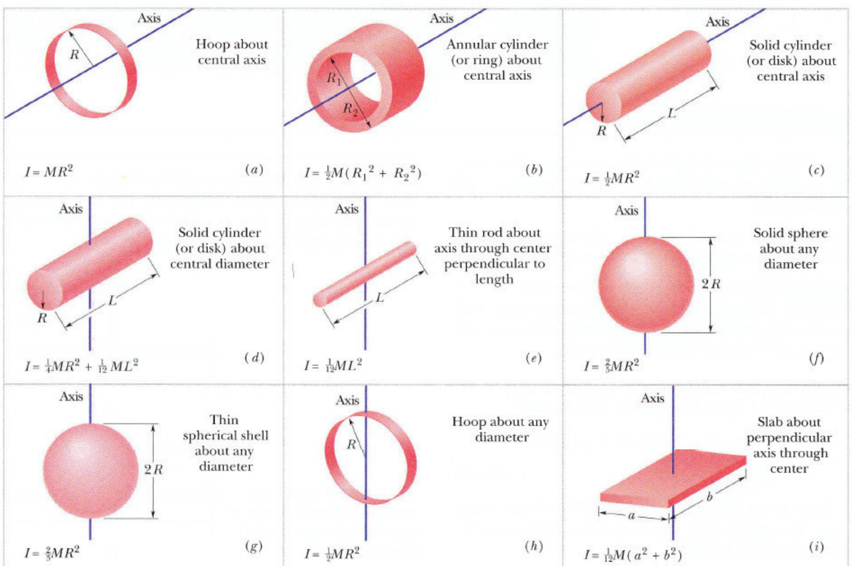
b)

$I_{CM} = \frac{1}{12} M l^2 \leftarrow (a$



$$I = I_{cm} + Mh^2 = \frac{1}{12} Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{12} Ml^2 + \frac{Ml^2}{4} = \frac{1}{3} Ml^2$$

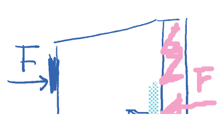


گشتاور در قانون دوم نیوتن در چرخش

عامل چرخش   گشتاور :   ; $\tau \rightarrow$ معادل با نیرو

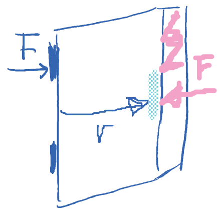
در حرکت خطی

F



* حتما نیرو باید با فاصله نسبت به محور / مرکز

F

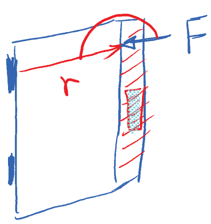


* حتما نیرو باید با فاصله نسبت به محور / مرکز دوران وارد شود، فاصله محل اعمال نیرو تا محور / مرکز دوران را r می نامیم

$\tau \propto r$

* گشتاور به اندازه نیرو هم بستگی دارد

$\tau \propto F$



* اگر نیرو در امتداد r وارد شود، گشتاور ایجاد نمی کند

زاویه θ بین امتداد $\vec{r}, \vec{F}$ تعریف می کنیم

اگر $\theta = 0$
$\theta = 180$ $\Rightarrow \tau = 0$

$\Rightarrow \sin\theta$

$\tau \propto F \quad \tau \propto r \quad \tau \propto \sin\theta$

زاویه بین $\vec{r}, \vec{F}$: θ

فاصله محل اعمال نیرو تا محور یا مرکز دوران

$$\Rightarrow \tau = rF\sin\theta = \vec{r} \times \vec{F}$$

قانون دوم نیوتن

$\vec{F} = m\vec{a}$
حرکت خطی

$\tau = I\alpha$
حرکت چرخشی

کار در حرکت چرخشی

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

خطی

$$W = \int \tau \, d\theta$$

چرخشی

$$\Delta K = W$$

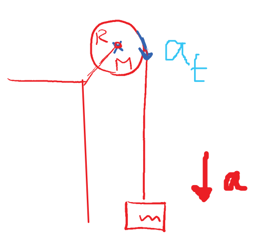
$$\Delta K = W$$

توان :

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} \xRightarrow{\text{نیرو ثابت}} P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta T} \xRightarrow{\text{گشتاور ثابت}} P = \tau \omega$$

Pure Translation (Fixed Direction)		Pure Rotation (Fixed Axis)	
Position	x	Angular position	θ
Velocity	$v = dx/dy$	Angular velocity	$\omega = d\theta/dt$
Acceleration	$a = dv/dt$	Angular acceleration	$\alpha = d\omega/dt$
Mass	m	Rotational inertia	I
Newton's second law	$F_{net} = ma$	Newton's second law	$\tau_{net} = I\alpha$
Work	$W = \int F\,dx$	Work	$W = \int \tau\,d\theta$
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Power (constant force)	$P = Fv$	Power (constant torque)	$P = \tau\omega$
Work–kinetic energy theorem	$W = \Delta K$	Work–kinetic energy theorem	$W = \Delta K$



از روی قرقره‌ای با جرم $M = 2.5\,kg$ و شعاع $R = 20\,cm$، طنابی عبور کرده و به جرم $m = 1.2\,kg$ متصل شده است. شتاب سقوط جرم m، شتاب زاویه‌ای قرقره و کشش طناب را بیابید. اصطکاک در سیستم وجود ندارد

سیستم دو جسمی
- حرکت خطی : جرم m
- حرکت چرخشی : قرقره M

حرکت چرخشی: قرقره M

چون قرقره و جرم m با طناب به هم وصل هستند شتاب خطی جرم m با مولفه‌ی مماسی شتاب خطی قرقره است.

قانون دوم نیوتن $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow a$

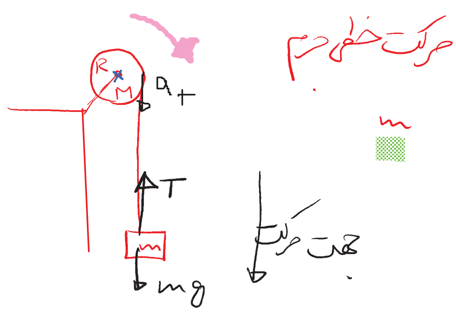
برای جرم m که حرکت خطی دارد نوشته می‌شود

$$a = a_t = r\alpha$$

(جرم) (قرقره)

قانون دوم نیوتن $\tau = I\alpha \Rightarrow \alpha$

در حرکت چرخشی برای جسمی که حرکت چرخشی دارد نوشته می‌شود



حرکت خطی جرم m

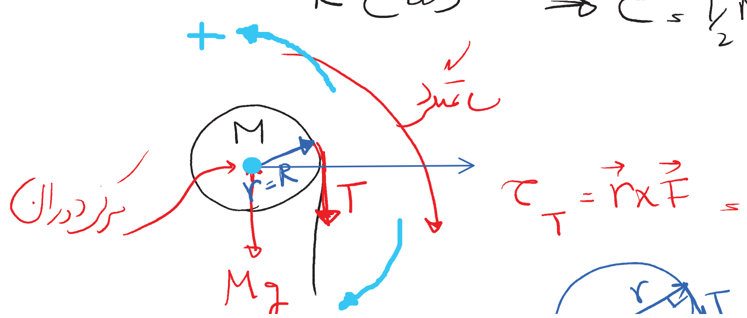
$\vec{F} = m\vec{a}$

m : $mg - T = ma$

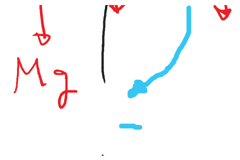
حرکت چرخشی

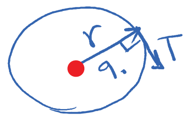
قرقره با جرم M و شعاع R : $\tau = I\alpha \Rightarrow \tau = \frac{1}{2}MR^2\alpha$

قرقره یک دیسک است
ممان اینرسی دیسک حول
مرکزش : $\frac{1}{2}MR^2$

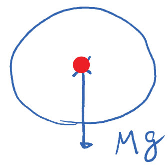


$$\tau_T = \vec{r} \times \vec{F} = rT\sin\theta_1 = RT\sin 90 = RT$$





$$\tau_{Mg} = \vec{r} \times \vec{F} = \cancel{r}^{\,0}\, Mg \sin\theta_2 = 0$$

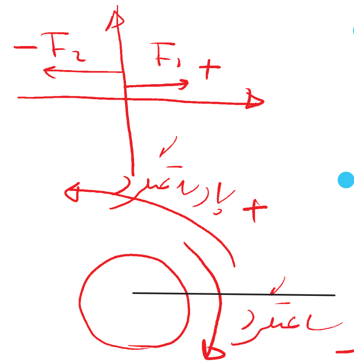


$$\Rightarrow \tau = -TR = I\alpha = \tfrac{1}{2}MR^2\alpha$$

حرکت ساعتگرد

خطی $\rightarrow$ $mg - T = ma$ ساری اند

چرخشی $\rightarrow$ $-TR = \tfrac{1}{2}MR^2\alpha \longrightarrow \alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{a}{R}$



$$\Rightarrow \begin{cases} mg - T = ma \\ -T\cancel{R} = \tfrac{1}{2}M\cancel{R}^2(a/\cancel{R}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg - T = ma \\ -T = \tfrac{1}{2}Ma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cancel{T} - mg = ma \\ -\cancel{T} = \tfrac{1}{2}Ma \end{cases}$$

$$-mg = \tfrac{1}{2}Ma$$

$$+ma$$

$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}M + m\right)a = -mg$$

$$\Rightarrow a = \frac{-mg}{\tfrac{1}{2}M + m} = -4.8\ m/s^2$$

شتاب خطی جرم m ، نسبت پایین

چرخش $\dfrac{mg}{\tfrac{1}{2}M+m}$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{a_t}{R} = \frac{-4.8}{0.2}$$ شتاب زاویه‌ای قرقره

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{mg}{(\tfrac{1}{2}M + m)R} = -24\ rad/s^2$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{mg}{(\frac{1}{2}M+m)R} = -24\ rad/s^2$$

کشش طناب

$$-T = \frac{1}{2}M(a) \Rightarrow T = -\frac{1}{2}M\left(-\frac{mg}{\frac{1}{2}M+m}\right) \Rightarrow T = \frac{\frac{1}{2}Mmg}{\frac{1}{2}M+m} = 6N$$

a) اگر قرقره در مسئله‌ی بالا از $t=0$ شروع به حرکت کند در $t=2.5s$، انرژی جنبشی آن چقدر است

$\theta_0 = 0$

$$k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 = 90\,J$$

حرکت با شتاب زاویه‌ای ثابت

$$\omega = \alpha t + \cancel{\omega_0} \Rightarrow \omega = \alpha t = \frac{a}{R}t = \overbrace{(-24)(2.5s)}$$

b) کار انجام شده روی قرقره را محاسبه نمایید

$$W = \int \tau\, d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_F} -RT\, d\theta = -RT\int_{\theta_i}^{\theta_F} d\theta \Rightarrow -RT(\theta)\Big|_{\theta_i}^{\theta_F}$$

گشتاور ناشی از T

$$\Rightarrow W = -RT(\theta_F - \theta_i) = -RT\Delta\theta$$

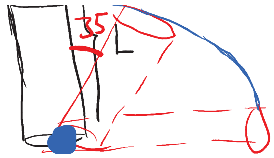
$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t \Rightarrow \Delta\theta = \frac{1}{2}(-24)(2.5)^2 + \cancel{\omega_0}(2.5)$$

$$\Delta\theta = -12(2.5)^2$$

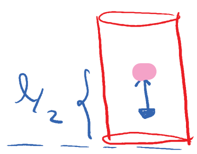
$$\Rightarrow W = -0.2(6)(-12)(2.5)^2 = 90\,J$$

$$\Delta k = W \Rightarrow k_2 - k_1 = W \Rightarrow 90 - 0 = 90\,J \checkmark\checkmark$$

اگر استوانه بیفتد، سرعت زاویه‌ای استوانه در هنگامی که با امتداد عمود زاویه‌ای $35°$ می‌سازد، چقدر است، پایستگی انرژی

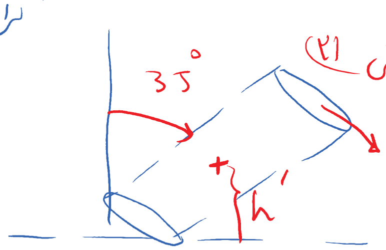


عمود زاویه‌ای 35° می‌سازد، چقدر است، ممان اینرسی استوانه حول محوری که از انتهایش می‌گذرد $\frac{1}{3}Ml^2$ است



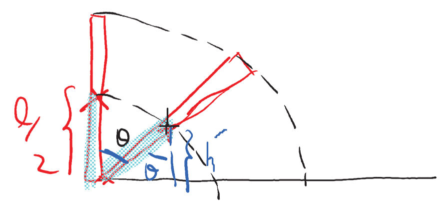
زمانی است که استوانه ایستاده است

$$E_1 = \cancel{K_1} + U_1 = mg\,l/2$$



(۲) حرکت چرخشی

$$E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh'$$



$$\cos\theta = h'/(l/2) \Rightarrow h' = l/2 \cos\theta$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow mg\,l/2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\,l/2\cos\theta$$

$\theta = 35^\circ$, $I = \frac{1}{3}ml^2$ $\Longrightarrow$

$$mg\,l/2\,(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega = ??$$