نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : ۱۴۰۰/۱۰/۱۸

وقت : ۹۰ دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم درس : **ریاضی۱**–فنی (۲۰ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) ۱۴۰۱ - ۱۴۰۰

توجه :

پاسخ‌ها را توسط نرم‌افزاری مانند Camscanner به صورت یک فایل PDF با حجم مناسب در آورده و از طریق سامانه LMS ارسال نمایید.

ارسال فایل‌ها را به دقایق آخر موکول نکنید چون سامانه راس ساعت بسته خواهد شد.

سوال ۱- انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید.

$$I_1 = \int x^2 \sqrt{25 - x^2}\, dt$$ **۱۰ نمره**

$$I_2 = \int \frac{dx}{x(8 + \sqrt[5]{x})}$$ **۱۰ نمره**

سوال ۲- مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = \sqrt[4]{x} \ln x$، محور xها و خط $x = e$ را بدست آورید. **۱۰ نمره**

سوال ۳- ناحیه محدود بین سهمی $y^2 = 3x$ و خط $y = x$، حول خط $x = 3$ دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را بدست آورید. **۱۵ نمره**

سوال ۴- شعاع و بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(9x+2)^n}{6^n}$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال ۵- چهار جمله اول بسط مک لورن تابع $f(x) = (1 + 4x^3)\ln(1 - 3x)$ را محاسبه کنید. **۱۰ نمره**

سوال ۶- حد مقابل را محاسبه کنید :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_{7x}^{x} e^{t^2} dt}{\sin 3t}$$ **۱۰ نمره**

موفق باشید

جواب سوال ۱- برای محاسبه I_1 از تغییر متغیر $x=5\sin t \to dx=5\cos t$ استفاده می‌کنیم.

$$I_1=\int 25\sin^2 t\sqrt{25-25\sin^2 t}\,(5\cos t)dt \to I_1=625\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$I_1=625\int \frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt=\frac{625}{8}\int (1-\cos 4t)dt=\frac{625}{8}(t-\frac{1}{4}\sin 4t)+c$$

$$I_1=\frac{625}{8}(t-\sin t\cos t(1-2\sin^2 t))+c=\frac{1}{8}[625\,\mathrm{Arcsin}\frac{x}{5}-x(25-2x^2)\sqrt{25-x^2}]$$

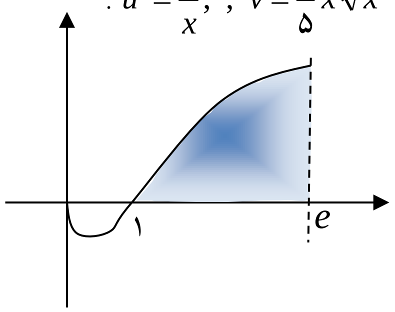
برای محاسبه I_2 از تغییر متغیر $dx=5t^4dt \quad \to \quad x=t^5$ استفاده می‌کنیم.

$$I_2=\int\frac{5t^4dt}{t^5(8+\sqrt[5]{t^5})}=5\int\frac{dt}{t(8+t)}=\frac{5}{8}\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{8+t})dt=\frac{5}{8}(\ln t-\ln(8+t))+c$$

$$I_2=\frac{5}{8}\ln\frac{t}{8+t}+c=\frac{5}{8}\ln\frac{\sqrt[5]{x}}{8+\sqrt[5]{x}}+c$$

جواب سوال ۲- با توجه به شکل، باید انتگرال معین $S=\int_1^e \sqrt[4]{x}\ln x\,dx$ را محاسبه کنیم.

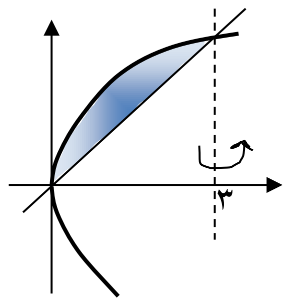
برای استفاده از روش انتگرالگیری جزء به جزء قرار می دهیم $u=\ln x \ , \ v'=\sqrt[4]{x}$ و داریم $u'=\frac{1}{x}\ , \ , \ v=\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}$.



$$S=\int_1^e\sqrt[4]{x}\ln x dx=\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}\ln x|_1^e-\frac{4}{5}\int_1^e\sqrt[4]{x}dx=\frac{4}{5}e\sqrt[4]{e}-(\frac{4}{5})^2x\sqrt[4]{x}|_1^e$$

$$S=\frac{4}{5}e\sqrt[4]{e}-(\frac{4}{5})^2e\sqrt[4]{e}+(\frac{4}{5})^2=\frac{4}{25}(e\sqrt[4]{e}+4)$$

جواب سوال ۳- با توجه به شکل، باید یکی از انتگرال‌های زیر را حل کنیم.



$$V=\pi\int_0^3[(3-\frac{1}{3}y^2)^2-(3-y)^2]dy$$ (روش قرص مستدیر)

$$V=2\pi\int_0^3(3-x)(\sqrt{3x}-x)dx$$ (روش پوسته استوانه‌ای)

$$V=\pi\int_0^3[(3-\frac{1}{3}y^2)^2-(3-y)^2]dy=\pi\int_0^3(\frac{1}{9}y^4-3y^2+6y)dy$$

$$V=\pi[\frac{1}{45}y^5-y^3+3y^2]_0^3=\pi[\frac{27}{5}-27+27]$$

$$V=\frac{27\pi}{5}$$

$$V=2\pi\int_0^3(3-x)(\sqrt{3x}-x)dx=2\pi\int_0^3(3\sqrt{3}\sqrt{x}-3x-\sqrt{3}x\sqrt{x}+x^2)dx$$

$$V=2\pi[2\sqrt{3}x\sqrt{x}-\frac{3}{2}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{3}x^3]_0^3=2\pi[18-\frac{27}{2}-\frac{54}{5}+9]=2\pi\times\frac{27}{10}$$

$$V=\frac{27\pi}{5}$$

جواب سوال ۴- برای استفاده از فرمول‌ها، سری را به صورت استاندارد می‌نویسیم. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(n+1)}{2^n}(x-(-\frac{2}{9}))^n$

مرکز سری نقطه $x_0=\frac{-2}{9}$ و ضریب عددی جمله عمومی $a_n=\frac{3^n(n+1)}{2^n}$ است. پس شعاع همگرایی برابر است با :

$$R=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3^n(n+1)}{2^n}\div\frac{3^{n+1}(n+2)}{2^{n+1}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2\,(n+1)}{3\,(n+2)}=\frac{2}{3}$$

این سری توانی در بازه $(\frac{-2}{9}-\frac{2}{3}\,,\,\frac{-2}{9}+\frac{2}{3})=(\frac{-8}{9},\frac{4}{9})$ همگرا است. کران‌های این بازه را بطور جداگانه بررسی می‌کنیم. اگر $x=\frac{-8}{9}$ آنگاه سری توانی به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ در می‌آید که واگراست.

اگر $x=\frac{4}{9}$ آنگاه سری توانی به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$ در می‌آید که واگراست.

در نتیجه، بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(9x+2)^n}{6^n}$ عبارت است از : $(\frac{-8}{9},\frac{4}{9})$

جواب سوال ۵- ابتدا بسط مک لورن تابع $g(x)=\ln(1-3x)$ را می‌نویسیم.

$$g'(x)=\frac{-3}{1-3x}\ ,\ g''(x)=\frac{-9}{(1-3x)^2}\ ,\ g^{(3)}(x)=\frac{-54}{(1-3x)^3}\ ,\ g^{(4)}(x)=\frac{-486}{(1-3x)^4}$$

$$g(0)=0\ ,\ g'(0)=-3\ ,\ g''(x)=-9\ ,\ g^{(3)}(x)=-54\ ,\ g^{(4)}(x)=-486\ ,\ g^{(5)}(x)=-5832$$

بنابر این، سری مک لورن تابع $g(x)=\ln(1-3x)$ حول $a=0$ عبارت است از :

$$g(x)=\ln(1-3x)=-(3x+9x^2+9x^3+\frac{81}{4}x^4+\frac{243}{5}x^5+\cdots)$$

اکنون می‌توانیم سری مک لورن تابع f را بنویسیم.

$$f(x)=(1+4x^3)\ln(1-3x)=-(1+4x^3)(3x+\frac{9}{2}x^2+9x^3+\frac{81}{4}x^4+\frac{243}{5}x^5+\cdots)$$

$$=-(3x+\frac{9}{2}x^2+9x^3+\frac{129}{4}x^4+\frac{333}{5}x^5+\cdots)$$

جواب سوال ۶- چون $\lim_{n\to 0}\int_{7x}^{x}e^{t^2}dt=0$ و $\lim_{n\to 0}\sin bt=0$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رسیده‌ایم.

می‌توانیم از قاعده هوپیتال استفاده کنیم.

$$\lim_{n\to 0}\frac{d}{dx}(\int_{7x}^{x}e^{t^2}dt)=\lim_{n\to 0}(e^{x^2}-7e^{49x^2})=-6\quad ,\quad \lim_{n\to 0}\frac{d}{dx}(\sin 3x)=\lim_{n\to 0}3\cos 3x=3$$

اکنون داریم $\lim_{n\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\int_{7x}^{x}e^{t^2}dt)}{\frac{d}{dx}(\sin 3x)}=\frac{-6}{3}=-2$ و طبق قاعده هوپیتال خواهیم داشت : $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{7x}^{x}e^{t^2}dt}{\sin 3t}=-2$