نام و نام خانوادگی : . . . .

شماره دانشجویی : . . . .

نام مدرس : . . . .

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۰/۰۸/۶**

وقت : **۹۰** دقیقه

امتحان میان‌ترم اول درس : **معادلات دیفرانسیل** (۱۰ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / **~~دوم~~**) **۱۴۰۱**- ۱۴۰۰

توجه :

پاسخ‌ها را توسط نرم‌افزاری مانند Camscanner به صورت یک فایل PDF با حجم مناسب در آورده و از طریق سامانه LMS ارسال نمایید.

ارسال فایل‌ها را به دقیقه‌های آخر موکول نکنید چون سامانه راس ساعت بسته خواهد شد.

سوال ۱- معادله دیفرانسیل متناظر با دسته منحنی $y^2 = c_1 \ln(2x) + c_2 x$ را بیابید. **۱۲/۵ نمره**

سوال ۲- معادله دیفرانسیل $(x-4y+11)dx+(4x+y+10)dy=0$ را حل کنید. **۱۲/۵ نمره**

سوال ۳- جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول $(\sin y \cot x - 5\cos x)dx + \cos y dy = 0$ را بیابید. **۱۲/۵ نمره**

سوال ۴- معادله دیفرانسیل $yy'' - 5(y')^2 = y'y^9$ را با شرایط اولیه $y(0)=1\,,\ y'(0)=\frac{1}{4}$ حل کنید. **۱۲/۵ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : طرفین رابطه را بر x تقسیم کرده و سپس از دو طرف مشتق می‌گیریم.

$$\frac{y^2}{x}=\frac{c_1\ln(2x)}{x}+c_2 \;\rightarrow\; \frac{2yy'}{x}-\frac{y^2}{x^2}=c_1\left(\frac{1-\ln(2x)}{x^2}\right)$$

طرفین را در x^2 ضرب کرده و مجددا از دو طرف رابطه مشتق می‌گیریم.

$$2xyy'-y^2=c_1(1-\ln(2x)) \;\rightarrow\; 2yy'+2x(y')^2+2xyy''-2yy'=\frac{-c_1}{x}$$

برای حذف کردن c_1، طرفین دو رابطه آخر را بر هم تقسیم کرده و سپس عبارت را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم.

$$\frac{2xyy'-y^2}{2x(y')^2+2xyy''}=-x(1-\ln(2x)) \;\rightarrow\; 2x^2(1-\ln(2x))(y'^2+yy'')+2xyy'-y^2=0$$

پاسخ سوال۲ : معادله را به صورت $\frac{dy}{dx}=\frac{-x+4y-11}{4x+y+10}$ می نویسیم.

با تغییر متغیر $x=X+m$ و $y=Y+n$ داریم $\frac{dY}{dX}=\frac{4Y-X+(-m+4n-11)}{4X+Y+(4m+n+10)}$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}-m+4n-11=0\\4m+n+10=0\end{cases}$ داریم $\begin{cases}m=-3\\n=2\end{cases}$ و به معادله همگن $\frac{dY}{dX}=\frac{4Y-X}{4X+Y}$ می رسیم. با تغییر

$Y=Xu$ خواهیم داشت $u+X\frac{du}{dX}=\frac{4u-1}{4+u}$ که یک معادله جدایی پذیر است. $\frac{du}{dX}=\frac{-1-u^2}{4+u}$ و $\frac{4+u}{1+u^2}du=-\frac{dX}{X}$.

از دو طرف معادله انتگرال می گیریم : $4\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\ln X+c \rightarrow 8\arctan\frac{Y}{X}+\ln(1+(\frac{Y}{X})^2)+2\ln X=c_0$

عبارت‌ها را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم : $8\arctan\frac{Y}{X}+\ln(X^2+Y^2)=c_0$

با توجه به اولین تغییر متغیر، جواب نهایی معادله عبارت است از: $8\arctan\frac{y-2}{x+3}+\ln((x+3)^2+(y-2)^2)=c_0$

پاسخ سوال۳ : روش اول: این معادله عامل انتگرالساز یک متغیره بر حسب x دارد. قرار می دهیم

$M=\sin y\cot x-5\cos x\,,\ N=\cos y$ و داریم $M_y=\cos y\cot x\,,\ N_x=0$ و کسر $\frac{M_y-N_x}{N}=\cot x$ مستقل از y است.

پس تابع $\mu=e^{\int\cot x dx}=\sin x$ یک عامل انتگرالساز معادله است. طرفین معادله را در $\mu=\sin x$ ضرب می کنیم.

$$(\sin y\cos x-5\sin x\cos x)dx+\sin x\cos y dy=0$$

به یک معادله کامل رسیده ایم . $f(x,y)=\int(\sin y\cos x-\frac{5}{2}\sin 2x)dx=\sin x\sin y+\frac{5}{4}\cos 2x+h(y)$

چون $f_y=N$ پس $h(y)=0$ و $4\sin x\sin y+5\cos 2x=c$ جواب نهایی معادله است.

روش دوم : اگر تغییر متغیر $u=\sin y$ را اعمال کنیم داریم $(u\cot x-5\cos x)dx+du=0$ که یک معادله خطی مرتبه اول است زیرا

$u'+(\cot x)u=5\cos x$ و طبق فرمول داریم : $u=e^{-\int\cot x dx}(c+5\int\cos x e^{\int\cot x dx}dx)$

$$\sin y=u=e^{-\ln\sin x}(c+5\int\cos x e^{\ln\sin x}dx)=\frac{1}{\sin x}(c+5\int\sin x\cos x dx)=\frac{c}{\sin x}-\frac{5\cos 2x}{4\sin x}$$

جواب نهایی معادله عبارت است از : $4\sin x\sin y+5\cos 2x=c$

پاسخ سوال۴ : این معادله، یک معادله فاقد x است. تغییر متغیر $y'=u$ و $y''=u\frac{du}{dy}$ را اعمال می کنیم : $yu\frac{du}{dy}-5u^{2}=uy^{9}$

اگر $u=0$ آنگاه $y=c_{0}$ یعنی معادله بی‌نهایت جواب به صورت خط‌های افقی دارد.

اگر $u\neq 0$ آنگاه طرفین معادله را بر yu تقسیم می‌کنیم. $\frac{du}{dy}-\frac{5}{y}u=y^{8}$

این معادله یک معادله خطی مرتبه اول است و داریم : $u=e^{-\int\frac{-5}{y}dy}\left(c+\int y^{8}e^{\int\frac{-5}{y}dy}dy\right)$

$$u=y^{5}\left(c+\int y^{8}y^{-5}dy\right)=y^{5}\left(c+\int y^{3}dy\right)=y^{5}\left(c+\frac{1}{4}y^{4}\right)$$

تا اینجا داریم $y'=y^{5}\left(c+\frac{1}{4}y^{4}\right)$. اکنون به کمک شرایط اولیه مساله یعنی $y(0)=1$ و $y'(0)=\frac{1}{4}$ خواهیم داشت $\frac{1}{4}=c+\frac{1}{4}$ که نتیجه می دهد $c=0$ و داریم $y'=\frac{1}{4}y^{9}$ که یک معادله جدایی پذیر است. $\frac{1}{y^{9}}dy=\frac{1}{4}dx$ با انتگرالگیری از طرفین معادله داریم

$\frac{-1}{8y^{8}}=\frac{x}{4}+c$ و با استفاده از شرط اولیه $y(0)=1$ داریم $c=\frac{-1}{8}$

جواب نهایی معادله عبارت است از : $(1-2x)y^{8}=1$

سیدرضا موسوی