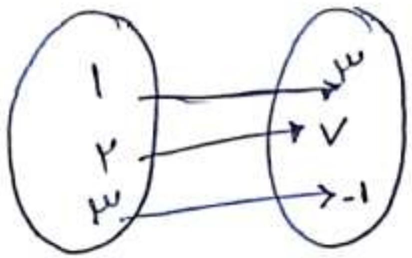
دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضی 1

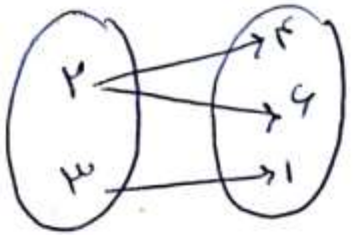
مدرّس : دکترمغاری

تابع

تعریف: فرض کنید A و B دو زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{R}$ باشد. تابع حقیقی f از A به B را با نماد $f: A \longrightarrow B$ نمایش می‌دهیم، که به هر عضو از A یک و فقط یک عضو از B را نسبت می‌دهد.



✓



×

✓

تعریف: اگر $f: A \longrightarrow B$ آنگاه محدوده مجاز برای x ها را با $D_f = A$ نمایش و محدوده مجاز برای y ها را $R_f = B$ نمایش می‌دهیم.

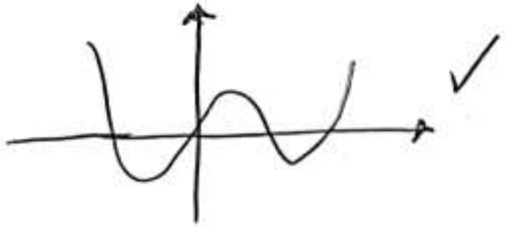
$$R_f = \{y \in f(x) : x \in D_f = A\}$$

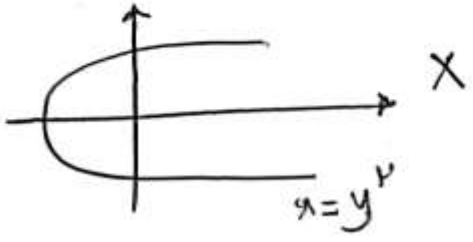
تذکر: توجه داریم که برای هر تابع $f: A \to B$ همواره $R_f \subseteq B$ است.
$x \to f(x)$

تعریف دیگر از تابع: همه‌ی اعضای A به عنوان مولفه اول زوج مرتب حداقل یکبار ظاهر شوند و $(a,b) \in f$ و $(a,c) \in f \Leftarrow b = c$

نکته : با توجه به تعریف تابع بدیهی است که نمودار تابع مجموعه‌ای از زوج های مرتب است که شامل هیچ دو زوج مرتبی با مولفه اول یکسان و مولفه دوم متفاوت نیست . به عبارتی دیگر هر خط موازی محور y ، نمودار تابع را در صفحه مختصات xy حداکثر در یک نقطه قطع می کند .

مثال : نمودار های زیر تابع اند یا خیر ؟





تعریف: به محدوده مجاز برای x، دامنه می‌گوییم و با D نمایش می‌دهیم.

مثال: دامنه $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-7x+10}{1-x}}$ را مشخص کنید.

$$x^2-7x+10=0 \Rightarrow x_1=2 \;,\; x_2=5$$

$$1-x=0 \Rightarrow x=1$$

$$D_f=(-\infty,1)\cup[2,5]$$

x	$-\infty$		1		2		5		$+\infty$
$x^2-7x+10$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
P		$+$		$-$		$+$		$-$	

مثال : برد تابع $f: [-1,2] \longrightarrow R$ را بیابید.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$

حل:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1$$

$$= (x+1)^3 - 1$$

$$-1 \leq x \leq 2 \longrightarrow \quad 0 \leq x+1 \leq 3$$

$$0 \leq (x+1)^3 \leq 27$$

$$-1 \leq (x+1)^3 - 1 \leq 26$$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq y \leq 26 \Rightarrow R_f = [-1, 26]$$

مثال : دامنه وبرد تابع $y = \frac{x+1}{1-x}$ بیابید.

$$D_f = R - \{1\}$$

$$y - yx = x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{y+1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{y+1} \quad D_{f^{-1}} = R_f = R - \{-1\}$$

تعریف ۱-۱ :

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

یا هر خط موازی محور x ها ؛ نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند

تعریف : $f: A \longrightarrow B$ ؛ آنگاه $f^{-1}: B \longrightarrow A$

را وارون تابع می‌نامیم. و $\begin{cases} D_f = R_{f^{-1}} \\ R_f = D_{f^{-1}} \end{cases}$

برای محاسبه وارون یک تابع ابتدا :

۱- ۱-۱ بودن بررسی کنید $\Leftarrow$ اگر ۱-۱ بود $\Leftarrow$ وارون وجود دارد.

۲- x را تنها کنید و سپس $\begin{matrix} x \longrightarrow f^{-1}(x) \\ y \longrightarrow x \end{matrix}$ قرار دهید.

تعریف : تابع چندضابطه ای :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x \in D_n \end{cases}$$

$$D_f = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \quad ; \quad R_f = \bigcup_{i=1}^{n} R_{f_i}$$

تعریف : تابع قدر مطلق

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تابع جزء صحیح :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$f(x) = [x]$ ؛ بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x

خواص جزء صحیح :

1) $n-1 \leq x < n \Rightarrow [x] = n-1$

۲) $x = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = n$

۳) $x-1 < [x] \leq x < [x]+1 \qquad x \in R$

۴) $[x+n] = [x]+n$

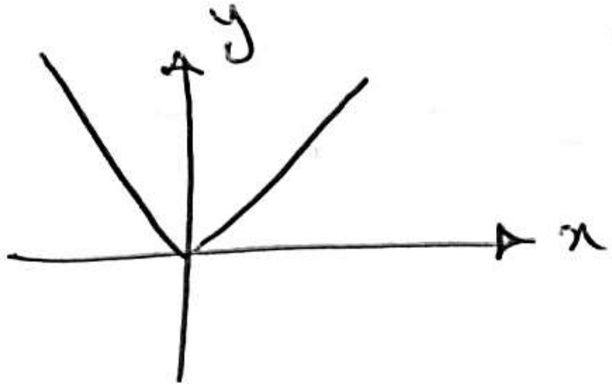
دقت :

$[x] \leq x < [x]+1$

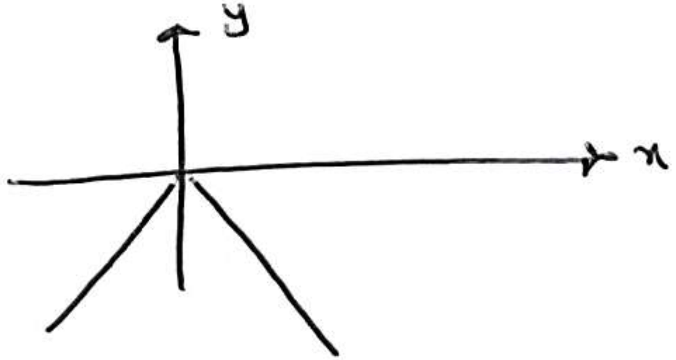
$0 \leq x-[x] < 1$

رسم توابع به کمک انتقال :

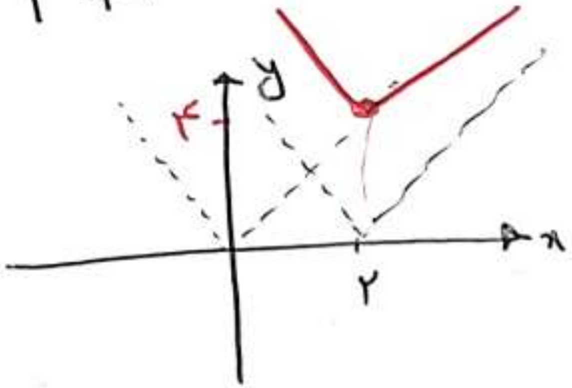
$y = |x|$



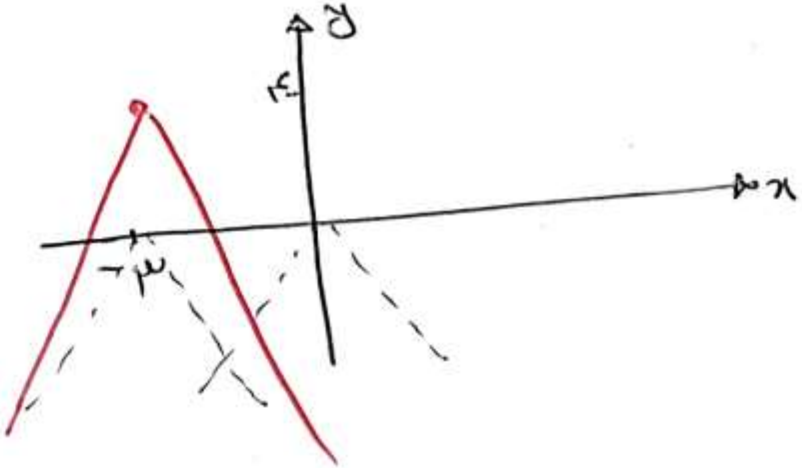
$y = -|x|$



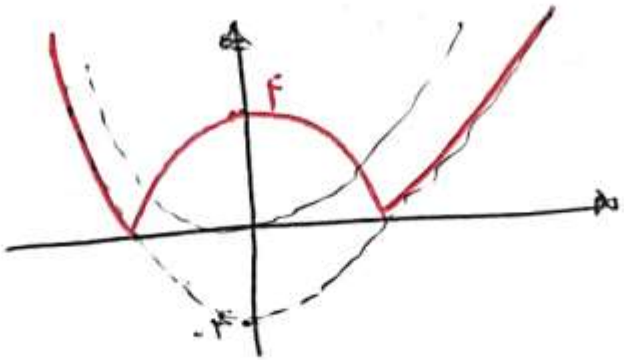
$y = |x - ۲| + ۴$



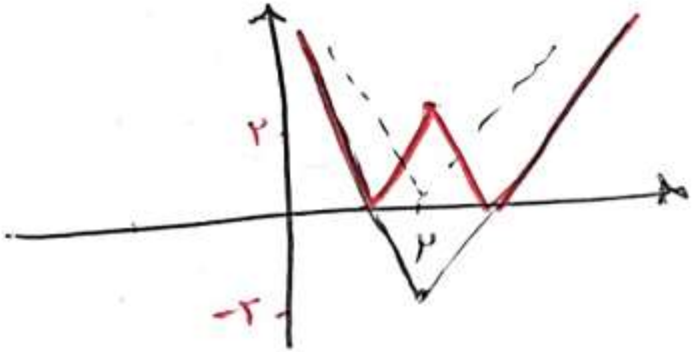
$y = -|x + ۳| + ۴$



$y = |x^2 - 4|$



$y = ||x-2|-2|$



اعمال جبری روی توابع

۱) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

۲) $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$

$$D_{fg(x)} = D_f \cap D_g$$

۳) $D\left(\frac{f}{g}\right) = D_f \cap D_g - \{x : g = 0\}$ ؛ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

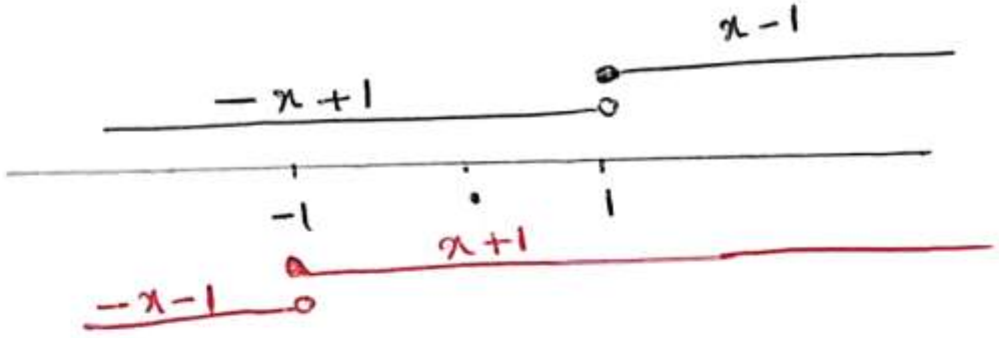
مثال: نمودار تابع $y=|x-1|+|x+1|$ رسم کنید.

$$|x-1| = \begin{cases} +(x-1) & x \geq 1 \\ -x+1 & x<1 \end{cases}$$

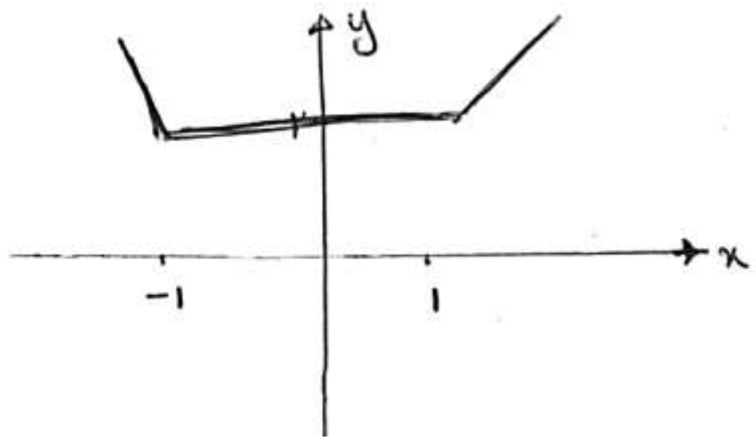
x		1	
$x-1=y$	$-$	0	$+$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x<-1 \end{cases}$$

x		-1	
$x+1=y$	$-$	0	$+$



$$
f+g(x)=\begin{cases}
(-x+1)+(-x-1)=-\text{۲}x & x<-1\\
(-x+1)+(x+1)=\text{۲} & -1\leq x<1\\
(x-1)+(x+1)=\text{۲}x & x\geqslant 1
\end{cases}
$$



مثال : آیا $y=\frac{x-3}{x+5}$ یک به یک است؟

$$f(x_1)=f(x_2) \xrightarrow{?} x_1=x_2$$

$$\frac{x_1-3}{x_1+5}=\frac{x_2-3}{x_2+5}$$

$$\cancel{x_1x_2}+5x_1-3x_2\cancel{-15}=\cancel{x_1x_2}+5x_2-3x_1\cancel{-15}$$

$$5x_1+3x_1=5x_2+3x_2$$

$$8x_1=8x_2 \Rightarrow x_1=x_2 \quad \checkmark$$

مثال: یک به یک بودن تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

را بررسی کنید و وارون تابع را بیابید.

$$f(x) = (x+1)^3 - 1$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1+1)^3 \cancel{-1} = (x_2+1)^3 \cancel{-1}$$

$$x_1 \cancel{+1} = x_2 \cancel{+1} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \checkmark$$

$$f(x) = (x+1)^{3} - 1$$

$$y + 1 = (x+1)^{3}$$

$$\sqrt[3]{y+1} = x + 1$$

$$\sqrt[3]{y+1} - 1 = x$$

$$\boxed{\sqrt[3]{x+1} - 1 = f^{-1}(x)}$$

مثال : $f(x) = x^2$ ، $f: R \to R$ یک به یک نیست

$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$ ×

ولی

$f(x) = x^2$ ، $f: R^+ \to R$

یک به یک است.

تعریف : تابع $f: A \to B$ را پوشا گوییم هرگاه $R_f = B$

$x \longrightarrow f(x)$

از نظر نموداری تابع پوشاست هرگاه هر خط $y = \alpha \in B$ نمودار تابع f را در حداقل یک نقطه قطع کند.

مثال: $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ ، پوشاست . ✓

$f(x) = x^2$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پوشا نیست ×

$f(x) = x^2$

تعریف: تابع $f: A \rightarrow B$ را دوسویی می‌گوییم هرگاه؛

f یک به یک و پوشا باشد.

یا هر خط $y = \alpha \in B$ نمودار تابع را در دقیقاً یک نقطه قطع کند.

قضیه : $f: A \longrightarrow B$ معکوس پذیر $\Longleftrightarrow$ f یک به یک باشد.

قضیه: اگر $f: A \to B$ یک به یک باشد آنگاه f^{-1} نیز یک به یک است.

داریم: $(f^{-1})^{-1} = f$

تعریف :

$f: A \to B$ صعودی است هرگاه :

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

مثال: $[x]$ یک تابع صعودی است.

تعریف : $f: A \to B$ نزولی است هرگاه :

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

تعریف : تابع f را زوج گوییم هرگاه :

۱- $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

۲- $f(-x) = f(x)$

تعریف : تابع f را فرد گوییم هرگاه :

۱- $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

$f(-x) = -f(x)$

برخی از توابع مثلثاتی و توابع خاص

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad |\cos x| \leq 1 \quad |\sin x| \leq 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

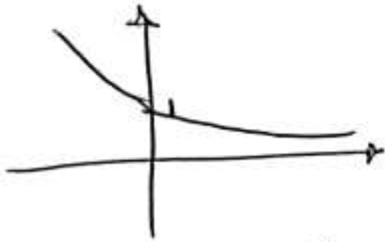
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

$$\csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$$

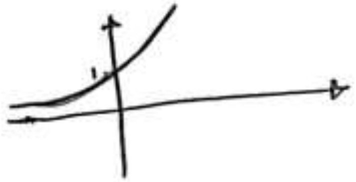
تابع نمایی :

$f(x) = a^x$ که $0<a<1$ (نزولی)



$0<a<1$

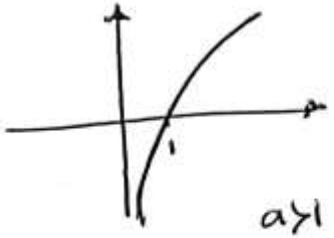
و $f(x)=a^x$ ، $a>1$ (صعودی)



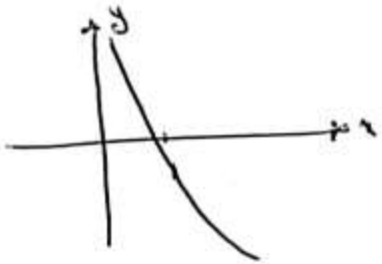
تابع لگاریتم :

$$y = a^x \iff x = \log_a^y$$

$f^{-1}(x) = \log_a^x$ که وارون تابع نمایی است.



$a > 1$



$0 < a < 1$

$$\log x^n = n \log x$$

$$\log_a^{x_1} + \log_a^{x_2} = \log_a^{x_1 x_2}$$

$$\log_a^{x_1} - \log_a^{x_2} = \log_a^{(x_1/x_2)}$$

توابع هایپربولیک (هذلولوی) :

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

دقت :

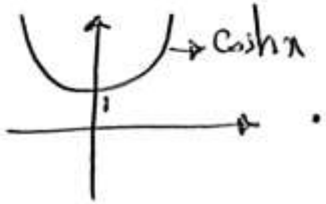
$$\cosh(x) \geq 1$$

چون

$$\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \geq 1 \Rightarrow e^{x} + e^{-x} - 2 \geq 0$$

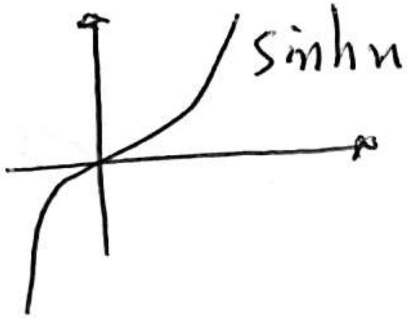
$$\xrightarrow{\times e^{x}} (e^{x})^{2} - 2e^{x} + 1 \geq 0$$

$$(e^{x} - 1)^{2} \geq 0$$



دامنه آن R و برد آن $[+1, +\infty)$ است.

دقت : $\cosh x$ یک تابع زوج است.



دقت: $\cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x = 1$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

مثال

چون؛ $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\sinh^{-1}x$

$$\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{x}}{e^{x}}=\frac{e^{2x}-1}{2e^{x}}$$

$$y=\frac{(e^{x})^{2}-1}{2e^{x}}\Rightarrow (e^{x})^{2}-1=2ye^{x}$$

$$(e^{x})^{2}-(2y)e^{x}-1=0$$

$$e^{x}=\frac{+2y\pm\sqrt{4y^{2}-4(1)(-1)}}{2}$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

غ ق ق

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

و به طور مشابه :

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

مثال :

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left| \frac{1+x}{x-1} \right|$$

چون:

$$\coth x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

$$y e^{2x} - y = e^{2x} + 1$$

$$y e^{2x} - e^{2x} = 1 + y$$

$$e^{2x}(y-1) = 1 + y \longmapsto$$

$$e^{2x} = \frac{1+y}{y-1} \Rightarrow 2x = \ln\left(\frac{1+y}{y-1}\right)$$

$$x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{y-1}\right)$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \checkmark$$

به طور مشابه:

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

ترکیب توابع:

$$f: A \longrightarrow B \quad , g: B \longrightarrow C$$

$$gof_{(x)}: A \longrightarrow C$$

$$gof_{(x)} = g(f_{(x)})$$

$$D_{gof_{(x)}} = \{x \mid x \in D_f \, ; \, f_{(x)} \in D_g\}$$

و داریم:

$$fog_{(x)} = f(g_{(x)})$$

$$D_{fog} = \{x \mid x \in D_g \, ; \, g_{(x)} \in D_f\}$$

و داریم:

$$fof^{-1}_{(x)} = f^{-1} o f_{(x)} = x$$

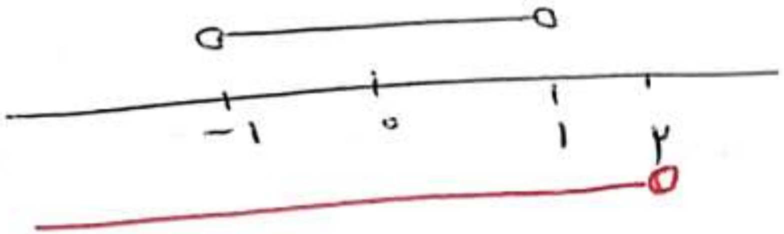
مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<2 \\ \dfrac{x}{2} & x\geq 2 \end{cases}$ آنگاه $fof(x)$ را بدست آورید.

$$fof(x)=f(f(x))=\begin{cases} f^2+1 & f<2 \\ \dfrac{f}{2} & f\geq 2 \end{cases}=\begin{cases} (x^2+1)^2+1 & -1<x<1 \\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1 & 2\leq x<4 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \{1\leq x<2\}\cap x<-1 \\ \dfrac{x}{4} & x\geq 4 \end{cases}$$

* $f < 2$ $\qquad f = x^2 + 1 < 2$

$x^2 < 1 \rightarrow -1 < x < 1$ و $x < 2$

$\Rightarrow -1 < x < 1$ و $x < 2 \Rightarrow -1 < x < 1$



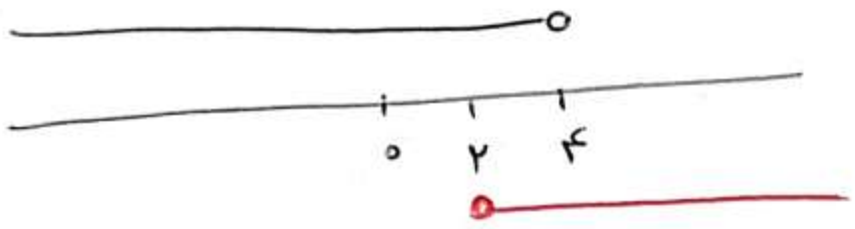
$\Rightarrow \quad -1 < x < 1 \Rightarrow fof(x) = f^2 + 1$

$= (x^2+1)^2 + 1$

* $f < ۲$ و $f = \dfrac{x}{۲} < ۲$

$x \geq ۲$ و $x < ۴$

$\Rightarrow$



$۲ \leq x < ۴ \Rightarrow fof(x) = f^{۲} + ۱$

$= \left(\dfrac{x}{۲}\right)^{۲} + ۱$

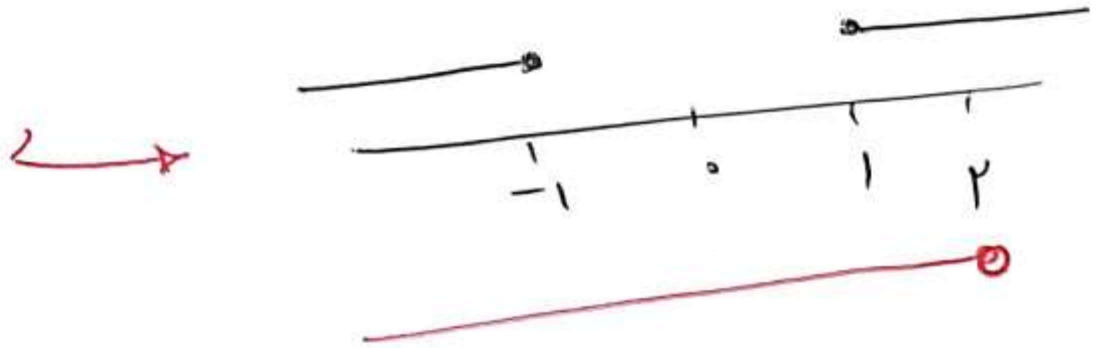
$$\boxed{f \circ f = \frac{f}{2}}$$

** $f \geq 2$

$x^2+1 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow$

$x \geq 1$

$x \leq -1$ و $x<2$

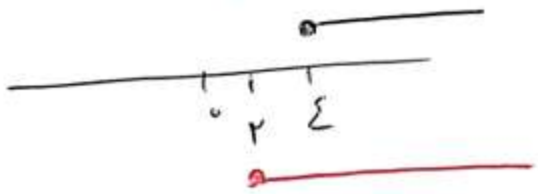


$1 \leq x < 2 \longrightarrow f \circ f(x) = \frac{f}{2} = \frac{x^2+1}{2}$

و $x < -1$

** $f \geqslant ۲$ $\boxed{f \circ f = \frac{f}{۲}}$

$\frac{x}{۲} \geqslant ۲$ $x \geqslant ۴$ و $x \geqslant ۲ \Rightarrow x \geqslant ۴$



$$x \geqslant ۴ \longrightarrow f \circ f(x) = \frac{f}{۲} = \frac{x/۲}{۲} = \frac{x}{۴}$$

$$f \circ f = \begin{cases} (x^۲+۱)^۲+۱ & -۱ < x < ۱ \\ (\frac{x}{۲})^۲+۱ & ۲ \leq x < ۴ \\ (x^۲+۱)/۲ & ۱ \leq x < ۲ \cap x < -۱ \\ x/۴ & x \geqslant ۴ \end{cases}$$

مثال: اگر $\tan\phi = \sinh x$ نشان دهید:

$$x = \ln(\tan\phi + \sec\phi)$$

$$\tan\phi = \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^{x}}$$

$$e^{2x}-1 = 2e^{x}\operatorname{tag}\varphi$$

$$(e^{x})^{2}-2\operatorname{tag}\varphi\,(e^{x})-1=0$$

$$e^{x}=\frac{+2\operatorname{tag}\varphi \pm\sqrt{4\operatorname{tag}^{2}\varphi-4(1)(-1)}}{2}$$

$$e^{x}=\operatorname{tag}\varphi \pm\sqrt{\operatorname{tg}^{2}\varphi+1}$$

غ ق ق

$$x=\ln\left(\operatorname{tag}\varphi+\sqrt{\underbrace{1+\operatorname{tg}^{2}\varphi}_{\sec^{2}\varphi}}\right)$$

$$x=\ln(\operatorname{tag}\varphi+\sec\varphi)$$

مثال : اگر f و g به صورت زیر تعریف شده باشند $f \circ g$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x < 0 \\ x^2 + 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x} & x > 2 \end{cases}$$

حل:

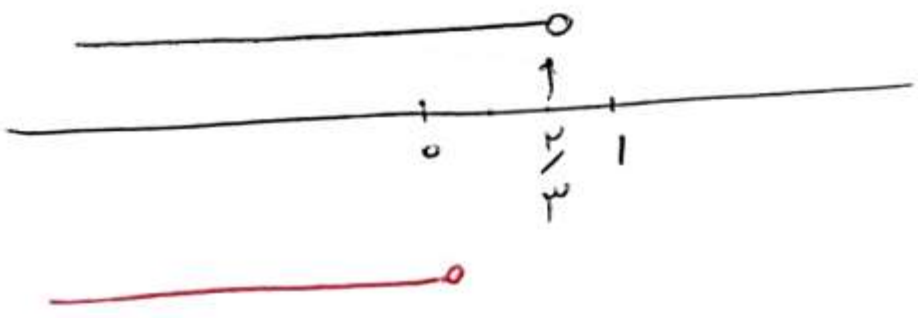
$$f\circ g(x)=f(g(x))$$

$$=\begin{cases} 2g & g<1 \\ g^2 & g\geq 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2(3x-1) & x<0 \\ 2\left(\frac{1}{x}\right) & x>2 \\ (x^2+1)^2 & 0\leq x\leq 2 \end{cases} \quad \Leftarrow g<1$$

★ $\to g<۱$ $\qquad g = ۳x - ۱$

$۳x - ۱ < ۱ \qquad x < \frac{۲}{۳}$ و $x < ۰ \Rightarrow x < ۰$



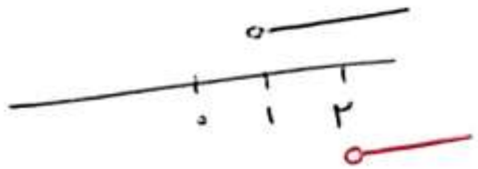
$f \circ g(x) = f(g(x)) = ۲(۳x - ۱) \qquad x < ۰$

$\rightarrow g < ۱ \quad : \quad g = x^{۲} + ۱$

$x^{۲} + ۱ < ۱ \qquad x^{۲} < ۰$

$\rightarrow g < ۱ \quad : \quad g = \frac{۱}{x}$

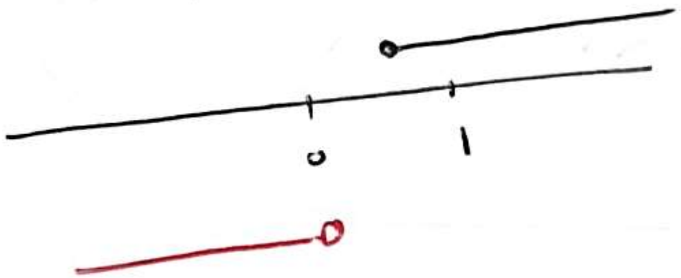
$\frac{۱}{x} < ۱ \Rightarrow x > ۱ \cap x > ۲ \Rightarrow x > ۲$



$x > ۲ \qquad f \circ g = ۲\left(\frac{۱}{x}\right)$

★ $g \geq ۱$ $\qquad g = ۳^x - ۱$

$۳^x - ۱ \geq ۱ \qquad ۳^x \geq \frac{۲}{[illegible]}$ و $x < ۰ = \phi$



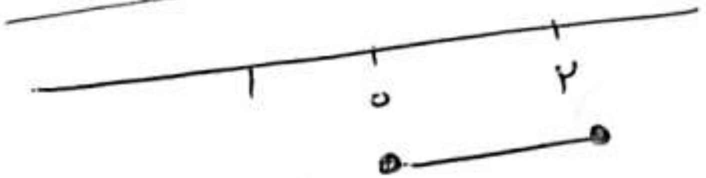
ϕ

$g \geq 1$, $g = x^2 + 1$

$0 \leq x \leq 2$

$x^2 + 1 \geq 1$ $\quad$ $x^2 \geq 0$ همیشه برقرار $\quad$ g

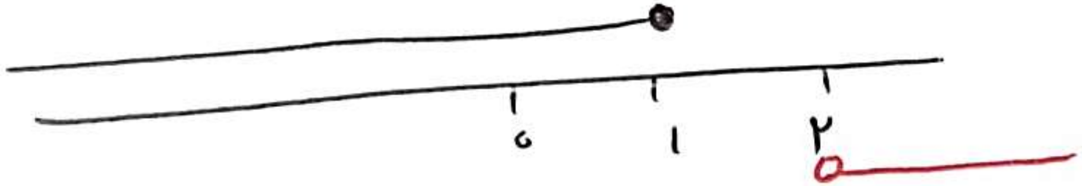
$= 0 \leq x \leq 2$



$f \circ g = g^2 = (x^2+1)^2 \quad g \geq 1$

$g \geq ۱$ و $g = \frac{۱}{x}$

$\frac{۱}{x} \geq ۱$ و $x > ۲ \Rightarrow x \leq ۱$ و $x > ۲ = \varnothing$



موفق باشید