نام و نام خانوادگی : ....
شماره دانشجویی : ....
نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**
تاریخ : **۱۴۰۱/۳/۳۱**
وقت : **۱۰۰** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم درس : **مبانی ترکیبیات**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۴۰۱ -۱۴۰۰**

توجه :

پاسخ‌ها را توسط نرم‌افزاری مانند Camscanner به صورت یک فایل PDF با حجم مناسب در آورده و از طریق سامانه LMS ارسال نمایید.

ارسال فایل‌ها را به دقایق آخر موکول نکنید چون سامانه راس ساعت بسته خواهد شد.

قسمت اول : سوال‌های انتخابی (هر سوال ۱۵ نمره دارد.)

←← از ۶ سوال زیر فقط به ۳ سوال جواب دهید. →→

سوال ۱– تاس همگنی را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم. در چند حالت مجموع عددهای روشده، یک عدد فرد است و حداقل یکی از تاس‌ها عدد ۲ را نشان داده است؟

(تست ۱۴۵ - کنکور سراسری - ریاضی ۱۳۹۹)

سوال ۲– با رقم‌های ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ تمام عددهای طبیعی را می‌نویسیم که در آنها رقم تکراری به کار نرفته است. چند عدد نوشته‌ایم که بر ۴ بخشپذیر هستند؟

(تست ۱۵۰ - کنکور سراسری - تجربی ۱۴۰۰)

سوال ۳– در یک دوره آموزشی، میزگردی شامل ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش‌آموزان می‌توانند بر روی صندلی‌ها بنشینند بطوریکه در کنار هر دانش‌آموزی، دانش‌آموز هم‌پایه او قرار نگیرد؟

(تست ۱۴۹ - کنکور سراسری - تجربی ۱۴۰۰)

سوال ۴– تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱ + x_۲ + x_۳ = \frac{۹}{x_۴}$ را مشخص کنید؟

(تست ۱۳۷ - کنکور سراسری - ریاضی ۱۴۰۰)

سوال ۵– فرض کنید $a,b,c \in \{۱,۲,۳,\cdots,۹\}$. چند معادله درجه دوم به صورت $ax^۲ + bx - c = ۰$ می‌توان تشکیل داد بطوریکه مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل ضرب ریشه‌های همان معادله، ۲ واحد بیشتر باشد؟

(تست ۱۴۸ - کنکور سراسری - تجربی ۱۴۰۰)

سوال ۶– در یک گروه ۹۹ نفره، بین هر پنج نفر دو نفر هم‌سن هستند و بین هر ۴ نفر، دو نفر هستند که در یک شهر متولد شده‌اند. بیشترین مقدار K را بیابید بطوریکه گزاره زیر همواره درست باشد؟

« حداقل K نفر در این گروه هستند که هم سن آنها برابر است و هم متولد یک شهر هستند. »

(تست ۱۱۶ - کنکور ارشد علوم کامپیوتر ۱۳۹۹)

↓↓ سوال‌های الزامی در صفحه بعد را ببینید. ↓↓

نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۱/۳/۳۱**

وقت : **۱۰۰** دقیقه

امتحان پایان‌ترم درس : **مبانی ترکیبیات**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۴۰۱**- ۱۴۰۰

توجه :

پاسخ‌ها را توسط نرم‌افزاری مانند Camscanner به صورت یک فایل PDF با حجم مناسب در آورده و از طریق سامانه LMS ارسال نمایید.

ارسال فایل‌ها را به دقایق آخر موکول نکنید چون سامانه راس ساعت بسته خواهد شد.

قسمت دوم : سوال‌های الزامی (هر سوال ۱۵ نمره دارد.)

سوال ۷- به چند روش می‌توان حروف کلمه shahroud را مرتب کرد بطوریکه دقیقا دو حرف صدادار کنار هم باشند؟

(تست ۱۳۲ - کنکور ارشد علوم کامپیوتر ۱۴۰۰)

سوال ۸- در یک مکعب با ابعاد ۵×۵×۵ چند مکعب مستطیل با ابعاد ۳×۲×۱ وجود دارد؟

(تست ۱۲۳ - کنکور ارشد علوم کامپیوتر ۱۴۰۰)

سوال ۹- یک مامور آتش نشانی در ماه تیر باید ۳ شیفت در پایگاه حضور داشته باشد.

هر شیفت ۵ روز است و بین هر دو شیفت، باید حداقل ۳ روز استراحت کند.

این مامور به چند روش می‌تواند شیفت‌های خود را برنامه‌ریزی کند؟

سوال ۱۰- در مغازه‌ای شش نوع ساندویچ وجود دارد که قیمت پنج نوع از آنها ۳ هزار تومان و قیمت یک نوع از آنها ۵ هزار تومان است. برای خریدی به مبلغ ۴۳ هزار تومان چند امکان وجود دارد؟

(تست ۱۱۰ - کنکور ارشد ریاضی ۱۳۹۹)

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان پایان‌ترم درس مبانی ترکیبیات

نیمسال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

دانشکده علوم ریاضی
سیدرضا موسوی
۱۴۰۱/۳/۳۱

پاسخ سوال ۱ : فرض می‌کنیم x_i عددی باشد که در پرتاب $i=۱,۲,۳$ آمده است و $x_۱+x_۲+x_۳$ عددی فرد است.

<u>روش اول</u> : چون مجموع این سه عدد، عددی فرد است پس هر سه عدد زوج نیستند و چون یکی از عددها ۲ است پس یکی از دو عدد باقیمانده زوج و عدد دیگر باید فرد باشد. مجموعه جواب‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم.

دسته اول : فقط یکی از این ۳ عدد برابر ۲ باشد. پس یک عدد باید از مجموعه $\{۴,۶\}$ و عدد دیگر از مجموعه $\{۱,۳,۵\}$ انتخاب شود. یعنی ۶ انتخاب داریم و چون سه عدد متمایز هستند تعداد جایگشت‌های آنها هم برابر $۳!=۶$ است. این دسته شامل $۶\times۶=۳۶$ جواب است.

دسته دوم : دو عدد برابر ۲ باشند. برای عدد سوم فقط ۳ انتخاب داریم و تعداد جایگشت‌های آنها هم برابر ۳ است. این دسته شامل $۳\times۳=۹$ جواب است.

تعداد کل جواب‌ها برابر $۳۶+۹=۴۵$ است.

<u>روش دوم</u> : کل حالت‌ها را به ۳ دسته متمایز تقسیم کرده و تعداد حالت‌های هر دسته را محاسبه و سپس با هم جمع می‌کنیم.

دسته اول : $x_۱=۲$. در این صورت برای $x_۲$ ، ۶ انتخاب و به ازای هر انتخاب $x_۲$ فقط ۳ انتخاب برای $x_۳$ داریم. بنابر این دسته اول شامل $۶\times۳=۱۸$ حالت است.

دسته دوم : $x_۱\neq۲, x_۲=۲$. در این صورت برای $x_۱$ ، ۵ انتخاب و به ازای هر انتخاب $x_۱$ فقط ۳ انتخاب برای $x_۳$ داریم. بنابر این دسته دوم شامل $۵\times۳=۱۵$ حالت است.

دسته سوم : $x_۱\neq۲, x_۲\neq۲, x_۳=۲$. در این صورت برای $x_۱$ ، ۵ انتخاب داریم. در ۳ انتخاب آن برای $x_۲$، ۲ انتخاب و در ۲ انتخاب آن برای $x_۳$، ۳ انتخاب داریم. بنابر این دسته سوم شامل $۳\times۲+۲\times۳=۱۲$ حالت است.

جواب سوال برابر است با : $۱۸+۱۵+۱۲=۴۵$

<u>روش سوم</u> : چون حداقل یکی از x_iها زوج است و مجموع آنها عددی فرد است، پس از دو عدد دیگر یکی زوج و یکی فرد خواهد بود. برای انتخاب عدد فرد، ۳ انتخاب داریم و اینکه این عدد فرد در کدام پرتاب آمده باشد هم ۳ حالت دارد. پس فرض می‌کنیم که $x_۳$ یک عدد فرد ثابت است و جواب به دست آمده را در $۳\times۳=۹$ ضرب خواهیم کرد. اکنون دو عدد دیگر زوج هستند و یکی از آنها ۲ است. اگر $x_۱=۲$ برای $x_۲$ ۳ انتخاب داریم و برای ۲ انتخاب دیگر $x_۲$ فقط ۱ انتخاب خواهیم داشت. پس در مجموع ۵ حالت وجود دارد و جواب سوال $۵\times۹=۴۵$ خواهد بود.

روش چهارم (اصل طرد و شمول) : سه مجموعه را در نظر می‌گیریم. برای $i=۱,۲,۳$ مجموعه A_i شامل تمام حالت‌هایی است که $x_i=۲$.
اگر $x_۱=۲$ آنگاه برای $x_۲$ ، ۶ انتخاب و به ازای هر انتخاب $x_۲$ فقط ۳ انتخاب برای $x_۳$ داریم. بنابر این $|A_۱|=۶\times۳=۱۸$
بطور مشابه داریم $|A_۲|=|A_۳|=۱۸$. اگر $x_۱=x_۲=۲$ آنگاه برای $x_۳$ فقط ۳ انتخاب داریم. یعنی $|A_۱\cap A_۲|=۳$ و بطور مشابه داریم $|A_۱\cap A_۳|=|A_۲\cap A_۳|=۳$. می‌توان دید که $|A_۱\cap A_۲\cap A_۳|=۰$
اکنون جواب مساله برابر است با : $|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|=۳\times۱۸-۳\times۳-۰=۴۵$

پاسخ سوال۲ : عددهای طبیعی نوشته شده، یک رقمی، دو رقمی، سه رقمی، چهار رقمی یا پنج رقمی هستند.
از عددهای یک رقمی نوشته شده فقط عدد ۴ بر ۴ بخشپذیر است، پس تعداد آنها برابر ۱ است.
از عددهای دو رقمی نوشته شده فقط عددهای ۱۲ ، ۳۲ ، ۵۲ و ۲۴ بر ۴ بخشپذیر است، پس تعداد آنها برابر ۴ است.
در عددهای با تعداد رقم بیشتر از ۲ ، دو رقم سمت راست باید یکی از اعداد دو رقمی نوشته در قسمت قبل باشد و در مورد بقیه رقم‌ها شرط خاصی وجود ندارد.
تعداد عددهای سه رقمی بخشپذیر بر ۴ برابر $۳\times۴=۱۲$ است.
تعداد عددهای چهار رقمی بخشپذیر بر ۴ برابر $۶\times۴=۲۴$ است.
تعداد عددهای پنج رقمی بخشپذیر بر ۴ برابر $۶\times۴=۲۴$ است.
پس تعداد کل عددهای مورد نظر مساله برابر است با : $۱+۴+۱۲+۲۴+۲۴=۶۵$

پاسخ سوال۳ : ابتدا دانش آموزان پایه دوازدهم را در نظر می‌گیریم. چون می‌خواهند دور یک میز گرد بنشینند، این ۴ نفر به $۳!=۶$ حالت می‌توانند بنشینند بطوریکه بین هر دو نفر از آنها یک صندلی خالی باشد. اکنون ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم به $۴!=۲۴$ حالت می‌توانند بر روی صندلی‌های خالی بنشینند. پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با : $۶\times۲۴=۱۴۴$

پاسخ سوال۴ : چون سمت چپ تساوی، یک عدد صحیح خواهد بود پس سمت راست تساوی هم باید عدد صحیح باشد. یعنی، عدد ۹ باید بر عدد x_4 بخشپذیر باشد. بنابر این، x_4 باید یکی از اعداد ۱ و ۳ و ۹ باشد. اکنون سه حالت متفاوت در نظر می‌گیریم.

حالت اول : $x_4 = 1$. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ برابر است با $\binom{11}{2} = 55$.

حالت دوم : $x_4 = 3$. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ برابر است با $\binom{5}{2} = 10$.

حالت سوم : $x_4 = 9$. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ برابر است با $\binom{3}{2} = 3$.

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله داده شده در صورت مساله برابر است با : $55 + 10 + 3 = 68$

پاسخ سوال۵ : مجموع دو ریشه معادله $ax^2 + bx - c = 0$ برابر $\frac{-b}{a}$ و حاصلضرب دو ریشه برابر $\frac{-c}{a}$ می‌باشد. طبق شرط مساله باید داشته باشیم $2 + \frac{-b}{a} = \frac{-c}{a}$ و یا $2a + b = c$.

اکنون باید تعداد جواب‌های معادله سیاله $2a + b = c$ را در مجموعه $\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$ پیدا کنیم.

<u>روش اول :</u> چون $b \ge 1$ و $a = \frac{c-b}{2}$ پس $1 \le a \le \frac{c-1}{2}$. اکنون به ازای مقادیر مختلف c تعداد جواب‌ها را پیدا می‌کنیم.

c	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد جواب‌ها	۰	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴

جواب سوال، مجموع عددهای سطر دوم جدول است. یعنی : $0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 16$

<u>روش دوم :</u> معادله $2a + b = c$ را به صورت $2a = c - b$ می‌نویسیم. چون $c - b < 9$ پس $2a < 9$. یعنی $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ به ازای هر a تعداد جواب‌های معادله را مشخص می‌کنیم.

a	۱	۲	۳	۴
تعداد جواب‌ها	۷	۵	۳	۱

جواب سوال، مجموع عددهای سطر دوم جدول است. یعنی : $7 + 5 + 3 + 1 = 16$

پاسخ سوال۶ : چون با انتخاب هر پنج نفر، ۲ نفر هستند که در یک سال متولد شده‌اند، پس ما نمی‌توانیم ۵ نفر پیدا کنیم که در ۵ سال متفاوت به دنیا آمده باشند. بنابر این، این ۹۹ نفر حداکثر در ۴ سال متفاوت به دنیا آمده‌اند. بطور مشابه، این ۹۹ نفر حداکثر در ۳ شهر متفاوت متولد شده‌اند. با توجه به این اطلاعات، این ۹۹ نفر از نظر سن و زادگاه حداکثر $4 \times 3 = 12$ حالت متفاوت می‌توانند داشته باشند.
اکنون طبق اصل لانه کبوتری، بین هر ۱۳ نفر، دو نفر هستند که هم سن آنها برابر است و هم محل تولد آنها یک شهر است.
اما صورت مساله این را نخواسته است. صورت سوال پرسیده است که از میان این ۱۲ دسته، دسته‌ای که شامل بیشترین عضو است حداقل چند عضو دارد؟ اگر ۹۹ را بر ۱۲ تقسیم کنیم، آنگاه خارج قسمت برابر ۸ و باقیمانده برابر ۳ خواهد بود. این نتیجه می دهد که حداقل یک دسته وجود دارد که حداقل ۹ عضو دارد.
بنابر این، $K = 9$ جواب سوال است.

پاسخ سوال۷ : در اینجا ما باید با ۸ حرف داده شده، کلمه‌های ۸ حرفی بسازیم. تنها شرط مساله این است که دو حرف صدادار مجاور هم باشند و با حرف صدادار سوم فاصله داشته باشند. در مورد محل قرار گرفتن حروف هیچ محدودیتی وجود ندارد. بنابر این کافی است که محل قرار گرفتن ۳ حرف صدادار را مشخص کنیم. برای مثال : *□□□**□□

اکنون باید به جای هر * یک حرف صدادار و به جای هر □ یک حرف بی صدا قرار دهیم. برای قرار دادن حروف صدادار $۳! = ۶$ انتخاب و برای قرار دادن حروف بی صدا $۵! \div ۲! = ۱۲۰ \div ۲ = ۶۰$ انتخاب وجود دارد. (تقسیم بر ۲ به دلیل تکراری بودن حرف h است زیرا تعویض جای دو حرف مشابه، کلمه جدید نمی‌سازد.) به دلیل مستقل بودن دو جایگذاری، در این حالت $۶ \times ۶۰ = ۳۶۰$ کلمه متفاوت ساخته می‌شود.

پس کافی است تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن *ها و □ها را تعیین کنیم.

<u>روش اول :</u> ابتدا دو * مجاور را یک * در نظر می‌گیریم. پس باید یک کلمه ۷ حرفی بسازیم که در آن دو * غیر مجاور وجود داشته باشد. تعداد کل انتخابها برای قرار دادن دو * برابر $\binom{۷}{۲} = ۲۱$ است اما ۶ حالت و جود دارد که دو * مجاور هستند. بنابر این تعداد انتخاب‌های مناسب برابر $۲۱ - ۶ = ۱۵$ است. اکنون * سوم را می‌توانیم کنار یکی از دو * قبلی قرار دهیم. به این ترتیب تعداد کل انتخاب‌ها برابر $۱۵ \times ۲ = ۳۰$ خواهد بود.

<u>روش دوم :</u> می‌توانیم از معادله سیاله کمک بگیریم. اگر کلمه را به صورت $\underbrace{\square\square}_{x_۱}**\underbrace{\square\square}_{x_۲}*\underbrace{\square}_{x_۳}$ و یا $\underbrace{\square\square}_{x_۱}*\underbrace{\square\square}_{x_۲}**\underbrace{\square}_{x_۳}$ در نظر بگیریم، آنگاه هر جواب معادله سیاله $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵\ ,\ x_۲ \geq ۱, x_۱, x_۳ \geq ۰$ دو دسته از کلمات را مشخص خواهد کرد.

تعداد جواب‌های این معادله سیاله برابر $\binom{۶}{۲} = ۱۵$ است. بنابر این $۱۵ \times ۲ = ۳۰$ روش متفاوت برای نحوه قرار دادن *ها و □ها وجود دارد.

با توجه به جواب حاصل از این دو روش، جواب سوال برابر است با : $۳۰ \times ۳۶۰ = ۱۰۸۰۰$

<u>روش سوم :</u> می‌توانیم از اصل طرد و شمول کمک بگیریم. فرض کنیم A_{xy} مجموعه تمام کلماتی باشد که در آنها دو حرف متمایز x و y به همین ترتیب xy در کنار هم دیده می‌شود و بر روی حروف دیگر هیچ حساسیتی نداریم. اگر $x, y \in \{a,o,u\}$ آنگاه $|A_{xy}| = \frac{۱}{۲} \times ۷!$

این ۶ مجموعه، ۱۵ اشتراک دو به دو دارند که ۹ تای آنها تهی هستند. برای مثال: $A_{ao} \cap A_{oa} = A_{ao} \cap A_{uo} = A_{ao} \cap A_{au} = \phi$

۶ اشتراک دیگر، به دلیل تقارن، همعدد هستند. برای مثال $|A_{ao} \cap A_{ou}| = |A_{ao} \cap A_{ua}| = \frac{۱}{۲} \times ۶!$

اشتراک سه به سه این مجموعه‌ها هم همگی تهی هستند. بنابر این، تعداد کلمه‌هایی که حداقل ۲ حرف صدادار مجاور هم باشند برابر است با :

$$۶ \times \frac{۱}{۲} \times ۷! - ۶ \times \frac{۱}{۲} \times ۶! = ۱۸ \times ۶!$$

اکنون تعداد کلمه‌هایی را پیدا می‌کنیم که هر سه حرف صدادار مجاور یکدیگر باشند. برای مثال داریم $|A_{aou}| = \frac{۱}{۲} \times ۶!$ و چون تعداد این مجموعه‌ها ۶ تا است، تعداد کل کلمه‌های مورد نظر برابر است با $۶ \times \frac{۱}{۲} \times ۶! = ۳ \times ۶!$.

جواب سوال برابر است با : $۱۸ \times ۶! - ۳ \times ۶! = ۱۵ \times ۶! = ۱۰۸۰۰$

پاسخ سوال۸ : فرض می‌کنیم که مکعب در یک هشتم اول دستگاه مختصات ۳-بُعدی قرار دارد و سه وجه آن بر سه صفحه مختصات واقع هستند. به دلیل تقارن فقط یک حالت برای این کار وجود دارد.

در مورد مکعب مستطیل می‌دانیم وجه‌های آن باید موازی صفحه‌های مختصات باشند. برای این اتفاق $۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$ حالت متفاوت وجود دارد.

به دلیل متقارن بودن مکعب بزرگ، این ۶ حالت کاملا مشابه هم خواهند بود. جواب را در یکی از حالت‌ها پیدا کرده و در ۶ ضرب خواهیم کرد.

فرض می‌کنیم در ابتدا یک راس مکعب مستطیل در مبدا مختصات و راس دیگر آن، مثلا M، در نقطه $(۳,۲,۱)$ باشد. اگر مکعب مستطیل فقط در جهت محورهای مختصات جابجا شود،آنگاه تعداد نقطه‌هایی که M می‌تواند بر آنها منطبق شود جواب سوال است.

اگر یک نقطه مناسب را به صورت (a,b,c) در نظر بگیریم آنگاه $a \in \{۳,۴,۵\}$، $b \in \{۲,۳,۴,۵\}$ و $c \in \{۱,۲,۳,۴,۵\}$. یعنی برای a و b و c به ترتیب، ۳ و۴ و ۵ انتخاب داریم و چون مستقل هستند، تعداد کل حالت‌ها برابر است با : $۳ \times ۴ \times ۵ = ۶۰$

اکنون با توجه به وجود ۶ حالت برای جهت قرار گرفتن مکعب مستطیل، جواب سوال عبارت است از : $۶۰ \times ۶ = ۳۶۰$

پاسخ سوال۹ : از معادله سیاله استفاده می‌کنیم.

روش اول : از ۳۱ روز ماه تیر، این آتش‌نشان ۱۵ روز در حالت آماده باش است. بنابر این باید ۱۶ روز باقیمانده ماه را بطور مناسب برنامه ریزی کند. فرض می‌کنیم x_1 تعداد روزهای اول ماه و قبل از اولین شیفت باشد. x_2 تعداد روزهای بین شیفت اول و شیفت دوم باشد. x_3 تعداد روزهای بین شیفت دوم و شیفت سوم باشد. x_4 تعداد روزهای بعد از شیفت سوم تا آخر ماه باشد.

در این صورت معادله سیاله $x_1+x_2+x_3+x_4=16\ ;\ x_1,x_4\geq 0, x_2,x_3\geq 3$ ساخته می‌شود که تعداد جواب‌های آن، جواب سوال خواهد بود. با تغییر متغیرهای $x_2=x'_2+3$ و $x_3=x'_3+3$ به معادله سیاله $x_1+x'_2+x'_3+x_4=10\ ;\ x_1,x'_2,x',x_4\geq 0$ می‌رسیم.

تعداد جواب‌های این معادله سیاله برابر $286=\binom{13}{3}$ و جواب سوال است.

روش دوم : چون فاصله بین شیفت‌ها باید حداقل ۳ روز باشد، می‌توانیم مجهول‌های معادله سیاله را به این صورت تعریف کنیم:

x_1 تعداد روزهای اول ماه و قبل از اولین شیفت باشد. x_2 تعداد روزهای بین شیفت اول و شیفت دوم (غیر از ۳ روز اجباری) باشد. x_3 تعداد روزهای بین شیفت دوم و شیفت سوم (غیر از ۳ روز اجباری) باشد. x_4 تعداد روزهای بعد از شیفت سوم تا آخر ماه باشد.

در این حالت با معادله سیاله $x_1+x_2+x_3+x_4=10\ ;\ x_1,x_2,x,x_4\geq 0$ برخورد می‌کردیم و به جواب $\binom{13}{3}=286$ می‌رسیدیم.

پاسخ سوال۱۰ : باید تعداد جواب‌های معادله سیاله $3x_1+3x_2+3x_3+3x_4+3x_5+5x_6=43\ ;\ x_i\geq 0$ را پیدا کنیم.

x_6 تعداد ساندویچ‌های ۵ هزار تومانی و x_1 تا x_5 تعداد ساندویچ‌های از ۵ نوع ساندویچ ۳ هزار تومانی را نشان می‌دهند.

روش اول : از توابع مولد استفاده می‌کنیم. تابع مولد برای ساندویچ‌های ۳ هزار تومانی $A(x)=1+x^3+x^6+x^9+\cdots$ و تابع مولد برای ساندویچ‌های ۵ هزار تومانی $B(x)=1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots$ است.

تابع مولد کل عبارت است از : $F(x)=(A(x))^5B(x)$

در بسط این تابع مولد، باید ضریب عددی جمله شامل x^{43} را مشخص کنیم.

می‌دانیم که : $$(1+t+t^2+t^3+\cdots)^n=\binom{n-1}{0}+\binom{n}{1}t+\binom{n+1}{2}t^2+\binom{n+2}{3}t^3+\binom{n+3}{4}t^4+\cdots$$

بنابر این : $$(A(x))^5=\binom{4}{0}+\binom{5}{1}x^3+\binom{6}{2}x^6+\binom{7}{3}x^9+\cdots+\binom{k+4}{k}x^{3k}+\cdots$$

اکنون با استفاده از فرمول ضریب یک جمله در حاصلضرب چندجمله‌ای‌ها، جواب سوال برابر است با :

$$\binom{5}{1}+\binom{10}{6}+\binom{15}{11}=5+210+1365=1580$$

روش دوم : می‌توانیم با تغییر متغیر $y=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ معادله سیاله را به صورت $3y+5x=43$ بنویسیم.

تعداد جواب‌های این معادله سیاله برابر ۳ است و جواب‌های آن عبارتند از : $(y,x_6)=(1,8),(6,5),(11,2)$

اکنون برای پیدا کردن تعداد حالت‌های x_1 تا x_5، مشاهده می‌کنیم که سه معادله سیاله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1$ دارای $5=\binom{5}{1}$، $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=6$ دارای $210=\binom{10}{6}$ و $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$ دارای $1365=\binom{15}{11}$ هستند و جواب سوال برابر $1580=\binom{15}{11}+\binom{10}{6}+\binom{5}{1}$ خواهد بود.