نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۰/۱۰/۱۹**

وقت : **۹۰** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم درس : **معادلات دیفرانسیل** (۱۰ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۴۰۱**- ۱۴۰۰

توجه :

پاسخ‌ها را توسط نرم‌افزاری مانند Camscanner به صورت یک فایل PDF با حجم مناسب در آورده و از طریق سامانه LMS ارسال نمایید.

ارسال فایل‌ها را به دقایق آخر موکول نکنید چون سامانه راس ساعت بسته خواهد شد.

سوال ۱- یک جواب معادله دیفرانسیل زیر را به صورت سری حول نقطه $x_۰ = ۰$ بدست آورید. دنباله بازگشتی ضرایب و چند جمله اولیه جواب باید نوشته شوند. **۲۰ نمره**

$$۳x^۲ y'' + ۷ x y' + (۵x - ۴) y = ۰$$

سوال ۲- تبدیل معکوس لاپلاس تابع زیر را بیابید. **۲۰ نمره**

$$F(s) = \ln\left(\frac{s^۲ - ۲۵}{s^۲ + ۱۶}\right)$$

سوال ۳- معادله دیفرانسیل زیر را با شرایط اولیه $y(۰) = y'(۰) = ۰$ و با روش تبدیل لاپلاس حل کنید. **۲۰ نمره**

$$y''(t) - ۳۶ y(t) = \begin{cases} ۵ & ۰ \le t < ۵ \\ ۰ & ۵ \le t \end{cases}$$

سوال ۴- یک جواب برای معادله با مقدار اولیه زیر با روش تبدیل لاپلاس بدست آورید. **۲۰ نمره**

$$\int_۰^t y'(u) y(t-u)\, du = ۴۹ t^۶ \quad , \quad y(۰) = ۰$$

موفق باشید

سیدرضا موسوی
۱۴۰۰/۱۰/۱۹

سوال ۱ - اگر معادله را به صورت استاندارد بنویسیم خواهیم داشت : $y''+\frac{7}{3x}y'+\frac{5x-4}{3x^2}y=0$

داریم $p(x)=\frac{7}{3x}$ و $q(x)=\frac{5x-4}{3x^2}$ و بنابر این نقطه $x_0=0$ یک نقطه غیر عادی معادله است.

اما چون مقدارهای $p_0=\lim_{x\to 0}x\times\frac{7}{3x}=\frac{7}{3}$ و $q_0=\lim_{x\to 0}x^2\times\frac{5x-4}{3x^2}=\frac{-4}{3}$ موجود هستند، نقطه $x_0=0$ یک نقطه غیر عادی منظم معادله است و این معادله یک جواب به صورت سری فروبنیوس $a_0\neq 0$, $y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ دارد.

این جواب را در معادله قرار می‌دهیم.

$$3x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}+7x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}+(5x-4)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}7(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}5a_nx^{n+r+1}-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}7(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}5a_{n-1}x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^{n+r}=0$$

$$[3(r(r-1)+7r-4]a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[([3(n+r)(n+r-1)+7(n+r)-4]a_n+5a_{n-1})]x^{n+r}=0$$

$$(3r^2+4r-4)a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[\left([3(n+r)^2+4(n+r)-4]a_n+5a_{n-1}\right)]x^{n+r}=0$$

اکنون باید داشته باشیم $3r^2+4r-4=0$ و

$$[3(n+r)^2+4(n+r)-4]a_n+5a_{n-1}=0\quad,\ n=1,2,3,\cdots$$

معادله مشخصه دارای دو ریشه $r_1=\frac{2}{3}$ و $r_2=-2$ است و رابطه بازگشتی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$a_n=\frac{-5}{(n+r+2)(3n+3r-2)}a_{n-1}\quad,\ n=1,2,3,\cdots$$

اگر $r=r_1=\frac{2}{3}$ آنگاه $n=1,2,3,\cdots$, $a_n=\frac{-5}{n(3n+8)}a_{n-1}$ و یک جواب معادله به صورت زیر است.

$$a_1=\frac{-5}{11}a_0\ ,\ a_2=\frac{-5}{2\times 14}a_1=\frac{25}{308}a_0\ ,\ a_3=\frac{-5}{3\times 17}a_2=\frac{-125}{15708}a_0\ ,\ \cdots$$

$$y_1=a_0x^{\frac{2}{3}}(1-\frac{5}{11}x+\frac{25}{308}x^2-\frac{125}{15708}x^3+\cdots)$$

اگر $r=r_2=-2$ آنگاه $n=1,2,3,\cdots$, $a_n=\frac{-5}{n(3n-8)}a_{n-1}$ و جواب دیگر معادله به صورت زیر است.

$$a_1=a_0\ ,\ a_2=\frac{5}{4}a_1=\frac{5}{4}a_0\ ,\ a_3=\frac{-5}{3}a_2=\frac{-25}{12}a_0\ ,\ a_4=\frac{-5}{16}a_3=\frac{125}{192}a_0\ ,\ \cdots$$

$$y_2=a_0x^{-2}(1+x+\frac{5}{4}x^2-\frac{25}{12}x^3+\frac{125}{192}x^4+\cdots)$$

سوال ۲ – می‌نویسیم $F(s)=\ln(s^2-25)-\ln(s^2+16)$ و از دو طرف تساوی مشتق می‌گیریم.

$$F'(s)=\frac{2s}{s^2-25}-\frac{2s}{s^2+16}=L\{2(\cosh 5t-\cos 4t)\}$$

$$\rightarrow\ F(s)=L\{\frac{-2}{t}(\cosh 5t-\cos 4t)\}\ \rightarrow\ L^{-1}\{F(s)\}=\frac{-2}{t}(\cosh 5t-\cos 4t)$$

سوال ۳ – تابع دو ضابطه‌ای را به کمک توابع پله‌ای واحد بازنویسی می‌کنیم : $y''(t)-36y(t)=5(1-u_5(t))$

اکنون تبدیل لاپلاس دو طرف تساوی را محاسبه می‌کنیم : $L\{y''(t)-36y(t)\}=L\{5(1-u_a(t))\}$

داریم :

$$S^2L\{y\}-36L\{y\}=\frac{5}{s}(1-e^{-5s})\quad\rightarrow\quad L\{y\}=\frac{5}{s(s^2-36)}(1-e^{-5s})$$

$$\rightarrow\ L\{y\}=\frac{5}{72}(\frac{1}{s-6}+\frac{1}{s+6}-\frac{2}{s})(1-e^{-5s})\rightarrow\ L\{y\}=\frac{5}{72}L\{e^{6t}+e^{-6t}-2)(1-e^{-5s})$$

$$\rightarrow\ y(t)=\frac{5}{36}[(\cosh 6t-1)-u_5(t)(\cosh 6(t-5)-1)]$$

$$\rightarrow\ y(t)=\begin{cases}\frac{5}{36}(\cosh 6t-1) & t<5\\ \frac{5}{36}(\cosh 6t-\cosh 6(t-5)) & 5\le t\end{cases}$$

سوال ۴ – از فرمول تبدیل لاپلاس انتگرال تلفیقی استفاده می‌کنیم.

$$L\{\int_0^t y'(u)y(t-u)\,du\}=L\{49\,t^6\}\ \rightarrow\ L\{y'\}L\{y\}=\frac{49\times 6!}{s^7}\ \rightarrow\ sL^2\{y\}=\frac{49\times 6!}{s^7}$$

$$\rightarrow\ L^2\{y\}=\frac{49\times 6!}{s^8}\ \rightarrow\ L\{y\}=\pm\frac{7\sqrt{6!}}{s^4}\ \rightarrow\ y=\pm\frac{7\sqrt{6!}}{3!}t^3\ \rightarrow\ y(t)=\pm 14\sqrt{5}\,t^3$$