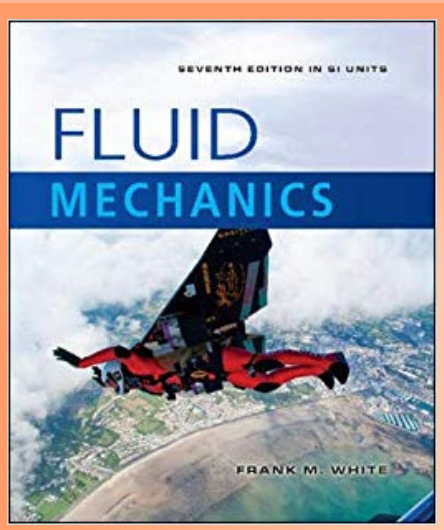


مکانیک سیالات ۲

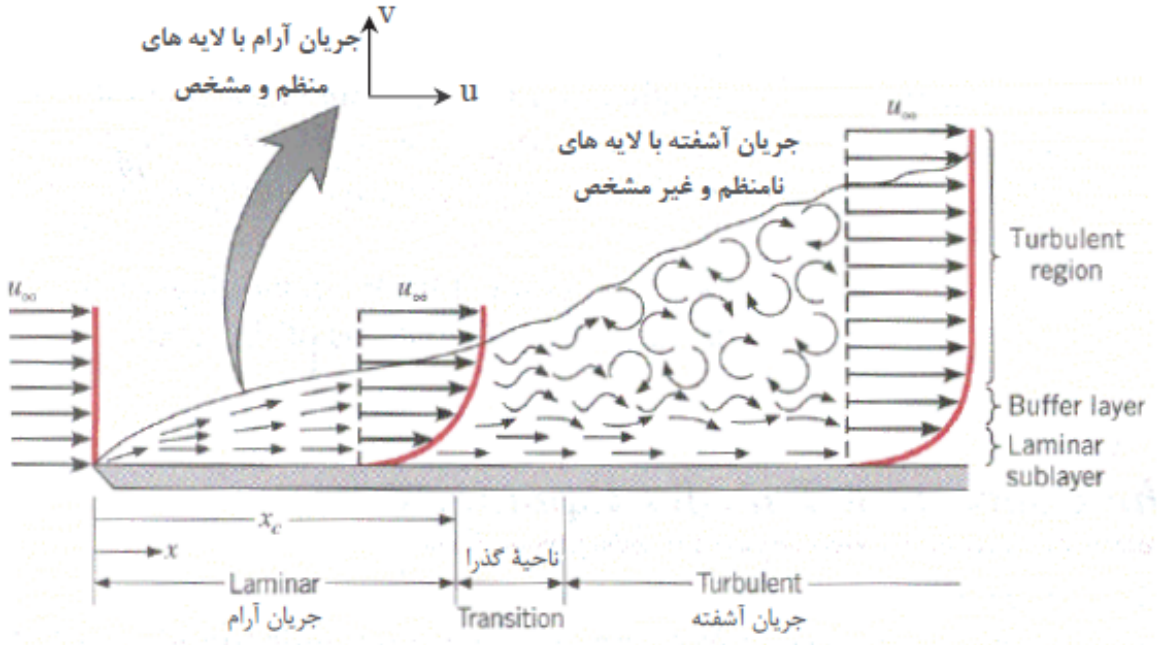
دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک

بخش سوم از مباحث فصل هفتم:
جریان لایه مرزی – جریان آشفته روی صفحه تخت

کلاس درس دکتر نوروزی
اردیبهشت ۹۹

جریان آرام:

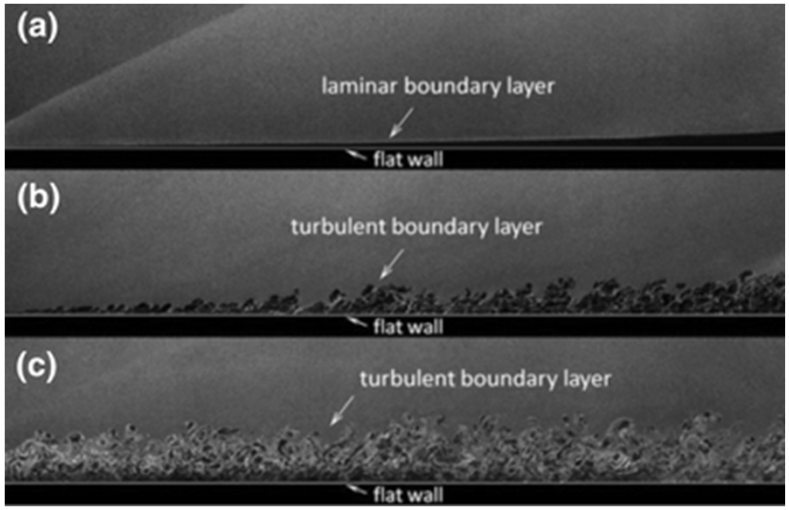
جریان آرام جریانی است که در آن سیال به طریقی منظم و تحت لایه ها و مسیرهای مشخص حرکت میکند، از همینرو برای توصیف آن از عبارت " طبقه طبقه شده، برگرفته از کلمهٔ Laminate " استفاده شده است. در یک جریان آرام، شکل لایه ها مشخص و با انحناهای ملایم می باشند. در چنین جریانی، مولکولهای سیال با پیشروی در طول مسیر، در داخل لایهٔ اولیهٔ خود باقی خواهند ماند. همچنین در چنین جریانی، مولکولهای نزدیک دیواره، کندترین مولکولها بوده و نزدیکترین دما به دمای دیواره را خواهند داشت.

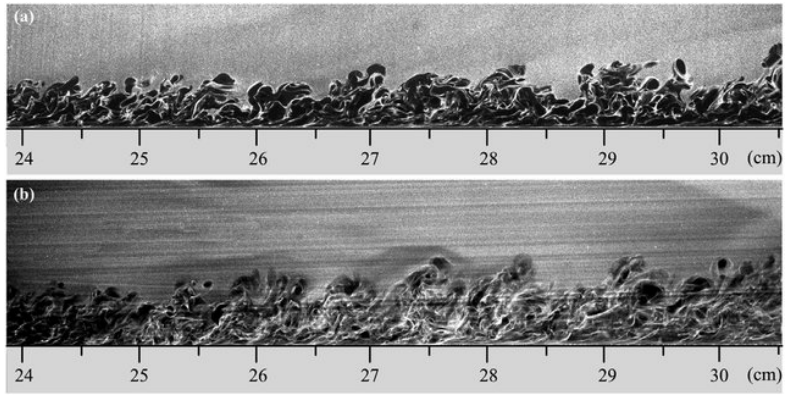


جریان آشفته:

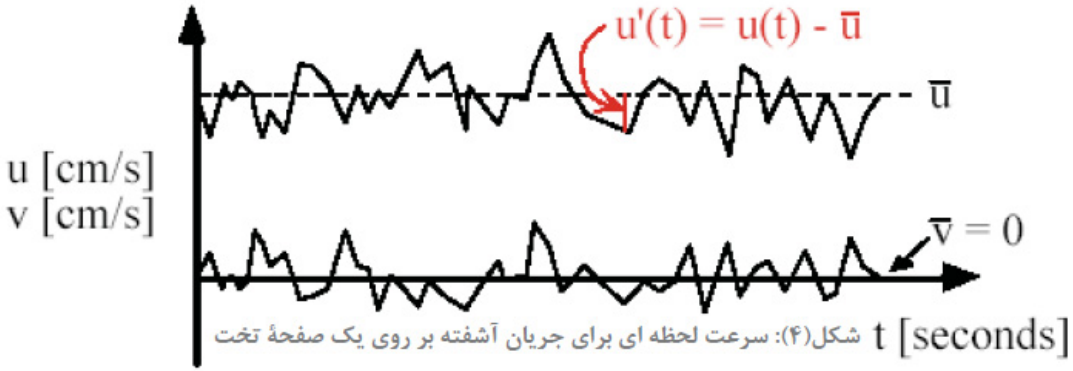
در شکل مربوط به رشد لایهٔ مرزی بر روی یک صفحهٔ تخت، بخش منتهی الیه سمت راست شکل، توصیف کنندهٔ جریان آشفته است.

همانطور که از نام این جریان مشخص است، این جریان رفتاری بسیار اتفاقی و بی سازمان دارد. در این جریان، به واسطهٔ فرآیندهای اختلاطی شدید، جزء در نواحی بسیار نزدیک به دیواره، شکل لایه های جریان به راحتی قابل تشخیص نبوده و مولکولهای سیال مسیر مشخصی را طی نمی کنند. به عبارت دیگر جریان آشفته نوعی از جریان سیال است که در آن سیال تحت نوسانات جریانی[1] و فرآیندهای اختلاطی شدید قرار میگیرد، این رفتار بر خلاف رفتار جریان آرام است که در آن جریان سیال تحت لایه ها و مسیرهای مشخص حرکت می نماید. در یک جریان آشفته، اندازهٔ سرعت در هر نقطه دائماً تحت نوسانات و تغییرات، هم در اندازه و هم در راستای حرکتی، قرار می گیرد، به طوریکه تشخیص موقعیت هر ذره در داخل میدان جریان و نیز در هر لحظه مشکل می باشد. همین وضعیت نوسانات دائمی و غیر مشخص در اندازهٔ سرعت را می توان در اندازهٔ فشار، دما و چگالی هر نقطه مشاهده نمود. البته نوسانات اندازهٔ چگالی تنها در جریانهای تراکم پذیر و یا جریانهای درگیر با انتقال حرارت جابجائی آزاد مشاهده می گردد.





ویژگیهای جریانهای آشفته



شکل(۴): سرعت لحظه ای برای جریان آشفته بر روی یک صفحهٔ تخت

۱- بی نظمی مکانی و زمانی

۲- طیف پیوستهٔ مکانی و زمانی

۳- رینولدزهای بالا (معمولاً)

۴- اضمحلال افزایش یافتهٔ انرژی و ممنتوم

۵- اختلاط افزایش یافته و انتقال حرارت افزایش یافته و ضریب پسای پوسته ای افزایش یافته

۶- سه بعدی بودن (حتی در جریانهایی که ظاهراً دو بعدی می باشند)

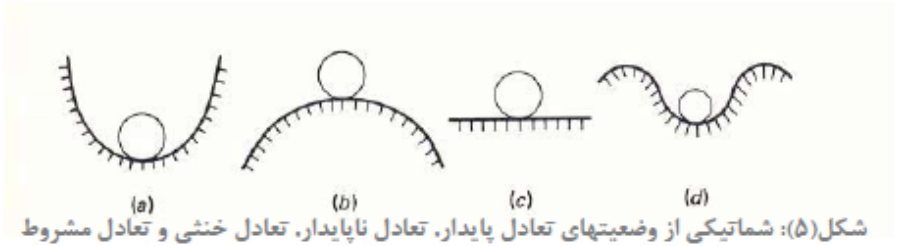
۷- حرکات غالب ورتیسیتال

۸- تناوبی بودن

پایداری جریانات آرام:

بسیاری از جریانات آرامی که با آنها سروکار داریم جریاناتی هستند که ذاتاً ناپایدار هستند؛ بدین معنا که در مقابل حضور و یا تشکیل اغتشاشات احتمالی در جریان، نمی توانند مقاومتی از خود نشان داده و اغتشاشات مزبور در این محیط رشد می نمایند. این اغتشاشات می تواند از معابر بالادستی جریان به درون جریان وارد شده و یا به واسطهٔ بر هم کنش جریان با زبری دیواره، اغتشاشات ناشی از ارتعاش بدنه و حتی سر و صدای محیط، و حتی اغتشاشات ناشی از انجام واکنشهای شیمیائی و غیره باشد. این اغتشاشات همواره خود را به صورت تغییرات موضعی در اندازه و راستای سرعت، اندازهٔ فشار، دما و چگالی جریان بروز می دهند.

به طور کلی یک سیستم هنگامی پایدار محسوب می گردد که در مقابل یک عامل اغتشاشی وارد شده، وضعیت تعادلی خود را حفظ نماید و هنگامی ناپایدار محسوب می گردد که در مقابل عامل اغتشاشی وارد شده، از وضعیت تعادلی خود خارج شده و به وضعیت دیگری منتقل گردد:



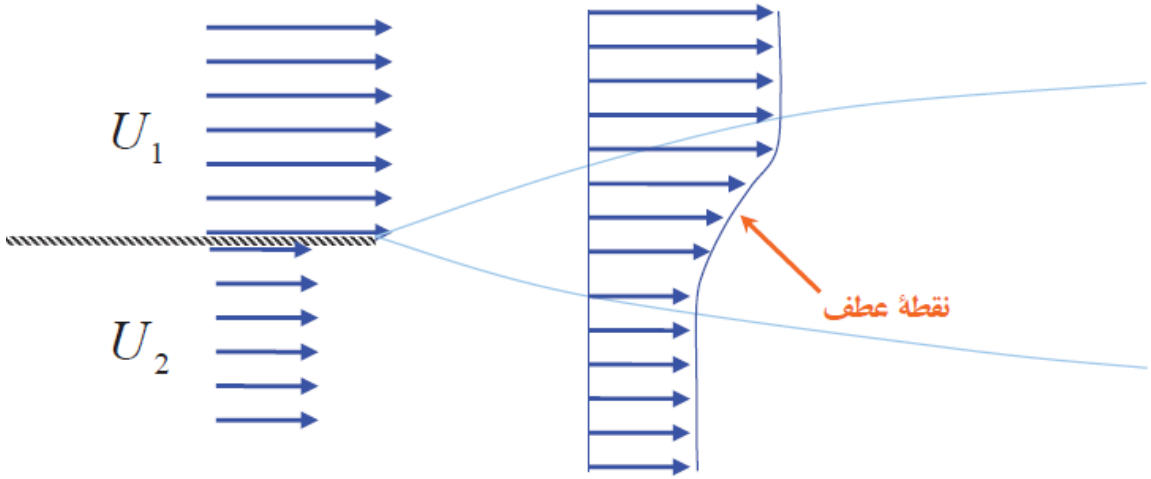
شکل(۵): شماتیکی از وضعیتهای تعادل پایدار، تعادل ناپایدار، تعادل خنثی و تعادل مشروط

آنالیز پایداری اور–سامرفیلد:

بر اساس آنالیز پایداری معادلات ناویر-استوکس، می توان نشان داد که پروفیلهای سرعت دارای نقطه عطف می توانند که ناپایدار شوند.

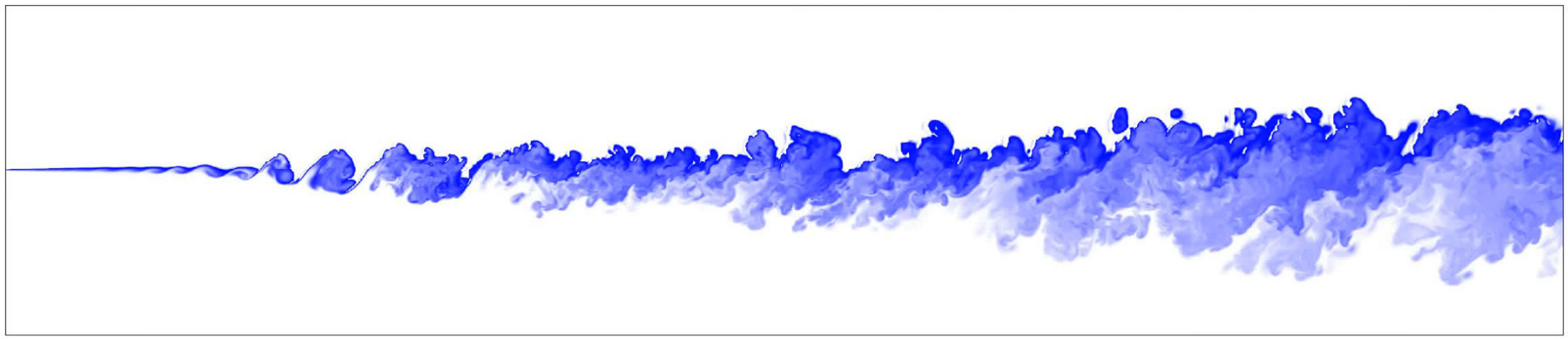
جریانهای کلاسیکی که طبق آنالیز اور–سامرفیلد می توانند ناپایدار شوند:

۱) جریان برشی اختلاطی



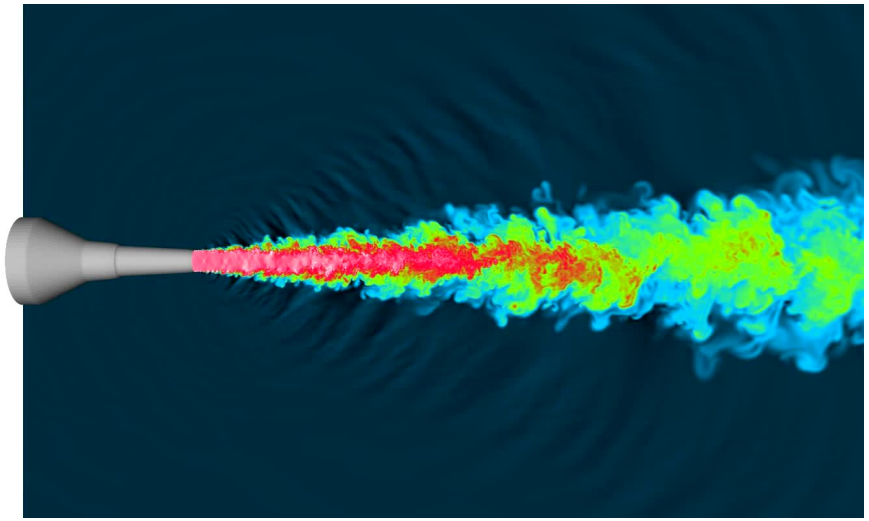
شکل(۹): پروفیل سرعت در یک لایهٔ برشی میان دو پروفیل سرعت با اندازه های متفاوت و نقطهٔ عطف مربوطه

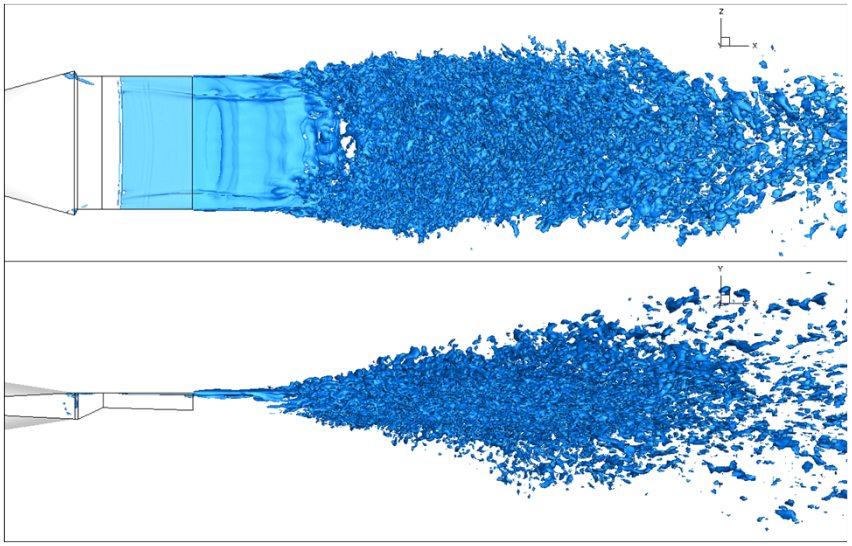
Turbulent mixing layer at high Reynolds number

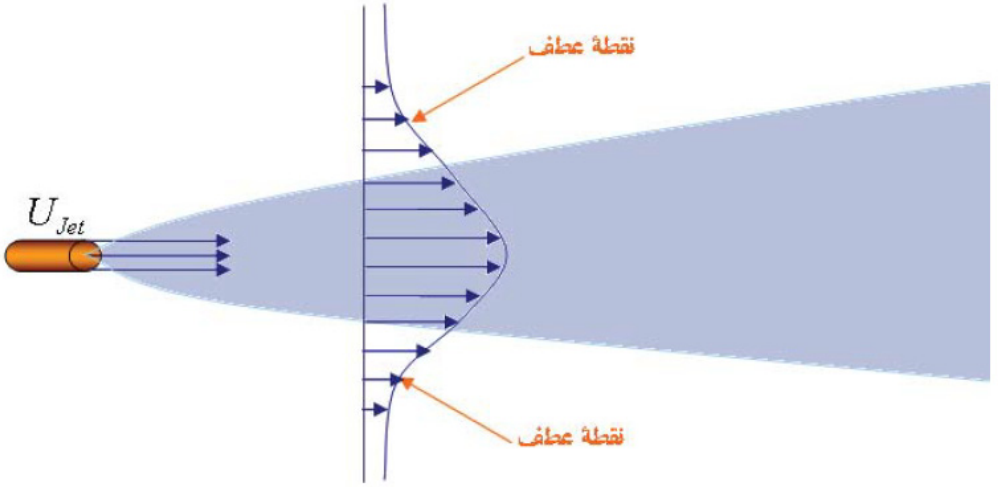


Antonio Attili, Fabrizio Bisetti - Clean Combustion Research Center - KAUST
[Attili and Bisetti, Phys Fluids 2012; Phys Rev E 2013; J Turb 2014; Fiscaletti et al. J Fluid Mech (to appear)]

۲) جریان جت

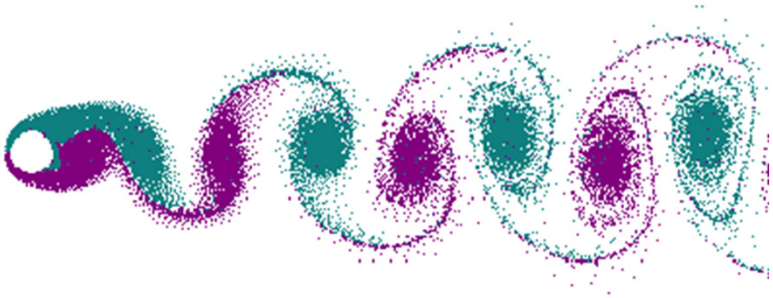


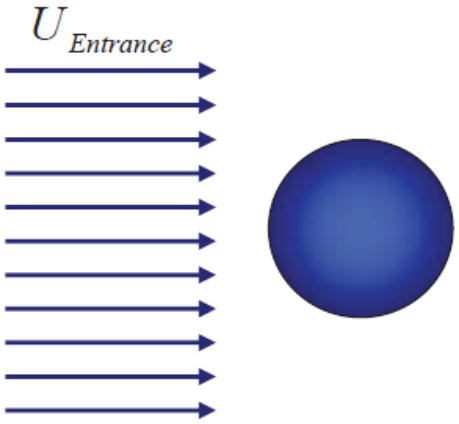


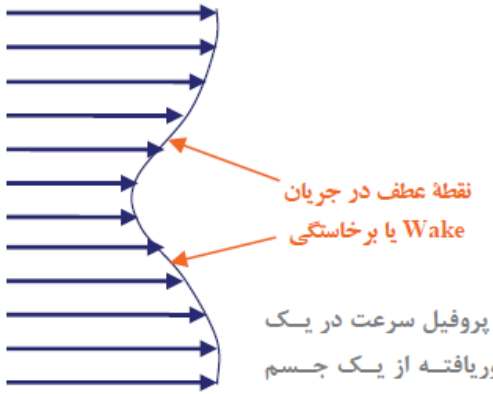


شکل(۱۰): پروفیل سرعت در یک جریان جت خروجی از یک نازل جت

۳) جریان برخاستگی یا Wake



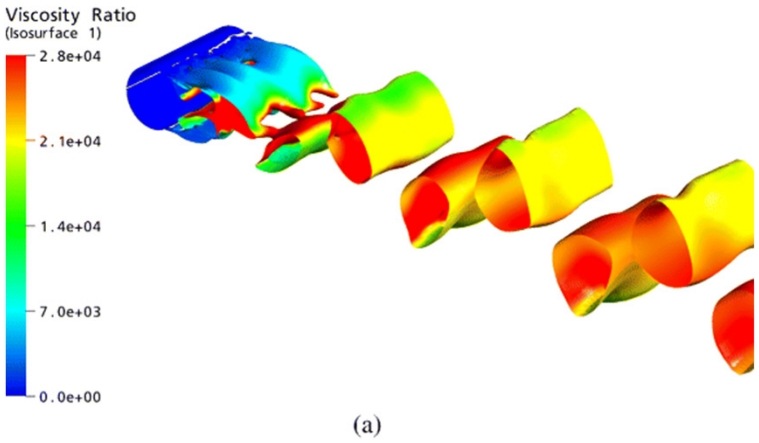




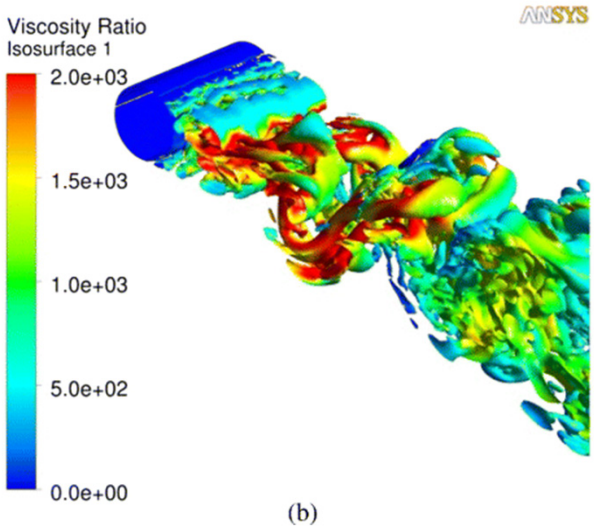
شکل(۱۲): پروفیل سرعت در یک جریان عبوریافته از یک جسم

تشکیل ادی (گردابه های تصادفی) در جریانهای آشفته

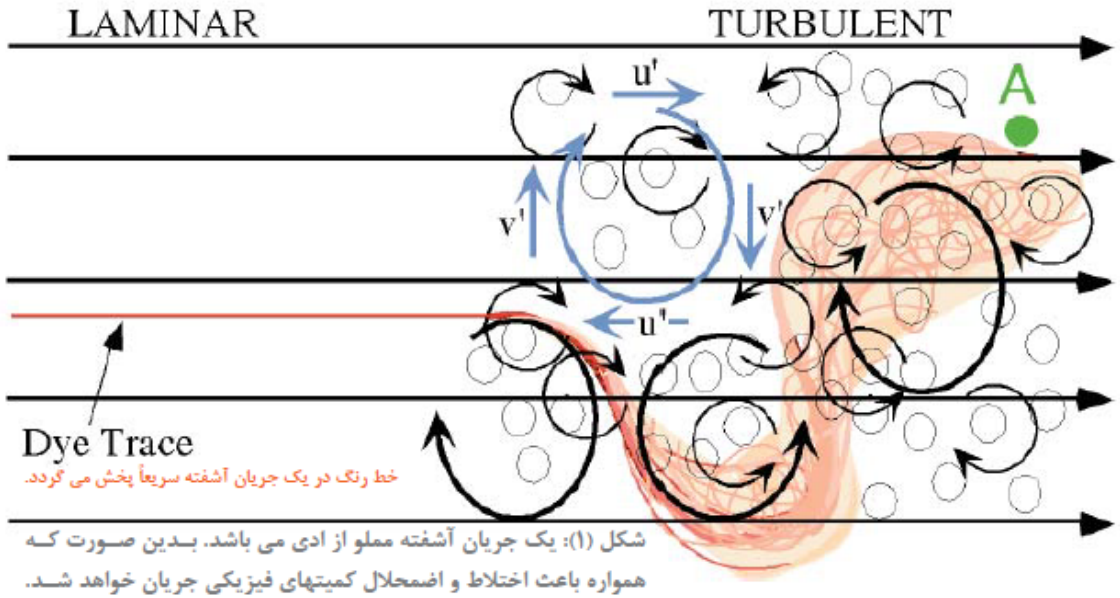
جریانهای آشفته دارای طیف وسیعی از ادی ها (گردابه های تصادفی) سه بعدی در مقیاسهای زمانی و مکانی مختلف (اندازه و سرعتهای متفاوت) هستند.



(a)



(b)



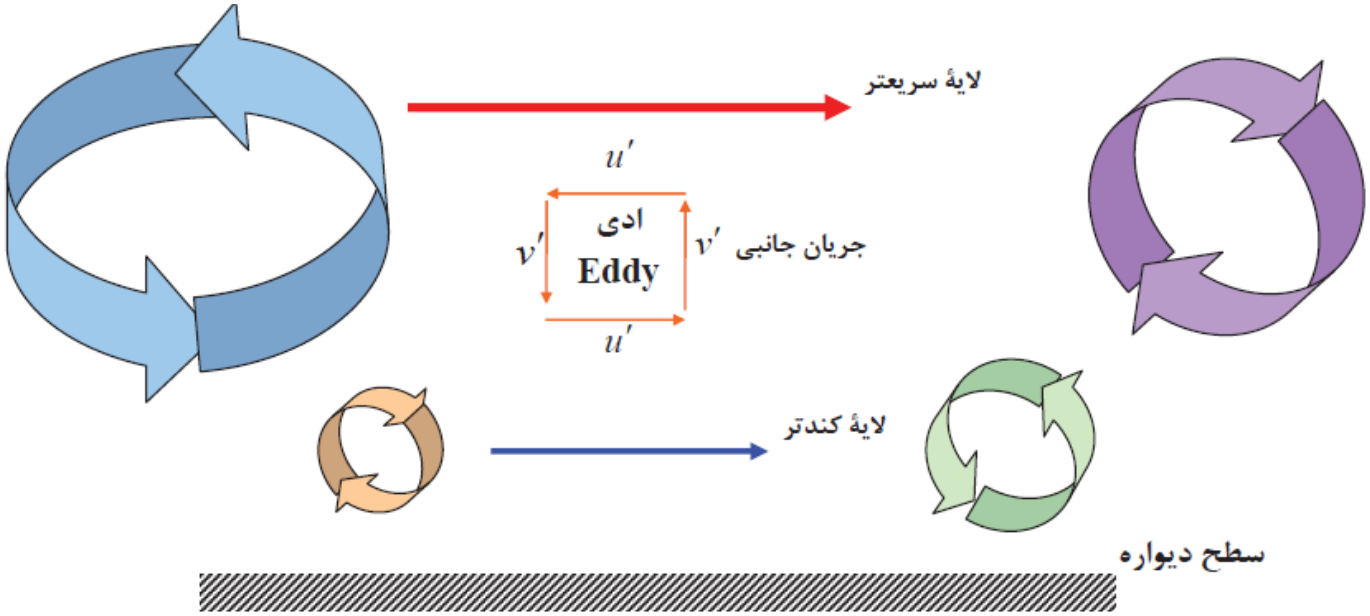
شکل (۱): یک جریان آشفته مملو از ادی می باشد. بدین صورت که همواره باعث اختلاط و اضمحلال کمیتهای فیزیکی جریان خواهد شد.

چگونگی تشکیل ادی ها[۳۸]:

یک جریان آشفته را در نظر بگیرید. به واسطهٔ حرکات اتفاقی[۳۹] و نامنظم[۴۰] ذرات در یک جریان آشفته و وجود اغتشاش یا Fluctuation در جریان (که دارای سرعت مقیاسهای مختلف از چند درصد سرعت متوسط تا صددرصد اندازهٔ سرعت متوسط می باشد)، گاهاً در امتداد عمود بر راستای جریان اصلی، یک سری جریانات جانبی رخ می دهد. به واسطهٔ این عمل، ممنتوم لایه های نزدیک دیواره (که به واسطهٔ ذات اضمحلالی جریان آشفته بخشی از انرژی آنها از دست رفته است) به طور دائمی توسط لایه های پر انرژی بالاتر Refresh می گردد و همین امر باعث می شود که بخشی از ممنتوم از دست رفتهٔ سیال مجاور دیواره توسط لایه های پرانرژی بالاتر جبران گردد.

نتیجهٔ دیگر حرکات اتفاقی و نامنظم جریان در جهت عمود بر جریان، تشکیل ادی می باشد. با در نظر گرفتن این اصل که همواره هر ذرهٔ متحرک سیال تمایل به حفظ ممنتوم خود دارد، وقتی به واسطهٔ یک اغتشاش کوچک یا Fluctuation، ذره ای از سیالِ داخل لایهٔ مرزی بدون وجود پتانسیل لازمه (و تنها تحت اثر ذات ناپایدار جریان) از لایهٔ با ممنتوم کم به لایهٔ با ممنتوم بالا جهش مینماید، برای حفظ و بازگشت ممنتوم ذره به مقدار اولیهٔ خود، ذره در موقعیت جدید خود، حرکتی را در مقیاس کوچک ولی

در خلاف جهت ممنتوم لایهٔ مزبور انجام میدهد تا ممنتوم افزایش یافته مجدداً تا حدی به ممنتوم اولیهٔ خود کاهش یابد.. مجموعهٔ این نوع حرکات در کنار تمایل جریان به حفظ قانون پیوستگی، منجر به تشکیل ادی می گردد. همین توصیف در مورد ذراتی که از لایهٔ با ممنتوم بالا به لایهٔ با ممنتوم پائین منتقل می گردند و در نهایت باعث تشکیل ادی می گردند نیز صحیح می باشد.



شکل(۱۵): ادی ها در یک جریان آشفته و چگونگی توزیع کمیتهای فیزیکی در داخل جریان

مروری بر خواص جریانات آشفته در مقایسه با جریانات آرام:

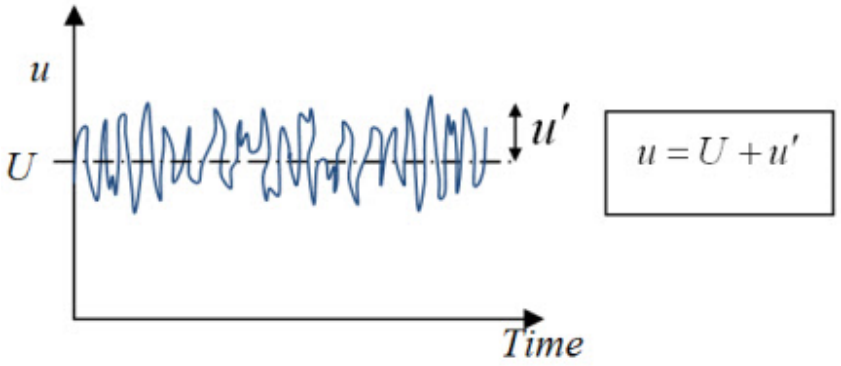
برای مقایسهٔ جریانات آرام و آشفته ذکر نکات ذیل لازم می باشد:

۱- یک جریان آشفته، به واسطهٔ ادیهای موجود در ساختار خود از یک جریان آرام تمیز داده میشود. ادیهای موجود در جریانات آشفته، باعث ایجاد نوسان[۳۷] در میدان سرعت، فشار، دما و چگالی و حتی غلظت جریان می شوند. همین ادیها باعث ایجاد Randomness و نوعی عدم قطعیت در تعیین مقادیر صریح متغیرهای جریانی در توزیع میدان جریان میگردند. (اگر چه نوسانات میدان سرعت به خودی خود نیز به نوعی باعث تشکیل ادی می گردند). در ادامه به بررسی اجمالی چگونگی تشکیل ادی می پردازیم.

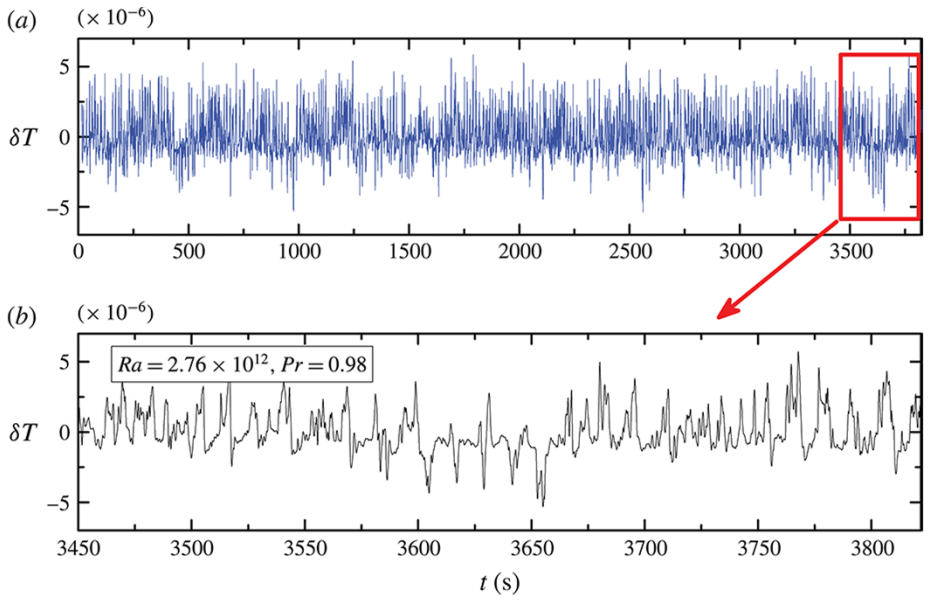
۲- جریانات آرام دارای Randomness تنها در مقیاس مولکولی[۴۱] می باشند که اصطلاحاً به آن نفوذ یا اختلاط مولکولی[۴۲]گفته می شود. یعنی آنچه باعث نفوذ، پخش و یا دیفیوژن (توزیع) کمیتهای فیزیکی نظیر حرارت یا ممنتوم در داخل جریان می شود، خواصی مولکولی نظیر هدایت حرارتی k و یا ویسکوزیتهٔ μ و با استفاده از حرکت مولکولها در مقیاس Mean Free Path می باشند.

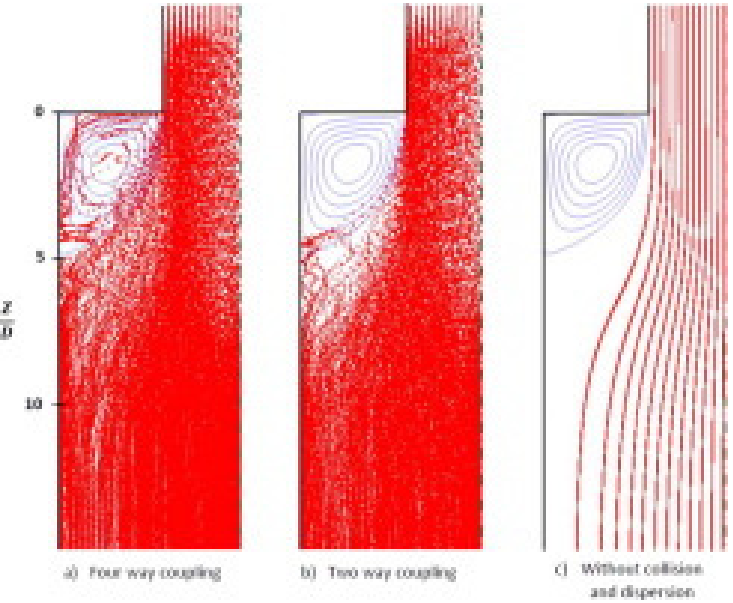
۳- در یک جریان آشفته، نوسانات میدان جریان و Randomness موجـود در جریـان، بـر روی طیـف وسیعی از مقیاسها (به واسطهٔ حضور ادیهائی در مقیاسهای مختلف) رخ می دهد. آشفتگی در واقعیت امر یک پدیدهٔ وابسته به زمان، سه بعدی و به شدت غیر خطی است.

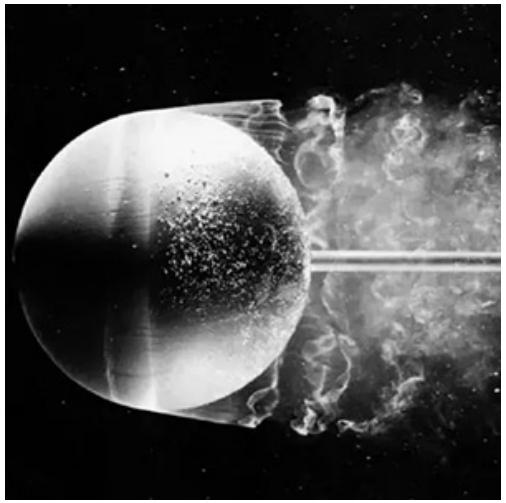
۴- اندازهٔ ساختارهای موجود در جریان آشفته (مثلاً ادیهای موجـود در جریـان آشـفته)، مـی توانـد از مقادیر نزدیک به مقیاس مولکولی تا بزرگترین طول مقیاسهای جریـان (نظیـر قطـر لولـه یـا طـول صفحه) باشد.



$$u = U + u'$$







۵- نوسانات میدان سرعت می تواند از چند درصد مقدار سرعت متوسط تا ۱۰۰ درصد مقدار سرعت متوسط در هر دو سوی مثبت و منفی باشند.

۶- Dynamic Fluctuation که ذات جریانات آشفته می باشد، می تواند باعث اختلاط و نیز تبادل شدید ممنتوم و حرارت گردد، از همینرو جریانات آشفته جریاناتی شدیداً اضمحلالی[۴۳]، با ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت بالا در مقایسه با جریانات آرام محسوب می شوند. هر چه میزان Fluctuation در مقیاس بزرگتری رخ دهد، اندازهٔ تبادل ممنتوم و حرارت بزرگتر خواهد بود. بنابراین (با در نظر گرفتن افت فشار افزایش یافته در جریانات آشفته)، در مسائل درگیر با انتقال حرارت و یا انتقال جرم، آشفته نمودن جریان و به هر وسیلهٔ ممکن همواره مد نظر مهندسین میباشد.

۷- بزرگترین ادی های موجود در یک جریان آشفته، به واسطهٔ ناپایداریهای هیدرودینامیک موجود در میدان جریان متوسط به وجود می آیند. به عنوان مثال برشی که بین جریان و مرزهای جامد وجود دارد و یا لایه لایه شدنهای ناپایدار[۴۴] ایجاد شده به واسطهٔ گرمایش سیال توسط سطوح جامد تحتانی، باعث تشکیل ادی در ابعاد و مقیاسهای بزرگ جریانی می شوند.

۸- دینامیک و خواص هندسی بزرگترین ادی ها متناسب با خواص میدان جریان متوسط می باشند. به عنوان مثال، ورتیسیته های بزرگ ناپایدار[۴۵] تشکیل شده بر روی محیط خارجی یک جت گرد آشفته، تمایل به داشتن ساختار حلقوی[۴۶] دارند.

۹- طول مقیاس و زمان مقیاس مربوط به کوچکترین ادی ها چندین مرتبه بزرگتر از طول مقیاس و زمان مقیاس مربوط به حرکت مولکولی می باشد. به طور کلی، فرآیندهای اضمحلال لزج[۴۷] به طور آماری مستقل از حرکت مولکولی و مقیاسهای مربوطه می باشند.

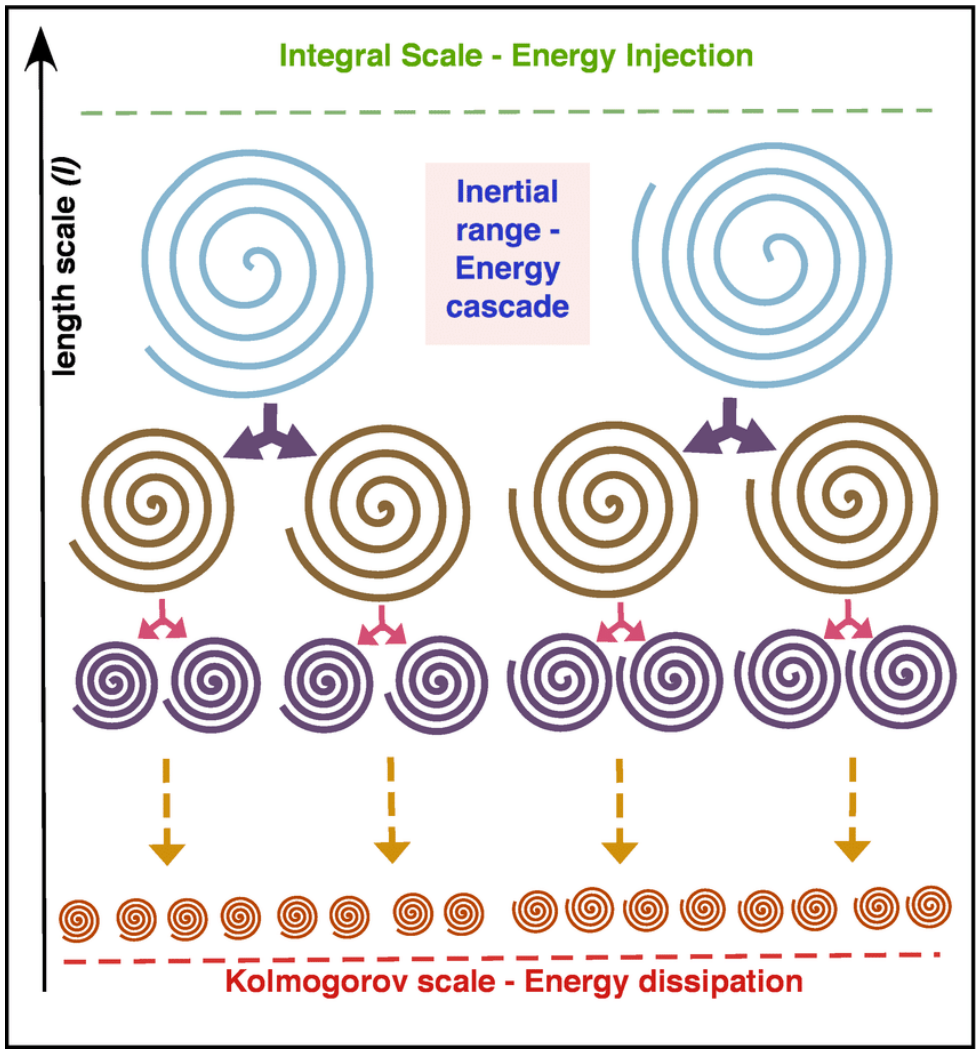
۱۰-بزرگترین ادی ها طی چندین مرحله و به صورت متوالی به ادی های کوچکتر شکسته می شوند. این تقسیم ادی ها از مقیاس بزرگ به مقیاسهای کوچکتر، باعث انتقال و تقسیم انرژی از جریان متوسط به مقیاسهای کوچکتر حرکت می گردد که به آن اصطلاحاً آبشار انرژی[۴۸]گفته می شود. اصل بقای ممنتوم زاویه ای (برای اجسام دوار) بیان می کند که هر چه شعاع دوران یک جسم دوران کنندهٔ با انرژی دورانی ثابت کوچکتر گردد، اندازهٔ سرعت دورانی آن افزایش می یابد و بالعکس. در این بین

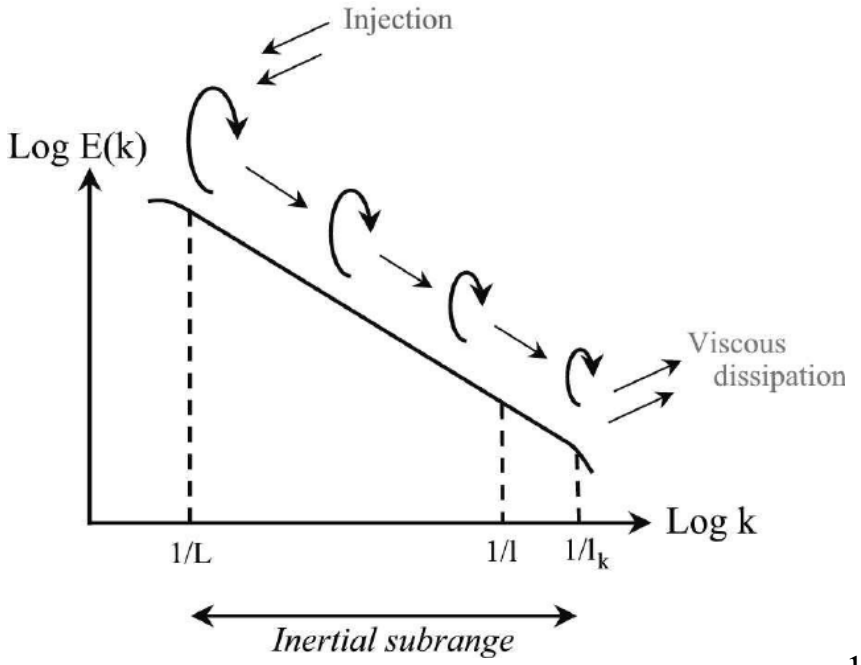
و در مبحث مربوط به تقسیم ادیها، کوچکترین ادی ها به واسطهٔ چرخش سریع به دور خـود، باعـث اضمحلال سریعتر انرژی جنبشی دورانی منتقل شده به خود می گردند. فرآینـد تقـسیم ادی هـا بـه ادی های کوچکتر تا جائی ادامه پیدا می کند که که افزایش سرعت دورانی ادیها و نیز افـزایش نـرخ اضمحلالی آنها به یک سطح تعادلی برسند.

۱۱- همانطور که اشاره شد جریانات آشفته شامل ادی هـای درهـم پیچیـده و در انـدازه هـای مختلـف میباشد. برای حل کاملاً دقیق یک میدان جریان آشـفته بـا اسـتفادهٔ مـستقیم از معـادلات بقـاء، بـه طوریکه جزئی ترین پدیده ها نیز مد نظر قـرار گرفتـه باشـند، لازم اسـت کـه از شـبکهٔ محاسـباتی استفاده نمائیم که اندازهٔ المانهای آن کوچکتر از کوچکترین ادیهای موجود در جریان باشد. یعنی هر یک از کوچکترین ادیها به تنهائی توسط چند المان کوچکتر گسسته گردند. بدین منظـور ابتـدا لازم است که اندازهٔ کوچکترین ادیها بر حسب طول مقیاس کولموگروف[۴۹] تعیین گردند.

آبشار انرژی

ادیهای بزرگ انرژی خود را از یک منبع قدرت (هیدرودینامیک جریان اصلی) دریافت می کنند و با مکانیزم کشش گردابه دائما به گردابه های کوچکتر تقسیم می شوند تا نهایتا گردابه های کوچک در اثر ویسکوزیته از بین می روند.





Entry #: V0004

Vortex reconnection cascade via direct numerical simulation up to $Re=\Gamma/\nu=40,000$

Jie Yao, Fazle Hussain

Texas Tech University

طول مقیاس کولموگروف:

اندازهٔ کوچکترین ادیها هم مرتبهٔ اندازهٔ طول مقیاس کولموگروف، η ، می باشند. وی ثابت نمـوده که:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$$

در آن ν ویسکوزیتهٔ سینماتیک و ε نرخ اضمحلال انرژی جنبشی آشفته می باشد:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},\ \varepsilon = Dissipation\ of\ T.K.E.,\ Where\ \ T.K.E. = \frac{1}{2}\left\{u'^2 + v'^2 + w'^2\right\}$$

به همین ترتیب یک سرعت مقیاس کولموگروف نیز تعریف می شود:

$$\upsilon = (\varepsilon\nu)^{1/4}$$

بعد از آنکه ادیها به اندازه هائی در حد طول مقیاس کولموگروف شکسته شدند، انرژی خود را به وسیلهٔ اضمحلال لزج به گرما تبدیل می کنند که نرخ اضمحلال مربوطه را با ε نشان داده می شود:

$$\varepsilon = A\frac{u'^3}{l_e}$$

که در آن، A ضریبی ثابت از مرتبهٔ واحد، u' نوسان سرعت یا Velocity Fluctuation و l_e اندازهٔ متوسط ادی حامل انرژی است.

با این فرض که $l_e \propto L_r$ است، (که در آن L_r همان طول مقیاس مساله مانند طول صفحه یا قطر لوله یا ...) است و با در نظر گرفتن U_r (که همان سرعت مقیاس مساله است) و با این فرض که $u' \propto U_r$ می باشد، آنگاه می توان اینطور اظهار داشت که در مدلسازی یک جریان آشفتهٔ سه بعدی، دامنهٔ محاسباتی از مرتبهٔ L_r^3 و فاصلهٔ بین المانها از مرتبهٔ η^3 می باشد. بنابراین تعداد کل المانهای مورد نیاز $\left(\frac{L_r}{\eta}\right)^3$ می باشد. با تعریف عدد رینولدز کلی جریان به صورت $\mathrm{Re} = \frac{U_r L_r}{\nu}$، در اینصورت:

$$\frac{L_r}{\eta} = \frac{L_r \varepsilon^{1/4}}{\nu^{3/4}} = \frac{L_r U^{3/4}}{\nu^{3/4} L_r^{1/4}} = \mathrm{Re}^{3/4}$$

از آنجا که در کاربردهای مهندسی عدد رینولدز معمولاً دارای مقداری بین $۱۰^۵$ تا $۱۰^۸$ است، بنابراین اندازهٔ کوچکترین ادی ها چیزی در حدود $10^{-6} \sim 10^{-4}$ برابر طول مقیاس مساله است.

زمان مورد نیاز برای بررسی کل جریان حداقل بایستی برابر زمان مقیاس بزرگترین ادی یا T باشد:

$$T = \frac{L_r}{U}$$

و گام زمانی مورد استفاده بایستی برابر $\Delta t = \frac{\eta}{\upsilon}$ باشد. تعداد کل گامهای زمانی مورد نیاز برای مدلسازی دقیق یک مسالهٔ آشفته برابر $\frac{T}{\Delta t}$ می باشد. لذا تعداد کل گامهای زمانی مورد نیاز برابر است با:

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{L_r \upsilon}{\eta U} = \frac{L_r (\nu\varepsilon)}{\nu^{3/4} / \varepsilon^{1/4} U} = \mathrm{Re}^{1/2}$$

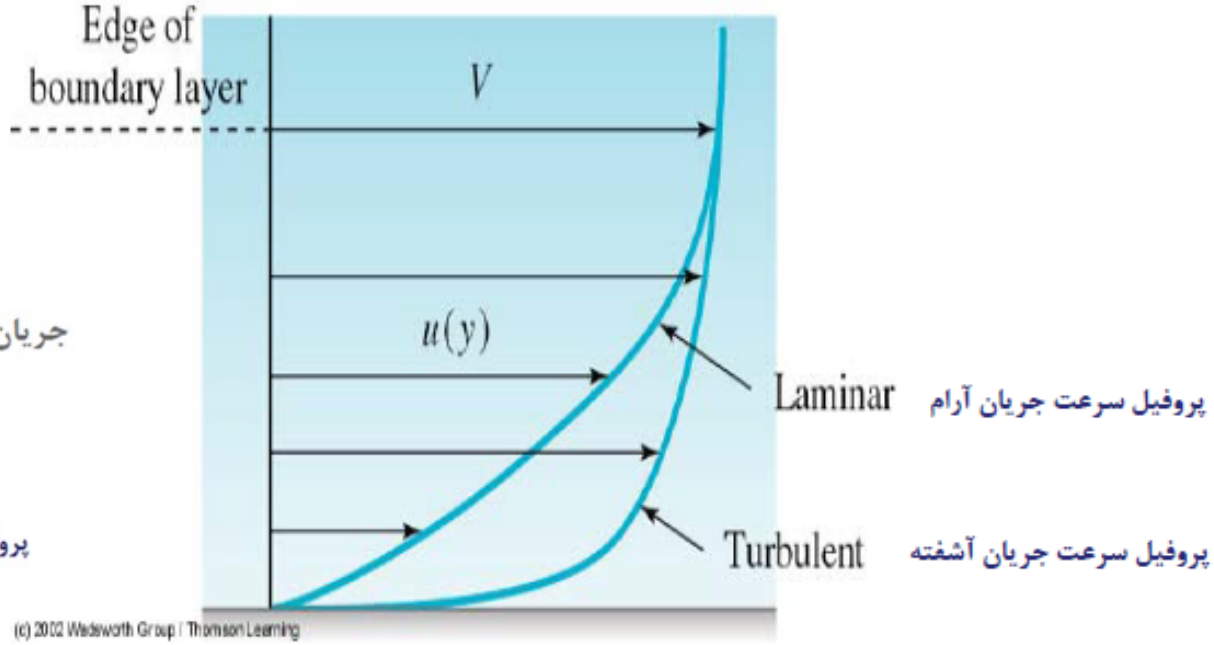
نظر گرفتن جزئی ترین پدیده ها از مرتبهٔ $\mathrm{Re}^{11/4}$ (و یا از مرتبهٔ $۱۰^{۱۳}$ تا $۱۰^{۲۲}$ نود محاسباتی – اعم از نود فضائی یا نود زمانی) می شود. به عنوان نمونه، برای محاسبهٔ دقیق جریان آشفتهٔ داخل یک لوله، چنانچه از ابرکامپیوتر CRAY استفاده گردد، به $۱۰^{۶}$ تا $۱۰^{۹}$ روز محاسبهٔ دائم این ابرکامپیوتر نیاز میباشد که به اندازهٔ چندین برابر عمر فعلی جهان هستی می باشد!

۱۲-در جریانات آشفته معمولاً با Fluctuation در مقیاسهای بزرگ سروکار داریم که باعث اختلاط جریان می گردد. تقریباً غیر ممکن است که بدون رسیدن به حالت آشفته، فرآیند اختلاط موثری را شاهد باشیم. در سیالات با ویسکوزیتهٔ پائین، به واسطهٔ پائین بودن نیروهای لزجت در مقایسه با نیروهای اینرسیال، رسیدن به حالت آشفته در مقایسه با سیالات با ویسکوزیتهٔ بالا راحتتر است. بنابراین در فرآیندهای اختلاطی معمولاً سعی می شود به نوعی ویسکوزیتهٔ سیال پائین آورده شود، این امر یا با افزایش دمای مایعات، یا کاهش دمای گازها و یا افزودن مواد روانساز به مخلوط صورت می پذیرد. معمولاً اختلاطها در حالت جریان Laminar اختلاطهای غیر موثری می باشند.

۱۳- افت فشار در یک جریان آشفته بسیار بزرگتر از جریان آرام است. بنابراین داشتن جریان آرام در خطوط انتقال جریان مطلوبتر از جریان آشفته می باشد. جریان خون در رگهای بدن نمونه ای از جریان آرام سیالی غیر نیوتنی است.

۱۴-پروفیل سرعت جریانات آشفته نسبت به جریانات آرام، مسطح تـر مـی باشـد، و بـالتبع آن گرادیـان سرعت در نزدیکی دیواره و تنش برشی ناشی از آن در جریانات آشفته بیش از جریانات آرام میباشد. به واسطهٔ کوپل بودن توزیع سرعت و دما با یکدیگر، افزایش گرادیان سرعت در نزدیکی دیواره باعـث افزایش انتقال حرارت از دیواره نیز می گردد.

$$\left(\frac{u}{U}\right)_{\text{turb}} \approx \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

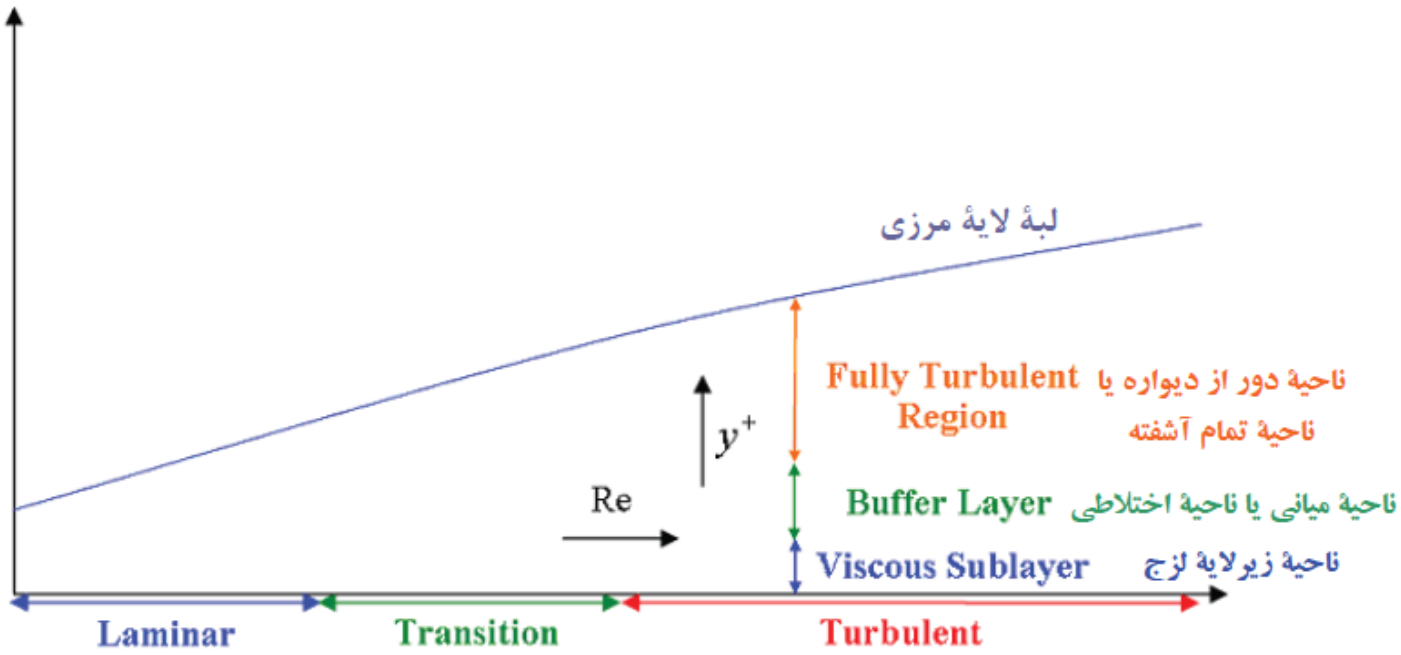


شکل (۱۷-۱): جریان بر روی یک صفحهٔ تخت

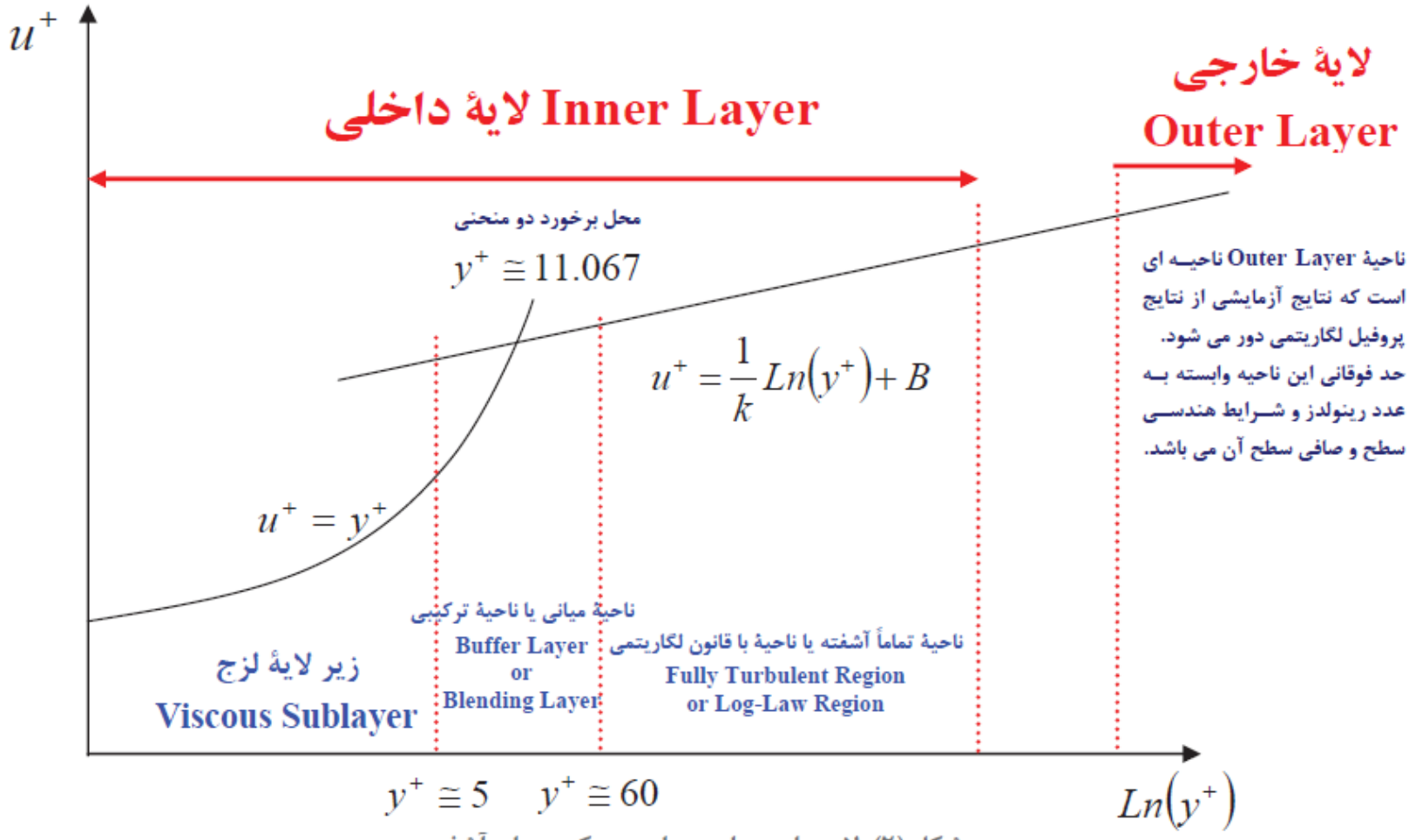
پارامترهای بی بعد لایه مرزی جریان آشفته

معمولا برای توصیف لایه مرزی جریانهای آشفته از پارامترهای بی بعد u^+ و y^+ استفاده می شود:

$$u^+ = \frac{u}{u^*} \qquad Where\ u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \qquad y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu}$$



شکل (۱): پروفیل سرعت در یک جریان آشفته و لایه های مختلف جریان مجاور دیواره



شکل (۲): لایه های مجاور دیواره در یک جریان آشفته

معیار صاف بودن یا زبر بودن یک سطح چیست؟

تحقیقات سیستماتیک اولیه در مورد اثر زبری سطح، ابتدا توسط نیکورادزه[۲۱] مطرح شد. وی تحقیقات گسترده ای را بر روی جریان درون لوله های زبر انجام داد. وی برای این منظور درون لوله ها را با ماسه هائی با دانه بندی یکنواخت پوشانده بود. زبری نسبی دانه های ماسه می تواند در طیف وسیعی از اندازه ها و با توجه به انتخاب اقطار مختلف برای لوله و نیز اندازه های مختلف دانه های ماسه قرار گیرد. چنانچه اندازهٔ دانهٔ ماسه[۲۲] را با y_s نمایش دهیم، و عدد رینولدز زبری را به صورت $y_s^+ = \frac{\rho u^* y_s}{\mu}$ تعریف نمائیم، در اینصورت:

$0 < y_s^+ < 5$ سطح صاف است.

$5 < y_s^+ < 70$ سطح نیمه صاف است.

$y_s^+ > 70$ سطح زبر است.

مشخصات جریان آشفته روی صفحه تخت

بطور کلی، برای توصیف نواحی آرام، انتقال و آشفته از عدد رینولدز استفاده می شود.

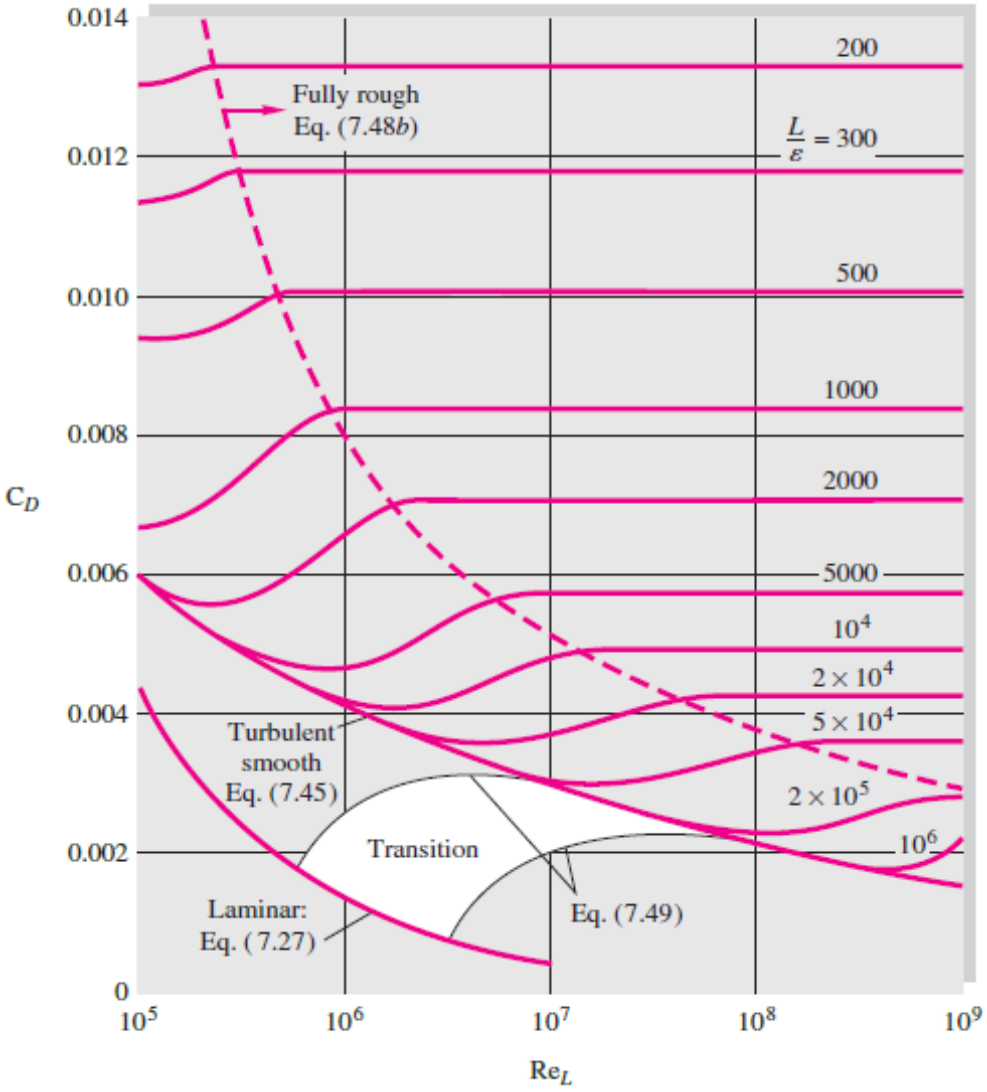
$$\begin{cases} Re_x < 5\times 10^5: & \text{Laminar Flow} \\ 5\times 10^5 < Re_x < Re_{tu}: & \text{Transitional Flow} \\ Re_x > Re_{tu}: & \text{Turbulent Flow} \end{cases}$$

در خصوص عدد رینولدز شروع جریان آشفته (Re_{tu}) روی صفحه تخت صاف (غیر زبر) بدون گرادیان فشار، مقادیر متفاوتی گزارش شده که معمولا در محدوده 10^7 تا 8×10^7 است. همچنین بسته به میزان زبری سطح، مقدار Re_{tu} تغییر می کند. بر اساس مشاهدات پرانتل، روابط زیر برای لایه مرزی جریان آشفته روی صفحه تخت صاف بدون گرادیان فشار بدست آمده است:

$$\frac{u}{U}\approx\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \qquad \frac{\delta}{x}=\frac{0.16}{Re_x^{1/7}} \qquad C_f=\frac{0.027}{Re_x^{1/7}} \qquad C_D=\frac{0.031}{Re_L^{1/7}}=\frac{7}{6}C_f(L)$$

همچنین به سادگی می توان برای سایر پارامترهای لایه مرزی این جریان می توان نشان داد:

$$\delta^*=\frac{1}{8}\delta, \qquad \theta=\frac{7}{72}\delta \qquad \& \qquad H=\frac{\delta^*}{\theta}=1.3$$



از شکل مقابل برای تخمین ضریب درگ صفحات تخت بدون گرادیان فشار استفاده می شود. در اینجا L طول صفحه و ε اندازه زبری معادل نیکوراتزه است. مطابق شکل، با افزایش زبری (کاهش نسبت L/ε)، مقدار ضریب درگ جریان به طور چشمگیری افزایش می یابد. همچنین به ازای مقادیر بزرگ عدد رینولدز، ضریب درگ صفحات زبر، فقط تابعی از مقدار زبری و مستقل از عدد رینولدز است. این ناحیه به اصطلاح ناحیه کاملا زبر (Fully Rough) نامیده می شود. همچنین دو رابطه زیر برای ضریب درگ در ناحیه انتقال پیشنهاد شده است:

$$C_D \approx \begin{cases} \dfrac{0.031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}} - \dfrac{1440}{\mathrm{Re}_L} & \mathrm{Re}_{\mathrm{trans}} = 5 \times 10^5 \\ \dfrac{0.031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}} - \dfrac{8700}{\mathrm{Re}_L} & \mathrm{Re}_{\mathrm{trans}} = 3 \times 10^6 \end{cases}$$

FINISH