دانشگاه صنعتی شاهرود

# درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

## دستگاه اعداد مختلط ($\mathbb{C}$)

تعریف: فرض کنید $\mathbb{R}$ دستگاه اعداد حقیقی باشد، دستگاه اعداد مختلط را با نماد $\mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم؛

$$\mathbb{C} = \{ (x,y) ; x,y \in \mathbb{R} \}$$

و هر عدد مختلط به صورت $z = x + iy$ نشان داده می‌شود که؛

$x$ قسمت حقیقی و $y$ قسمت موهومی نامیده می‌شود.

تذکر: توجه داریم که هر $x \in \mathbb{R}$ را می‌توان به صورت $(x,0) \in \mathbb{C}$ نشان داد، یعنی $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

اعمال جبری روی اعداد مختلط :

برای هر $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ داریم؛

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$

چون

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$$
$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2 , y_1 - y_2)$

۳) $z_۱ z_۲ = (x_۱ x_۲ - y_۱ y_۲ \;,\; x_۱ y_۲ + y_۱ x_۲)$

$$z_۱ z_۲ = (x_۱ + i y_۱)(x_۲ + i y_۲)$$

$$= x_۱ x_۲ + i x_۱ y_۲ + i y_۱ x_۲ + i^۲ y_۱ y_۲$$

$$\boxed{i^۲ = -۱}$$

$$= (x_۱ x_۲ - y_۱ y_۲) +$$

$$i (x_۱ y_۲ + y_۱ x_۲)$$

تعریف: اگر $Z = x+iy$ آن گاه

$$\bar{Z} = x - iy$$

را مزدوج $Z$ می‌نامیم.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left( \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} , \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} \times \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 - x_1y_2 i + i y_1 x_2 - \overset{-1}{i^2} y_1y_2}{x_2^2 - \cancel{x_2y_2 i} + \cancel{iy_2} x_2 - \underset{-1}{i^2} y_2^2}$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{1}{Z} = \left( \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy}$$

$$= \frac{x-iy}{x^2 - xyi + xyi - \underbrace{i^2}_{-1} y^2}$$

$$= \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

دقت:

$$Z=(x,y) \equiv Z=x+iy$$

که

قسمت حقیقی z ؛ $Re(z)=x$

قسمت موهومی z ؛ $Im(z)=y$

دقت: $i^2=-1$ پس:

$$i^3=i^2 \times i=(-1) \times i=-i$$

$$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=+1$$

$$\frac{1}{i}=\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i$$

مثال: ساده کنید

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} + 2i + 3$$

$$\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+i+\underbrace{i^2}_{-1}}{1+i-i-\underbrace{i^2}_{-1}}$$

$$= \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2}$$

$$= i$$

$$\frac{1+i}{1-i} = i \Rightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = \left(i^2\right)^{50}$$

$$= (-1)^{50} = +1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} + 2i + 3 = 1 + 2i + 3 = 2i + 4$$

تعریف: قدر مطلق

$\Rightarrow \left(\frac{\cdots}{1-i}\right) + \cdots$

تعریف: قدر مطلق عدد مختلط $Z = x+iy$ را با نماد $|Z|$ نمایش می‌دهیم و:

$$|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \sqrt{(\text{قسمت حقیقی})^2 + (\text{قسمت موهومی})^2}$$

دقت: $Z = x+iy$، پس $\bar{Z} = x-iy$

$$\frac{Z+\bar{Z}}{2} = x = Re(z) \quad \text{و} \quad \frac{Z-\bar{Z}}{2i} = y = Im(z)$$

نکته : فاصله‌ی $z_1$ و $z_2$ به صورت زیر تعریف می‌شود ؛

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

نکته : $|z - z_0| = k$ معادله‌ی مکان هندسی یک دایره به مرکز $z_0 = \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right.$

و شعاع $k$ است .

زیرا ؛

$$|z - z_0| = k$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_1)^2} = k \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k^2$$

که معادله دایره به مرکز $O : \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right.$ و شعاع $k$ است .

بیان ویژگی ها:

۱) $\bar{\bar{z}} = z$

۲) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

۳) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

۴) $z\bar{z} = |z|^2$

۵) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

۶) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

۷) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

۸) $|Re(z)| \leq |z|$

۹) $|Im(z)| \leq |z|$

۱۰) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

۱۱) $|z| = |\bar{z}|$

مثال : مکان هندسی نقاطی در $\mathbb{C}$ را بیابید که در رابطه زیر صدق کند :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}\circ\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}+i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\rightarrow x^2+y^2-2x=0$$

$$(x-1)^2-1+y^2=0$$

$$r=1\;,\;O|! \longleftarrow (x-1)^2+y^2=1$$

موفق باشید