۱- با در نظر گرفتن مقادیر مرجعی برای مشخصات سینماتیکی و سینتیکی، نشان دهید که صورت بی بعد معادلات بقا برای سیالات تراکم ناپذیر غیرنیوتنی به شکل زیر است:

$$\nabla . V = 0$$

$$Re\frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \nabla . \tau$$

$$Pe\frac{DT}{Dt} = \nabla^2 T + \frac{1}{2}Br(\dot{\gamma}:\dot{\gamma})$$

**راهنمایی**: صفحه ۱۲ کتاب Dynamics of Polymeric Liquids را ببینید.

۲- برای معادلات مومنتوم سیال نیوتنی تراکم ناپذیر،

الف) صورت بقایی (Conservative) معادلات مومنتوم را ارائه کنید.

ب) صورت ورتیسیتی این معادلات برای جریانهای دو بعدی و سه بعدی به چه شکل است.

۳- صورت تابع جریانی دو بعدی معادلات جریان سیال نیوتنی و غیر نیوتنی را در دستگاههای مختصات زیر بدست آورید:

الف) دستگاه مختصات دکارتی ($XY$)

ب) دستگاه مختصات قطبی ($R\theta$)

ج) دستگاه مختصات استوانه ای متقارن محوری ($RZ$)

د) توضیح دهید که استفاده از صورت تابع جریانی معادلات بقا به چه صورت به ساده تر شدن حل معادلات جریان کمک می نماید.

۴- در جریان سیال ویسکوالاستیک، بروز رفتار غیرایزوتروپیک (بر اثر اختلاف تنش های نرمال) سبب بروز خطا در محاسبه فشار استاتیکی می شود. با مطالعه صفحات ۶۷-۶۹ کتاب Dynamics of Polymeric Liquids در مورد فشارهای Transverse slot، Circular hole و Longitudinal slot توضیح داده و بر این اساس به سئوال 2B3 صفحه ۹۷ پاسخ دهید.

۵- نشان دهید که روابط زیر بین مشتقات همرفتی تانسور نرخ برش برقرار است:

$$\boldsymbol{\gamma}^{(2)} = \boldsymbol{\gamma}_{(2)} + 2\{\boldsymbol{\gamma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(1)}\}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{(2)} = \boldsymbol{\gamma}^{(2)} - 2\{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\}$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{(3)} = \boldsymbol{\gamma}_{(3)} + 3\{\boldsymbol{\gamma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(2)} + \boldsymbol{\gamma}_{(2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(1)}\} + 6\{\boldsymbol{\gamma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(1)}\}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{(3)} = \boldsymbol{\gamma}^{(3)} - 3\{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)} + \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\} + 6\{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\}$$

۶- عملگر مشتق Jaumann، یکی از مشتقات رایج در مکانیک محیطهای پیوسته است. عملگر این مشتق به شکل زیر تعریف می شود:

$$\frac{\mathscr{D}}{\mathscr{D}t}\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\tau} + \{\boldsymbol{v} \cdot \nabla\boldsymbol{\tau}\} + \tfrac{1}{2}\{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}\}$$

نشان دهید که روابط زیر بین این نوع مشتق و مشتقات همرفتی برقرار است:

$$\begin{aligned}\frac{\mathscr{D}}{\mathscr{D}t}\dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma}^{(2)} - \{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\} \\ &= \boldsymbol{\gamma}_{(2)} + \{\boldsymbol{\gamma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(1)}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathscr{D}^2\dot{\boldsymbol{\gamma}}}{\mathscr{D}t^2} &= \boldsymbol{\gamma}^{(3)} - \tfrac{3}{2}\{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)} + \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\} + 2\{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\} \\ &= \boldsymbol{\gamma}_{(3)} + \tfrac{3}{2}\{\boldsymbol{\gamma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(2)} + \boldsymbol{\gamma}_{(2)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(1)}\} + 2\{\boldsymbol{\gamma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{(1)}\}\end{aligned}$$