نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۰/۰۹/۱۸**

وقت : **۹۰** دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم دوم درس : **ریاضی ۱-فنی** (۲۰ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / ~~دوم~~) **۱۴۰۱-** ۱۴۰۰

توجه :

پاسخ‌ها را توسط نرم‌افزاری مانند Camscanner به صورت یک فایل PDF با حجم مناسب در آورده
و از طریق سامانه LMS ارسال نمایید.
ارسال فایل‌ها را به دقیقه‌های آخر موکول نکنید چون سامانه راس ساعت بسته خواهد شد.

سوال ۱- مقدار p را طوری بیابید که تابع زیر در $x=۰$ پیوسته باشد: ۱۰ نمره

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+۲۵}-۵}{\sqrt[۳]{x+۲۷}-۳} & x>۰\\[2ex] \dfrac{x+p}{x+۱} & x\leq ۰\end{cases}$$

سوال ۲- در ضابطه $xy^{۵}=\arctan(\frac{۴x}{y})$، مشتق تابع y نسبت به x را به دست آورید. ۱۰ نمره

سوال ۳- نقطه‌ای روی منحنی $x=y^{۲}+۱$ بیابید به طوری که کمترین فاصله را تا نقطه $M=(۶,۰)$ داشته باشد. ۱۵ نمره

سوال ۴- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{(x-۳)^{۲}}{۴-x^{۲}}$ را رسم کنید. ۱۵ نمره

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان میان‌ترم دوم درس ریاضی ۱-فنی (۲۰ گروه هماهنگ)

نیمسال اول ۱۴۰۱-۱۴۰۰

دانشکده علوم ریاضی
۱۴۰۰/۰۹/۱۸
سیدرضا موسوی

پاسخ سوال۱ : برای اینکه تابع در $x=0$ پیوسته باشد باید داشته باشیم : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

مقدار تابع در $x=0$ و حد چپ آن به راحتی محاسبه می‌شوند و داریم : $f(0)=p$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x+p}{x+1} = p$

اما برای محاسبه حد راست به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم و می‌توانیم از قاعده هوپیتال استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+25}-5}{\sqrt[3]{x+27}-3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+23}}}{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+27)^2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\sqrt[3]{(x+27)^2}}{2\sqrt{x+25}} = \frac{3\times 3^2}{2\times 5} = \frac{27}{10}$$

یعنی برای اینکه تابع f در $x=0$ پیوسته باشد باید قرار دهیم : $p=\dfrac{27}{10}$

پاسخ سوال۲ : ابتدا ضابطه را به صورت $xy^5 - \arctan(\frac{4x}{y}) = 0$ می‌نویسیم. با استفاده فرمول مشتق ضمنی داریم :

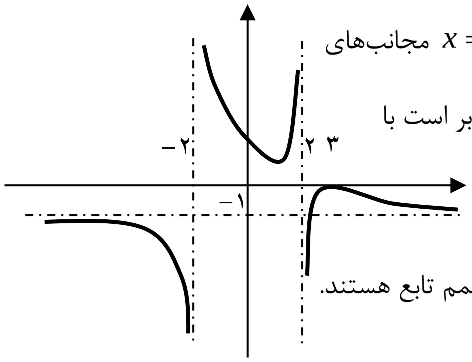
$$y' = -\frac{y^5 - \dfrac{4}{y}\times\dfrac{1}{1+(16x^2/y^2)}}{5xy^4 + \dfrac{4x}{y^2}\times\dfrac{1}{1+(16x^2/y^2)}} = -\frac{y^5 - \dfrac{4y}{y^2+16x^2}}{5xy^4 + \dfrac{4x}{y^2+16x^2}} = -\frac{y^5(y^2+16x^2)-4y}{5xy^4(y^2+16x^2)+4x}$$

اگر ضابطه را به صورت $y\tan(xy^5)-4x=0$ می‌نوشتیم آنگاه :
$$y' = -\frac{y^6(1+\tan^2(xy^5))-4}{\tan(xy^5)+5xy^5(1+\tan^2(xy^5))}$$

پاسخ سوال۳ : اگر نقطه A نقطه مورد نظر باشد و فرض کنیم $y_A=t$ آنگاه داریم $x_A=t^2+1$. فاصله نقطه M تا نقطه A برابر است با $AM=\sqrt{(t^2+1-6)^2+t^2}=\sqrt{(t^2-5)^2+t^2}$. برای پیدا کردن کمترین فاصله بین این دو نقطه، کافی است که مینیمم تابع $f(t)=(t^2-5)^2+t^2$ را بیابیم. داریم $f'(t)=4t(t^2-5)+2t=2t(2t^2-9)$ و اگر $f'(t)=0$ آنگاه سه ریشه $t_1=0$ ، $t_2=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ و $t_3=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ برای مشتق به دست می‌آید. سه نقطه پیشنهادی مشتق برای کمترین و بیشترین فاصله عبارتند از :

$$A_1=(1,0) \quad , \quad A_2=(\frac{11}{2},\frac{3}{\sqrt{2}}) \quad , \quad A_3=(\frac{11}{2},-\frac{3}{\sqrt{2}})$$

این نقطه‌ها، احتمالا نقاط ماکزیمم یا مینیمم نسبی تابع هستند. چون ما مینیمم مطلق را لازم داریم، با محاسبه فاصله این سه نقطه از نقطه M داریم $A_1M=5$ و $A_2M=A_3M=\dfrac{\sqrt{19}}{2}\cong 2/2$. پس دو نقطه A_2 و A_3 جواب‌های مساله هستند.



پاسخ سوال۴ : دامنه این تابع برابر است با : $D_f=\mathbf{R}-\{-2,2\}$. دو خط $x=2$ و $x=-2$ مجانب‌های قائم منحنی هستند و خط $y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x-3)^2}{4-x^2}=-1$ مجانب افقی آن است. مشتق تابع برابر است با

$f'(x)=\dfrac{2(x-3)(4-3x)}{(4-x^2)^2}$ و اگر $f'(x)=0$ آنگاه دو ریشه $x_1=3$ و $x=\dfrac{4}{3}$

به دست می‌آید و دو نقطه $A_1=(3,0)$ و $A_2=(\frac{4}{3},\frac{5}{4})$ دو کاندیدا برای ماکزیمم یا مینیمم تابع هستند.

اکنون جدول تغییرات تابع را کامل کرده و به کمک آن منحنی تابع را رسم می‌کنیم.

x	$-\infty$ $\quad$ -2	$\frac{4}{3}$	2 $\quad$ 3 $\quad$ ∞
y'	$-$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
y	-1 ↘ $-\infty$	∞ ↘ $\frac{5}{4}$ ↗ ∞	$-\infty$ ↗ 0 ↘ -1