نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۱/۹/۳**

وقت : **۸۰** دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم درس **ریاضی۱** (۱۸ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۴۰۲- ۱۴۰۱**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- الف) معادله $z^5 = -\sqrt{3} + i$ را حل کنید. **۱۰ نمره**

ب) مکان هندسی نقاطی که در رابطه $\left|\dfrac{2z-i}{z+1}\right| \le 2$ را مشخص کنید. **۱۰ نمره**

سوال ۲- دامنه تابع $f(x) = \arcsin\dfrac{1}{3-2x}$ را بیابید. **۱۰ نمره**

سوال ۳- الف) حد مقابل را محاسبه کنید : $\ell = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1} - \sqrt{x^2+4}\right)$ **۱۰ نمره**

ب) مقدار a را طوری بیابید که تابع $f:\mathbb{R}-\{-4\}\to\mathbb{R}$ با ضابطه زیر در $x=4$ پیوسته باشد. **۱۰ نمره**

$$f(x)=\begin{cases} a & x=4 \\ |x-4|\cos\left(\dfrac{1}{x^2-16}\right) & x\neq 4 \end{cases}$$

سوال ۴- یک مقدار تقریبی برای عدد $29^{\frac{2}{3}}$ بیابید. **۱۰ نمره**

سوال ۵- نمودار تابع $y = \dfrac{3x}{x^2-5x+4}$ را رسم کنید. **۲۰ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : الف) می‌نویسیم $z^5 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i} = 2e^{(2k\pi+\frac{5\pi}{6})i}$ که k یک عدد صحیح است. اکنون داریم $z_k = \sqrt[5]{2}e^{(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{6})i}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

اما می‌دانیم که این معادله دقیقا ۵ ریشه دارد پس جواب سوال عبارت است : $z_k = \sqrt[5]{2}e^{(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{6})i}\ ,\ k=0,1,2,3,4$

ب) نامساوی را به صورت $|2z-i|\le 2|z+1|$ می‌نویسیم و قرار می‌دهیم $z=x+yi$.

اکنون داریم $|2x+(2y-1)i|\le 2|(x+1)+yi|$ که نتیجه می‌دهد : $4x^2+(2y-1)^2\le 4(x+1)^2+4y^2$

پس از ساده کردن این نامساوی خواهیم داشت : $8x+4y+3\ge 0$

مکان هندسی مورد نظر، نقاط واقع بر خط $8x+4y+3=0$ و نیم‌صفحه بالایی آن است.

پاسخ سوال۲ : دامنه تابع f عبارت است از $D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\le\frac{1}{3-2x}\le 1\}$ و می‌توانیم آن را به صورت اجتماع دو مجموعه مجزا بنویسیم.

$$D_f=\{x\mid 3-2x>0\ ,\frac{1}{3-2x}\le 1\}\cup\{x\mid 3-2x<0\ ,-1\le\frac{1}{3-2x}\}$$

$$D_f=\{x\mid \frac{3}{2}>x\ ,3-2x\ge 1\}\cup\{x\mid \frac{3}{2}<x\ ,-1\ge 3-2x\}$$

$$D_f=\{x\mid \frac{3}{2}>x\ ,x\le 1\}\cup\{x\mid \frac{3}{2}<x\ ,x\ge 2\}\qquad\rightarrow\qquad D_f=(-\infty,1]\cup[2,\infty)$$

پاسخ سوال۳ : الف) روش اول : تابع را در مزدوج آن ضرب و تقسیم می‌کنیم و داریم : $\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2+4}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(3-\frac{5}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=\frac{3-0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1+0}}=\frac{3}{2}$$

روش دوم : از تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$ استفاده می‌کنیم. $\ell=\lim\limits_{t\to0^+}(\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}-1}-\sqrt{\frac{1}{t^2}+4})=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+3t-t^2}-\sqrt{1+4t^2}}{t}$

صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم. $=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{3t-5t^2}{t(\sqrt{1+3t-t^2}+\sqrt{1+4t^2})}$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{3-5t}{\sqrt{1+3t-t^2}+\sqrt{1+4t^2}}=\frac{3}{2}$$

ب) برای پیوستگی تابع f در نقطه $x=4$ باید داشته باشیم : $f(4)=\lim\limits_{x\to4}f(x)\ \rightarrow\ a=\lim\limits_{x\to4}|x-4|\cos\frac{1}{x^2-16}$

چون می‌دانیم $-1\le\cos\frac{1}{x^2-16}\le 1$ پس تابع $\cos\frac{1}{x^2-16}$ یک تابع کراندار است و همچنین $\lim\limits_{x\to4}|x-4|=0$ طبق یکی از قضیه‌های حد نتیجه می‌گیریم : $\lim\limits_{x\to4}|x-4|\cos\frac{1}{x^2-16}=0$ پس شرط پیوستگی تابع f در $x=4$ این است که $a=0$.

پاسخ سوال۴ : تابع $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ را در نظر می گیریم و مقدار تقریبی $f(29)$ را محاسبه می‌کنیم. با در نظر گرفتن $a=27$ داریم :

$$f(29)\cong f(27)+(29-27)f'(27)$$

می‌دانیم $f(27)=9$ و چون $f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ پس $f'(27)=\frac{2}{9}$ و در نتیجه : $f(29)\cong 9+2\times\frac{2}{9}=9\frac{4}{9}=9{,}444$

پاسخ سوال۵ :

برای تعیین دامنه تابع قرار می‌دهیم $x^2-5x+4\neq 0$ و در نتیجه $D_f=\mathbb{R}-\{1,4\}$

در مورد نقاط گوشه‌ای دامنه می‌دانیم : $\left|\begin{array}{l} x\to-\infty \\ y\to 0\end{array}\right.$, $\left|\begin{array}{l} x\to 1 \\ y\to \pm\infty\end{array}\right.$, $\left|\begin{array}{l} x\to 4 \\ y\to \pm\infty\end{array}\right.$, $\left|\begin{array}{l} x\to \infty \\ y\to 0\end{array}\right.$

مشتق تابع عبارت است از $y'=\frac{3(-x^2+4)}{(x^2-15x+4)^2}$ و اگر قرار دهیم $y'=0$ دو نقطه $\left|\begin{array}{l} x=-2 \\ y=\frac{-2}{3}\end{array}\right.$ و $\left|\begin{array}{l} x=2 \\ y=-3\end{array}\right.$ مشخص می‌شوند.

جدول تغییرات تابع را کامل می‌کنیم.

x	$-\infty$		-2		1		2		4		∞
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	$\searrow$	$\frac{-1}{3}$	$\nearrow$	∞ | $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ | ∞	$\searrow$	0