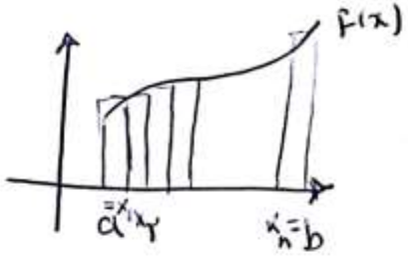
دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضی 1

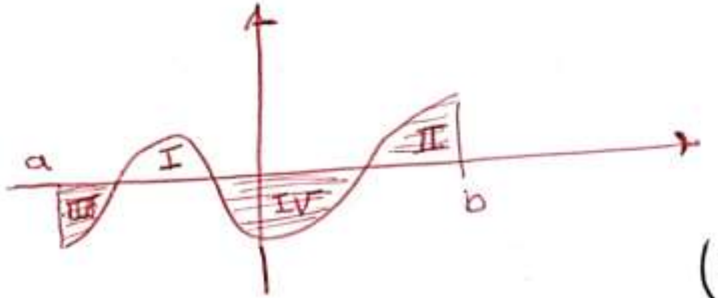
مدرّس : دکترمغاری

تعریف انتگرال معین :

مفهوم انتگرال معین اغلب با توجه به مساحت بین منحنی کران دار $y=f(x)$ و محور xها بین دو نقطه به طول های $x=a$ و $x=b$ بیان می شود :



$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

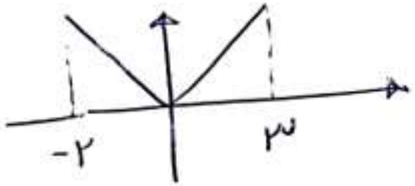


$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

(مساحت I + مساحت II) − (مساحت III + مساحت IV)

حل کنید

$$\int_{-۲}^{۳} |x|\,dx$$



$$\text{مقدار انتگرال} = \frac{۳\times۳}{۲} + \frac{۲\times۲}{۲}$$

$$= \frac{۹}{۲} + ۲ = \frac{۱۳}{۲}$$

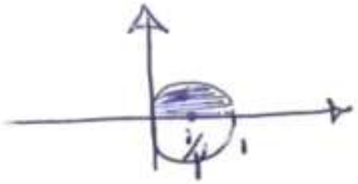
$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$$

با توجه به نمودار نیم دایره $y = \sqrt{x - x^2}$ یعنی

$$y^2 = x - x^2$$

$$x^2 - x + y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \qquad y \geqslant 0$$



انتگرال = نصف مساحت دایره = $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi\left(\frac{1}{4}\right)}{2} = \frac{\pi}{8}$

خواص انتگرال معین :

اگر $f(x)$ و $g(x)$ بر $[a,b]$ انتگرال پذیر باشند :

۱- $$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

۲- اگر K = کرد ثابت

$$\int_a^b K\, f(x)\,dx = K \int_a^b f(x)\,dx$$

۳- $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

۴- $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

۵- $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

انتگرال نامعین :

اگر $f(x)$ یک تابع دلخواه باشد آن گاه هر تابعی چون $F(x)$ که $F'(x) = f(x)$

یک انتگرال نامعین یا تابع اولیه f می نامیم.

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

قواعد انتگرال گیری :

۱) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$

۲) $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$

۳) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$

۴) $\int \sin u \, du = -\cos u + c$

۵) $\int \cos u \, du = +\sin u + c$

۶) $\int \cot u \, du = \ln(\sin u) + c$

چون

$$\int \frac{\cos u}{\sin u} du \xlongequal[\cos u\,du = dT]{\sin u = T} \int \frac{dT}{T}$$

$$= \ln T = \ln(\sin u) + c$$

V) $\int \tan u \, du = \ln(\sec u) + C$

$\int \tan u \, du = -\int \frac{-\sin u}{\cos u} du$ چون :

$\cos u = T$

$(-\sin u) du = dT$

$-\int \frac{dT}{T} = -\ln T$

$= -\ln(\cos u) = \ln(\cos u)^{-1}$

$= \ln(\sec u) + c$

۸) $\int e^{u}\,du = e^{u} + c$

۹) $\int (1 + tg^{2}x)\,dx = \int \sec^{2}x\,dx$

$= \tan x + c$

۱۰) $\int (1 + \cot^{2}x)\,dx = \int \csc^{2}x\,dx$

$= -\cot x + c$

۱۱) $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + c$

۱۲) $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + c$

۱۳) $\int \sinh u \, du = \cosh u + c$

۱۴) $\int \cosh u \, du = + \sinh u + c$

۱۵) $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$

۱۶) $\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + c$

۱۷) $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

۱۸) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$$

مثال :

$$\int \sin(9x+1)\,dx = ?$$

می‌دانیم

$$\int \sin u \, du = -\cos u$$

پس

$$9x+1 = u$$

$$9\,dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{9}$$

$$\Rightarrow \int \sin(u)\,\frac{du}{9}$$

$$= \frac{1}{9}\int \sin u \, du = \frac{1}{9}(-\cos u)$$

$$= -\frac{1}{9}\cos u = -\frac{1}{9}(\cos 9x+1)$$

$$\int \frac{x\,dx}{3x^2+1} = ؟$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u$$ می‌دانیم

پس

$$3x^2+1 = u$$

$$6x\,dx = du$$

$$\frac{1}{6}\int \frac{6x\,dx}{\underbrace{3x^2+1}_{u}} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{6}\ln u = \frac{1}{6}\ln(3x^2+1)$$

$$\int x\, e^{۹x^{۲}}\, dx = ؟$$

$$۹x^{۲} = u$$

$$۱۸x\, dx = du$$

میدانیم $\int e^{u} du = e^{u}$ پس

پس

$$\frac{1}{18}\int \boxed{\boxed{18x}\, \boxed{e^{۹x^{۲}}}\, \boxed{dx}} = \frac{1}{18}\int e^{u}\, du$$

$$= \frac{1}{18} e^{u} = \frac{1}{۱۸} e^{(۹x^{۲})}$$

$$\int \sqrt{x+1}\, dx = ؟$$

می دانیم $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ پس

$$\int \sqrt{x+1}\, dx = \int \underbrace{(x+1)}_{u}^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\begin{aligned} x+1 &= u \\ dx &= du \end{aligned} \Rightarrow \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$$

موفق باشید