دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} \xrightarrow{e^x+1=t^2}$$

$$e^x\,dx = 2t\,dt$$

$$dx = \frac{2t\,dt}{e^x} = \frac{2t\,dt}{t^2-1}$$

$$\int \frac{\frac{2t\,dt}{t^2-1}}{t} = \int \frac{2\,dt}{t^2-1} = \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$$

حاصل انتگرال مقابل را بدست آورید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx$$

کافی است با تغییر متغیر $x = \pi/2 - t$ مسئله را حل کنیم.

$$dx = -dt$$

x	t
$\frac{\pi}{2}$	0
0	$\frac{\pi}{2}$

$$\int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin^n(\pi/2 - t)}{\sin^n(\pi/2 - t) + \cos^n(\pi/2 - t)} (-dt)$$

$$= \int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t} (-dt)$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t} dt$$

پس

$$\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t} dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\sin^2 t + \cos^2 t}$$

$$۲I = \int_{۰}^{\pi/۲} \frac{\sin^n t + \cos^n t}{\sin^n t + \cos^n t}\, dt = t \Big)_{۰}^{\pi/۲} = \pi/۲$$

$$۲I = \pi/۲$$

$$\boxed{I = \pi/۴}$$

محاسبه حجم :

فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته است و R ناحیه محدود به نمودار $y=f(x)$ که $a \leq x \leq b$ و $y=0$ باشد. ناحیه R را حول $y=p$ دوران می‌دهیم، در این صورت حجم از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$V = \pi \int_a^b (f(x) - p)^2 \, dx$$

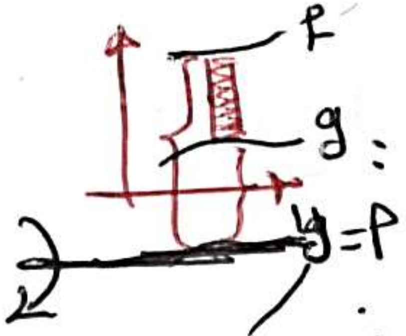
نتیجه: اگر ناحیه R را حول محور x ها ($y=0$) دوران دهیم

حجم از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) - 0\right)^2 dx$$

نتیجه: اگر ناحیه R محدود به توابع $y=f(x)$ و که $a \le x \le b$ و $y=g(x)$

و $f(x) \ge g(x)$ و ناحیه R را حول $y=p$ دوران دهیم:



$$V = \pi \int_a^b (f(x)-p)^2 - (g(x)-p)^2 \, dx$$

(روش واشر)

نتیجه: اگر R ناحیه محدود به $x=f(y)$ که $c \le y \le d$ و

ناحیه R را حول خط $x=\alpha$ دوران دهیم حجم از رابطه زیر

بدست می آید:

$$V=\pi\int_{c}^{d}(f(y)-\alpha)^2\,dy$$

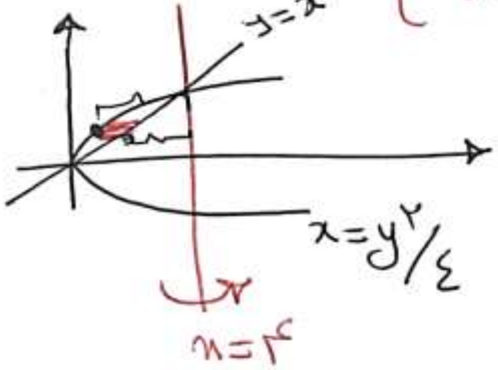
حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین $y^2=4x$ و $y=x$

حول خط $x=4$ بدست آورید.

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y=x \end{cases} \Rightarrow y^2=4y \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=4 \end{cases}$$

$$V=\pi\int_0^4 \left(\frac{y^2}{4}-4\right)^2-(y-4)^2\,dy=\cdots$$

$x=4$ حول خط $\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{y^2}{4} \\ x=y \end{cases}$



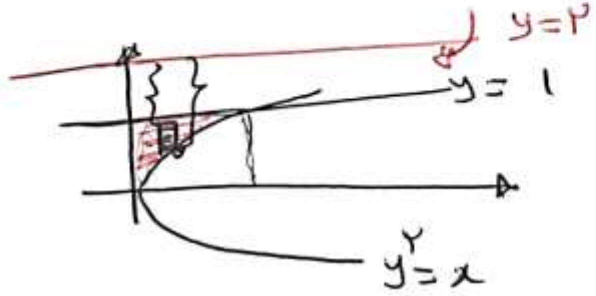
$n=2$

$y=\sqrt{x}$

مطلوب است حجم حادث از دوران ناحیه بین منحنی $x=y^2$ و محور yها و خط $y=1$ حول خط $y=2$ بدست آورید.

$$V = \pi \int_a^b (\sqrt{x}-2)^2 - (1-2)^2 \, dx$$

$= \cdots$



حجم حاصل از دوران منحنی $y = \tan^{-1} x$ و محدود به خطوط $y = 0$ و $y = \pi/4$

$x = \tan y$

که حول محور y ها دوران داده شده است را بدست آورید.

$x = 0$

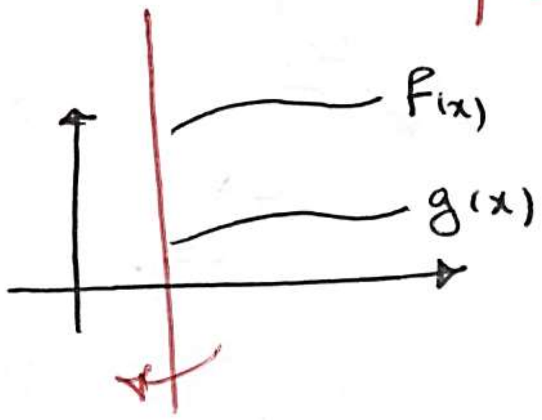
$$V = \pi \int_0^{\pi/4} (\tan y - 0)^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} (\tan^2 y + 1) - (1) \, dy$$

$$= \pi \left(\tan y - y \right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \pi \left(1 - \pi/4 \right)$$

روش پوسته استوانه ای برای حجم :



$x=\alpha$

سطح بین $y=f(x)$ و $y=g(x)$ و $x=a$, $x=b$

حول خط $\boxed{x=\alpha}$

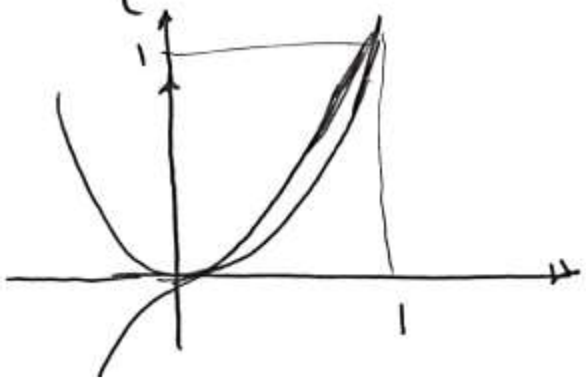
دوران می دهیم :

$$V = 2\pi \int_a^b \underbrace{\overbrace{|x-a|}} \, |f(x)-g(x)| \, dx$$

حجم محصور بین $y=x^2$ و $y=x^3$ دوران می‌کند

الف) حول محور $x=1$ ب) حول محور $y=1$

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x^3 \end{cases} \rightarrow x^2=x^3 \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y=0 \\ y=1 \end{matrix}$$

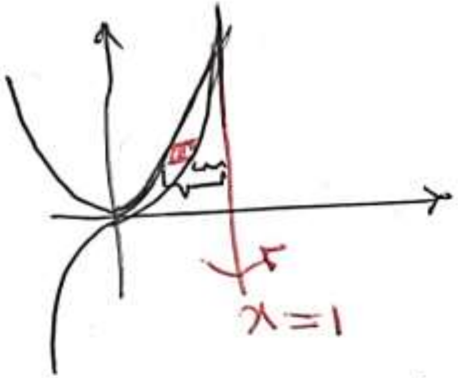


حالت اول با روش دیسک :

الف) $x=1$ خط دوران

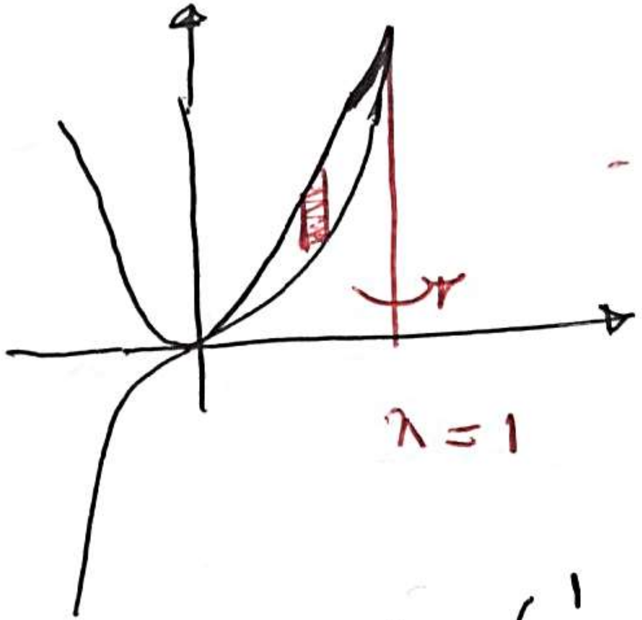
$$v = \int_0^1 (\sqrt{y}-1)^2 - (\sqrt[3]{y}-1)^2 \, dy$$

$= \cdots$



المان باید عمود بر محور دوران باشد .

روش پوسته استوانه ای (الف) محور دوران $x = 1$ است.

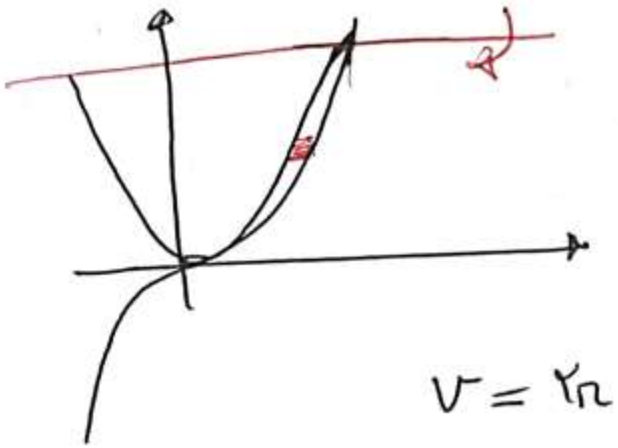


المان موازی محور دوران است.

شکل سمت چپ خط دوران است.

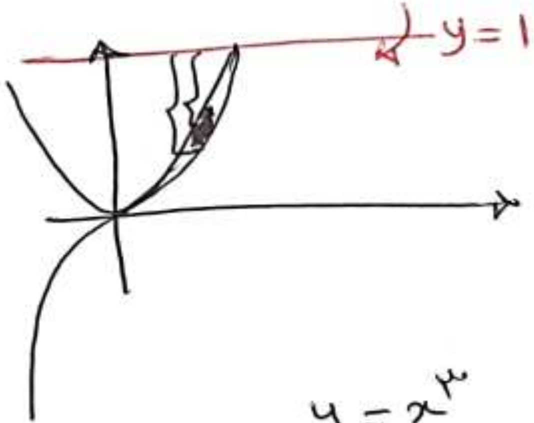
$$V = 2\pi \int_0^1 (1-x)(x^2 - x^3)\,dx$$

ب) محور دوران خط $y=1$



$$V = 2\pi \int_0^1 (1-y)(\sqrt[3]{y}-\sqrt{y})\,dy$$

$$= \frac{23\pi}{210}$$



$$V = \pi \int_0^1 (x^3-1)^2-(x^2-1)^2\,dx$$

$$= \frac{23\pi}{210}$$

دوران $y=1$

$y = x^3$
$y = x^2$

مطلوب است حجم حاصل از دوران ناحیه $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$ در بازه $[0, \pi/4]$

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sin x + \cos x} - 0\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \sin 2x} \xrightarrow[dz = \sec^2 x\, dx]{z = \tan x}$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin 2x} \xrightarrow[dz=\sec^2 x\,dx]{z=\tan x}$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{\frac{du}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\, du$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{du}{u^2+2u+1} = \pi \int_0^1 \frac{du}{(u+1)^2}$$

$$= \frac{-\pi}{u+1}\Big|_0^1 = \pi/2$$

تابع $y=e^{-x}$ در فاصله $[0, \infty)$ در نظر بگیرید.

مساحت زیر منحنی و بالای محور x ها را حساب کنید.

$$S=\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big)_{0}^{\infty} = e^{-\infty}+e^{0}=1$$

حجم حاصل از دوران ناحیه فوق حول محور y ها ($x = 0$) را محاسبه کنید.

$$V = 2\pi \int_0^\infty x\, f(x)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^\infty x e^{-x}\, dx = 2\pi$$

حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به محورهای مختصات و منحنی $y = \ln x$

که $0 \leq x \leq 1$ حول محور x ها بدست آورید.

$$v = \pi \int_0^1 (\ln x - 0)^2 dx \longrightarrow$$

$$\begin{cases} \ln^2 x = u \\ dx = dv \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \frac{2}{x} \ln x \, dx = du \\ v = x \end{array}$$

$$= \pi \left(x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx \right)$$

$$= \pi \left(x \ln^2 x - 2 x \ln x + 2x \right)_0^1 = 2\pi$$

ناحیه محدود به منحنی $y=\ln x$ و محورهای مختصات که $0\le x\le 1$

$\Rightarrow x = e^{y}$

حول محور y ها دوران می‌دهیم حجم را بیابید.

$x=0$

$$\pi = \pi \int_{-\infty}^{0} \left(e^{y} - 0\right)^{2} dy = \pi\left(\frac{1}{2} e^{2y}\right)\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\infty}\right) = \pi\left(\frac{1}{2}\right) = \pi/2$$

مساحت سطح دوار حول محور x ها:

$$S = 2\pi \int y \sqrt{1 + x'^2} \, dy$$

$$S = 2\pi \int y \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

محاسبه مساحت سطح دوار حول محور y ها:

$$S = 2\pi \int x \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

$$S = 2\pi \int x \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

مثال: مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $y=x^{2}$ در فاصله $x=0$ تا $x=1$ حول محور y ها را بدست آورید.

$$S = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\, dx$$

$$S = 2\pi \int_0^1 x(1+4x^2)^{1/2}\, dx =$$

$$= 2\pi \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} (1+4x^2)^{3/2} \right)_0^1 = \cdots$$

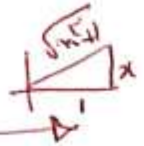
منحنی تابع $y=\ln x$ که $0 \leq x \leq 1$ حول محور yها دوران می‌کند

مساحت سطح دوار را بیابید.

$$S = 2\pi \int x \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int x \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\, dx = 2\pi \int x \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$$

$$= 2\pi \int \sqrt{x^2+1}\, dx \xrightarrow[dx = \sec^2\theta\, d\theta]{x = \tan\theta}$$



$$= 2\pi \int \sqrt{tg^2+1}\, (\sec^2\theta\, d\theta)$$

$$= 2\pi \left(\frac{\overset{\sqrt{x^2+1}}{\sec\theta}\, \overset{x}{\tan\theta} + \ln\left|\overset{\sqrt{x^2+1}}{\sec\theta} + \overset{x}{\tan\theta}\right|}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \ldots$$

منحنی $y = \cosh x$ در $1 \geq x \geq 0$ حول محور y ها دوران می‌کند مساحت سطح دوار را بیابید.

$$S = 2\pi \int x\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+(\sinh x)^2} = 2\pi \int_0^1 x\cosh x\, dx$$

$$= 2\pi \left(x\sinh x - \cosh x \right)\Big|_0^1 = \cdots$$

موفق باشید