دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

فرمول بدست آوردن تقریب یک تابع :

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \simeq f'(x)$$

پس :

$$\boxed{f(x+\Delta x) \simeq f'(x)\,\Delta x + f(x)}$$

مثال: تقریب $\sqrt[4]{15}$ را محاسبه کنید.

$$f(x)=\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}} \qquad f(a+h)\simeq f'(a)\,\Delta x+f(a)$$

$$f'(x)=\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}$$

$$\sqrt[4]{15}=\sqrt[4]{\underbrace{16}_{a}\;\underbrace{-1}_{\Delta x}}$$

$$\sqrt[4]{\underbrace{16}_{a}\underbrace{-1}_{h}}\simeq\frac{1}{4}\,\frac{1}{(16)^{\frac{3}{4}}}(-1)+\sqrt[4]{16}$$

$$\simeq\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}(-1)+2 \quad \dots$$

مثال: $\sin ۴۶^\circ$ را با تقریب محاسبه کنید.

$$f(x) = \sin x \qquad ۴۶^\circ = ۴۵^\circ + ۱^\circ$$

$$f'(x) = \cos x \qquad ۱^\circ = ۱ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۱۸۰}$$

$$\sin(۴۶^\circ) = \sin(\overset{a}{۴۵^\circ} + \overset{h}{۱^\circ})$$

$$= \cos(۴۵^\circ)\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) + \sin(۴۵^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \cdot \frac{\pi}{۱۸۰} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

مثال: تقریبی برای $\sqrt[۳]{۱۰۰۲}$ بیابید.

$$f(x) = \sqrt[۳]{x} \qquad \sqrt[۳]{\underbrace{۱۰۰۰}_{a} + \underbrace{۲}_{\Delta x}}$$

$$f'(x) = \frac{۱}{۳} x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$f(a+h) \simeq f'(a)\Delta x + f(a)$$

$$\sqrt[۳]{۱۰۰۲} \simeq \frac{۱}{۳} \frac{۱}{(۱۰۰۰)^{\frac{۲}{۳}}} (۲) + \sqrt[۳]{۱۰۰۰}$$

$$\simeq \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۱}{۱۰۰} \cdot ۲ + ۱۰ \simeq ۱۰/۰۰۶۶$$

۱۱) اگر $f(x)=\int_0^x \frac{2+e^{-t}}{1+tg^2 t}\,dt$

$$(f^{-1})'(0)=?$$

$y=0 \xrightarrow{\int_\square^\square} x=0$

دقت: می‌دانیم $\int_a^a = 0$ و $f(x)=y$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)} \qquad \int_0^x f(t)\,dt = (1)\, f(x)$$

$$(\underset{y}{f^{-1}})'(0)=\frac{1}{\underset{x}{f'(0)}}=\frac{1}{\frac{2+e^{-(0)}}{1+tg^2(0)}}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

مثال :

$$f(x) = \frac{(x+1)h(x)}{(2x+1)h(2x+1)} \qquad f'(-1) = ؟$$

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{\dfrac{(x+1)h(x)}{(2x+1)h(2x+1)} - 0}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{h(x)}{(2x+1)h(2x+1)} = \frac{h(-1)}{-1\, h(-1)} = -1$$

مثال : اگر $f(x)=\int_{1}^{x}\sqrt{2+\sin^{3}t}\,dt$ باشد ثابت کنید f یک به یک است و $(f^{-1})'(0)=?$

$$f'(x)=(1)\sqrt{2+\sin^{3}x}>0$$

صعودی اکید $\Rightarrow$ 1-1 است.

$$y=0 \rightarrow \int_{1}^{x} \quad =0 \Rightarrow x=1$$

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\sqrt{2+\sin^{3}(1)}}$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\int_{1+\cos x}^{\sin x} e^{t^2}\,dt}{4\sin^2 x + 2\sin 2x} = \frac{\int_0^0 e^{t^2}\,dt}{0+0} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{H} \lim_{x\to\pi} \frac{(\cos x)\, e^{\sin^2 x} - (-\sin x)\, e^{(1+\cos x)^2}}{8\sin x\cos x + 4\cos 2x}$$

$4\sin 2x \leftarrow 4\cdot 2\sin x\cos x$

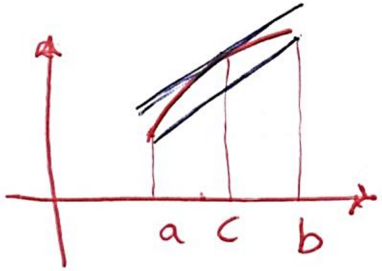
$$= \lim \frac{(-1)e^0 + 0(e^0)}{4\sin 2\pi + 4\cos 2\pi} = \frac{-1}{4}$$

قضیه مقدار میانگین :

① f تابعی باشد که در $[a,b]$ پیوسته

② f بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد و

③



$\exists \quad a<c<b$

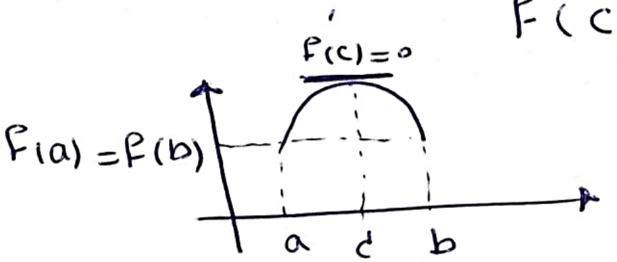
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

رول :

اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق پذیر و $f(a)=f(b)$

باشد آنگاه حداقل یک c در بازه (a,b) وجود دارد که :

$$f'(c)=0$$



* نشان دهید که معادله زیر نمی‌تواند بیش از یک جواب داشته باشد.

$$f(x) = x^7 + 4x^5 + 3x^3 + 4x - 3 = 0$$

فرض کنیم که f دارای دو ریشه باشد که متمایزند مانند x_1 و x_2

پس بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم که $x_1 < x_2$ و از طرفی پس

$f(x_1) = f(x_2) = 0$ پس شرایط رول تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ برقرار

است پس

$x_1 < c < x_2$ که $f'(c) = 0$

$$f'(c) = 7c^6 + 20x^4 + 9x^2 + 4 = 0$$

ولی

$7c^6 + 20c^4 + 9c^2 + 4 > 0$

فرض باطل است

نشان دهید که معادله $x^5+x^3+x+1=0$ دقیقاً یک جواب

در $[-1,0]$ دارد.

طبق قضیه بولتزانو چون $\overbrace{f(0)}^{1}\overbrace{f(-1)}^{-2}<0$ پس حداقل

یک ریشه دارد. فرض کنیم دو جواب مانند x_1 و x_2 داشته باشیم:

$$f(x_1)=f(x_2)=0$$

و

$$f'(c)=0$$

$$5c^4+3c^2+1=0 \quad \times$$

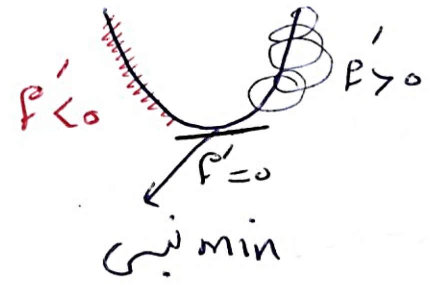
پس دقیقاً یک ریشه وجود دارد.

تعیین اکسترمم نسبی :

آزمون مشتق اول: برای بدست آوردن اکسترمم (max یا min)

$f'(x)=0$ سپس f' را تعیین علامت می‌کنیم.

هرگاه علامت مشتق به صورت زیر بود



x		x_0	
f'	$-$		$+$

min نسبی

x		x_0	
f'	$+$		$-$

max نسبی

آزمون مشتق دوم:

$$f'(x)=0 \longrightarrow x=x_0 \begin{cases} \max \\ \min \end{cases}$$ یا

$$f''(x_0)>0 \rightarrow$$ min نسبی

$$f''(x_0)<0 \rightarrow$$ max نسبی

$$f''(x_0)=0 \longrightarrow$$ آزمون نتیجه‌ای نمی‌دهد

کاربرد مشتق :

* معادله خط مماس و خط قائم

برای بدست آوردن خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطه $x=x_0$ به صورت زیر

عمل می‌کنیم :

$$m_{\text{مماس}} = y'(x_0)$$

$$A \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right.$$

خط مماس $y - y_0 = m(x - x_0)$

خط قائم $y - y_0 = \dfrac{-1}{m}(x - x_0)$

شیب خط قائم : عکس و قرینه شیب خط مماس

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = 2x^3 + x + 1$ مفروض است معادله خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه به طول ۴ را بدست آورید.

$$(4, a) \in f^{-1} \rightarrow (a, 4) \in f \rightarrow$$

$$2a^3 + a + 1 = 4$$

$$\underline{a = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{(4, 1) \in f^{-1}}$$

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{7}$$

$$y - 1 = \frac{1}{7}(x - 4) \longleftarrow \text{خط مماس}$$

تعریف نقطه بحرانی : نقاطی هستند که مشتق در آن ها موجود نیست یا برابر صفر است .

تعیین اکسترمم مطلق : ابتدا نقاط بحرانی را بدست می آوریم و بعد مقدار تابع را در آن نقاط بیابیم . بیشترین مقدار را max مطلق و کمترین مقدار را min مطلق می نامیم .

* درصورتی که تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشد α و β را طوری بیابید که $\forall x \in [-8, 0]$ $\alpha \leq f(x) \leq \beta$.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - (x+5)^2 & x \leq -4 \\ 13 - (x+1)^2 & x > -4 \end{cases}$$

باید max و min مطلق بر بازه $[-8, 0]$ مشخص کنیم.

$$f'_{+}(-4) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-4+h) - f(-4)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{h}(6-h)}{\cancel{h}} = 6$$

یا

$$f' = \begin{cases} \\ -2(x+1) = +6 & x > -4 \end{cases}$$

$$f'_-(-۴) = \lim_{h \to ۰^-} \frac{f(-۴+h) - f(-۴)}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰^-} \frac{\left(-۴ - (۱+h)^۲\right) - ۳}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰^-} \frac{h(-۲-h)}{h} = -۲ - \cancel{h}^{۰} = -۲$$

$$f' = \begin{cases} ۰ - ۲(\cancel{x}^{-۴} + ۵) = -۲ & x < -۴ \\ & \end{cases}$$

چون $f'_-(۴) \neq f'_+(۴)$

$$f'(x)=\begin{cases} -۲(x+۵) & x<-٤ \\ \text{وجود ندارد} & x=-٤ \\ -۲(x+۱) & x>-٤ \end{cases}$$

$$f'=۰ \longrightarrow \begin{matrix} x+۵=۰ \longrightarrow x=-۵ \Longrightarrow y=۴ \\ x+۱=۰ \longrightarrow x=-۱ \Rightarrow y=۱۲ \end{matrix}$$

$x=-۸ \longrightarrow y=-۵$

$x=-۵ \longrightarrow ۴$

$x=-۴ \longrightarrow ۳$

$x=-۱ \longrightarrow ۱۲$

$x=۰ \longrightarrow ۱۱$

$$\boxed{\begin{matrix} \min = \alpha = -۵ \\ \max = B = ۱۲ \end{matrix}}$$

معادله خط قائم بر نمودار $y=f(x)$ را در نقطه $\begin{vmatrix}\pi\\0\end{vmatrix}$ بیابید

$$y^3 - \sin(x-y) = 0$$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{-(-1\cos(x-y))}{3y^2 + 1\cos(x-y)}\Bigg]_{\substack{x=\pi\\y=0}}$$

$$\text{مماس}\ y' = \frac{\cos(\pi-0)}{3(0)^2+\cos(\pi)} = \frac{-1}{-1} = +1$$

$$\text{خط قائم}\ m = -1$$

$$\boxed{y - 0 = -1(x-\pi)}$$

$$y''=?\quad y'=?\quad \begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases} \quad *$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a(\cancel{\cos t}-\cancel{\cos t}+t\sin t)}{a(-\cancel{\sin t}+\cancel{\sin t}+t\cos t)}=\tan t$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{dx/dt}=\frac{(1+tg^2 t)}{a(t\cos t)}=\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{a t\cos^3 t}$$

موفق باشید