Robotics

References:

[1] John J. Craig, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control* . 3rd Edition, Prentice Hall, 2004.

[2] Gregory Dudek and Michael Jenkin, *Computational Principles of Mobile Robotics*. Second Edition, Cambridge University Press, New York, NY, 2010.

[3] Siegwart & Nourbakhsh, *Introduction to Autonomous Mobile Robot*. MIT Press, 2004.

۱- مقدمه

ربات چیست؟ چرا و چگونه مورد استفاده قرار می‌گیرد. بررسی رباتهای متحرک و صنعتی و اختلاف آنها، تعریف و مشخص کردن سنسورهای مورد نیاز ربات متحرک

۲- توصیف موقعیت و تبدیلات آن

سیستم مختصات، نمایش موقعیت، زوایای اویلر، نمایش چرخش، انتقال همگن

۳- سینماتیک بازوهای صنعتی

سینماتیک مستقیم، سینماتیک معکوس، روابط D-H

۴- سنسورها

سنسورهای برخورد، انکدر، سونار، لیزر، قطب نما، GPS و IMU

۵- جابجائی ربات متحرک

ربات تفاضلی، ربات چهار چرخ، ربات تمام جهت

۶- سینماتیک ربات متحرک و کنترل حرکت

سینماتیک مستقیم و معکوس ربات متحرک، کنترل حرکت حلقه باز و حلقه بسته

۷- برنامه‌ریزی مسیر

برنامه‌ریزی با اطلاعات کامل، فضای موقعیت، گراف دیداری، دیاگرام ورونوی، میدان پتانسیل، تجزیه سلولی، پرهیز از موانع، مسیریابی در حضور موانع متحرک، نقشه راه احتمالاتی(PRMs)، درخت‌های تصادفی گسترش یابنده سریع (RRTs)

۸- نقشه‌سازی و مکان‌یابی

نقشه‌های متریک، نقشه توپولوژیک، مکان یابی، Dead reckoning، استفاده از نشانه‌ها (Landmarks)، ترکیب داده‌های انکدر و سونار برای ساخت نقشه، تخمین موقعیت، فیلتر بیز

۹- نقشه‌سازی و مکان‌یابی همزمان

فیلتر کالمن، SLAM

۱۰- معماری نرم‌افزار

معمای واکنشی، ترکیبی، مبتنی بر رفتار و سلسله مراتبی

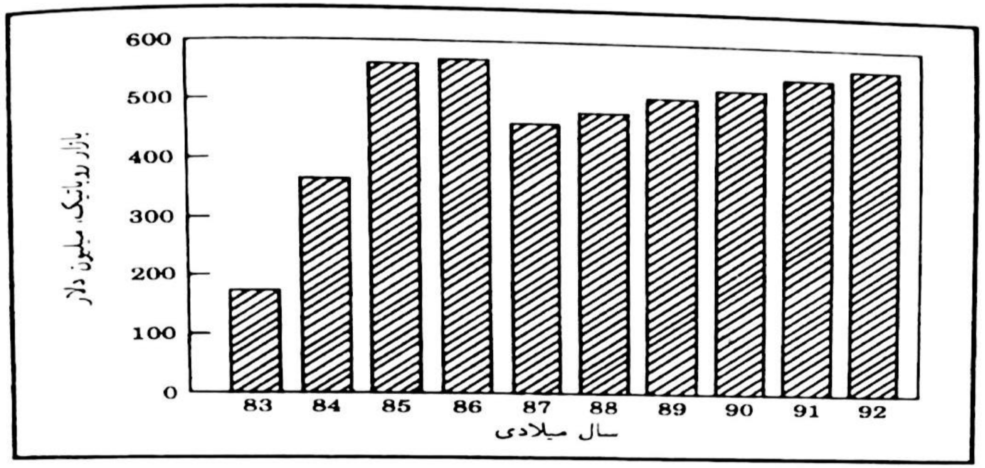
جعبه ابزار

- http://www.petercorke.com

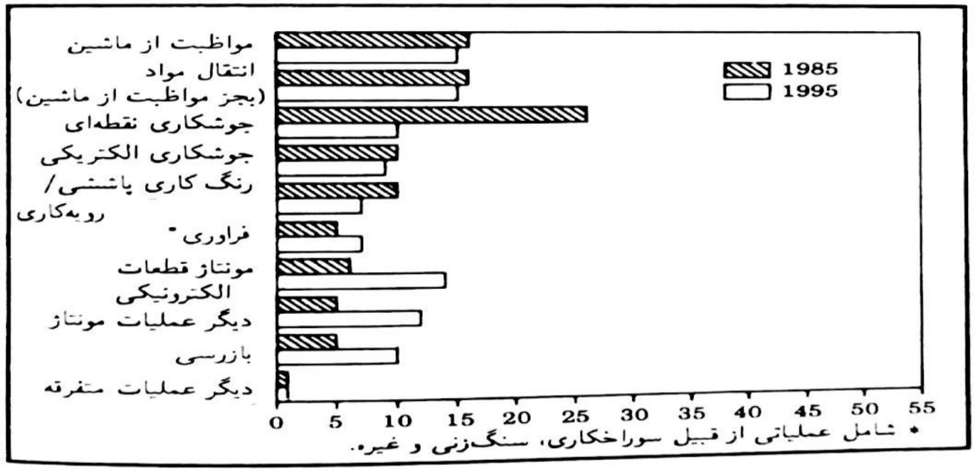
مقدمه

تاریخ اتوماسیون صنعتی با دوره‌هایی مشخص می‌شود که در آنها تغییرات سریع و ناگهانی در روشهای معمول صورت گرفته است. به نظر می‌رسد که این دوره‌های تغییر در فنون اتوماسیون، به‌صورت علت و شاید معلول، با اقتصاد جهانی عمیقاً همبسته باشد. استفاده از روبات صنعتی، که در دههٔ ۱۹۶۰ میلادی به‌عنوان دستگاهی منحصر به فرد شناخته شد، به همراه سیستمهای طراحی به‌کمک کامپیوتر (CAD) و سیستمهای تولید به کمک کامپیوتر (CAM)، مشخصهٔ آخرین روندهای اتوماسیون فرایند تولید است [۱]. این تکنولوژیها، اتوماسیون صنعتی را به گذار دیگری که چشم‌انداز آن هنوز نامعلوم است، هدایت می‌کنند.

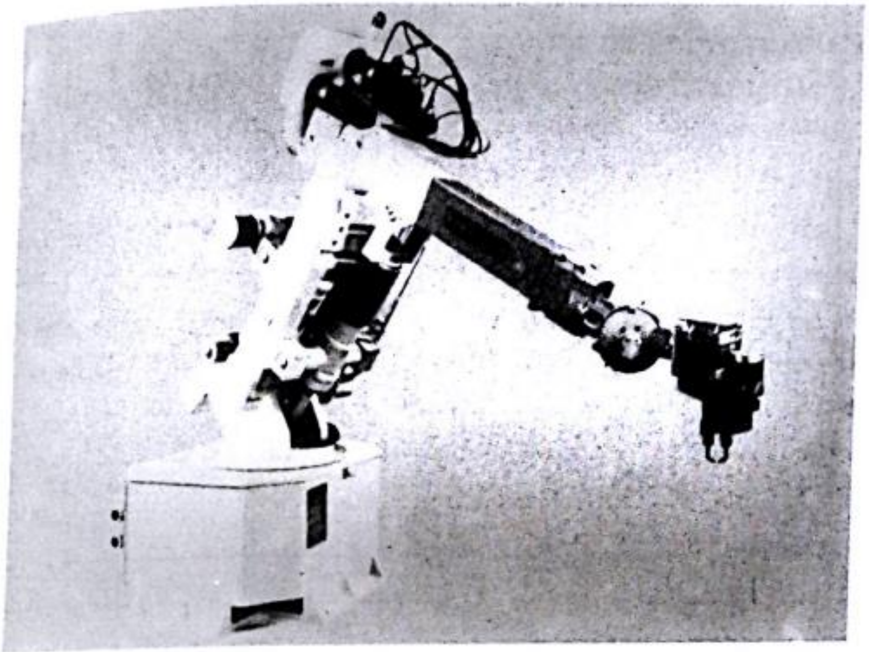
اگر چه رشد بازار روباتیک در مقایسه با سالهای اول دههٔ ۱۹۸۰ کاهش یافته است (شکل ۱-۱)، اما بر طبق پیش‌بینیهای انجام‌شده، استفاده از روباتهای صنعتی هنوز دوران ابتدایی خود را طی می‌کند. صرف‌نظر از اینکه این پیش‌بینیها به‌طور کامل تحقق یابند یا نه، روشن است که روباتهای صنعتی، در هر حال و به هر شکل، در صنعت ماندگار خواهند بود.



شکل ۱-۱ بازار روباتیک در آمریکای شمالی برحسب میلیون دلار.



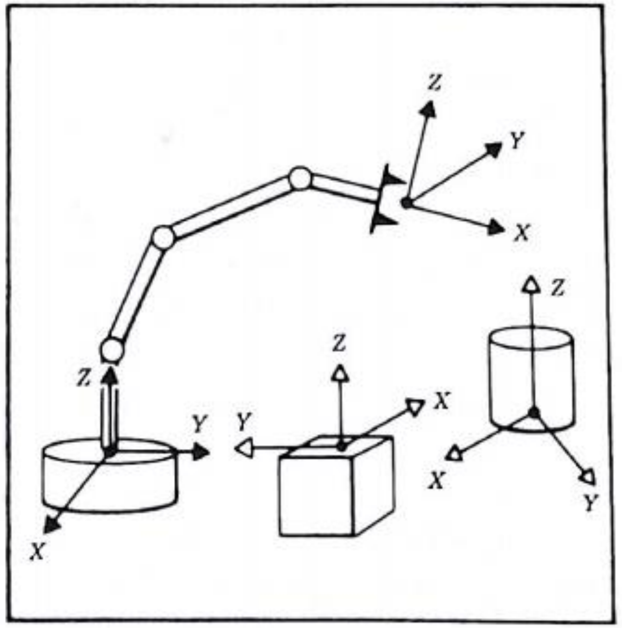
شکل ۱-۲ درصد فروش روبات برحسب کاربرد، در ایالات متحدهٔ آمریکا.



شکل ۱-۴ بازوی مکانیکی ماهر سین‌سیناتی میلاکرون ۷۷۶[1] با شش مفصل چرخشی، که در جوشکاری نقطه‌ای کاربرد زیاد دارد.

سینماتیک مستقیم بازوهای مکانیکی ماهر

سینماتیک علم حرکت است و حرکت را بدون در نظر گرفتن نیروهای به‌وجود آورندهٔ آن، مطالعه



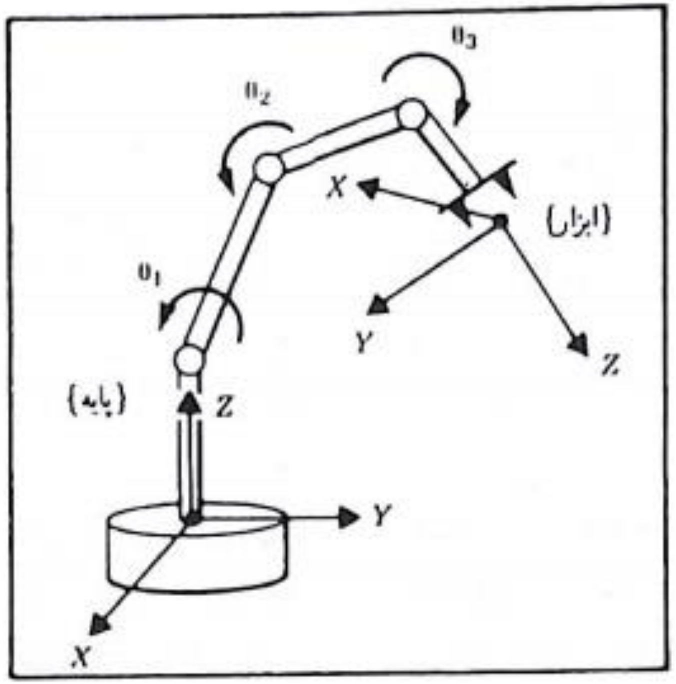
شکل ۱-۵ دستگاههای مختصات یا چهارچوبها به بازوی مکانیکی ماهر و اجسام واقع در محیط، متصل می‌شوند.

می‌کند. در علم سینماتیک، مکان، سرعت، شتاب، و کلیهٔ مشتقهای مرتبهٔ بالاتر از متغیرهای مکانی (نسبت به زمان یا هر متغیر دیگر)، بررسی می‌شود. از این رو مطالعهٔ سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر، به تمامی ویژگیهای هندسی و زمانی حرکت مربوط می‌شود.

بازوهای مکانیکی ماهر، از رابطهای نسبتاً صلبی تشکیل می‌شوند که به‌وسیلهٔ **منصلهایی**، که حرکت نسبی رابطهای مجاور را ممکن می‌سازند، به یکدیگر اتصال یافته‌اند. این مفصلها معمولاً به حسگرهای مکان، که اندازه‌گیری مکان نسبی رابطهای مجاور را امکانپذیر می‌سازند، مجهزند. در حالتی که مفصلها از نوع چرخشی یا **لولایی** باشند، این‌گونه جابه‌جاییها را **زوایای مفصلی** می‌نامند. برخی از بازوهای مکانیکی ماهر، مفصلهای لغزشی یا **کشویی** دارند، که در آنها جابه‌جایی نسبی بین رابطها، از نوع انتقال است، و گاه آن را **انحراف مفصلی** نیز می‌نامند.

تعداد درجات آزادی هر بازوی مکانیکی ماهر، عبارت است از تعداد متغیرهای مکانی مستقلی که باید برای تعیین مکان و جهتگیری کلیهٔ قسمتهای مکانیزم مشخص شوند. این اصطلاحی کلی است که برای هر مکانیزم به کار می‌رود. مثلاً، یک اهرم‌بندی چهار میله‌ای، تنها دارای یک درجهٔ آزادی است (هر چند در این مکانیزم، سه عضو حرکت می‌کنند). از آنجا که در روباتهای صنعتی، بازوی مکانیکی ماهر یک زنجیر سینماتیکی باز است، و چون مکان هر مفصل معمولاً تنها با یک متغیر توصیف می‌شود، تعداد درجات آزادی با تعداد مفصلها برابر خواهد بود.

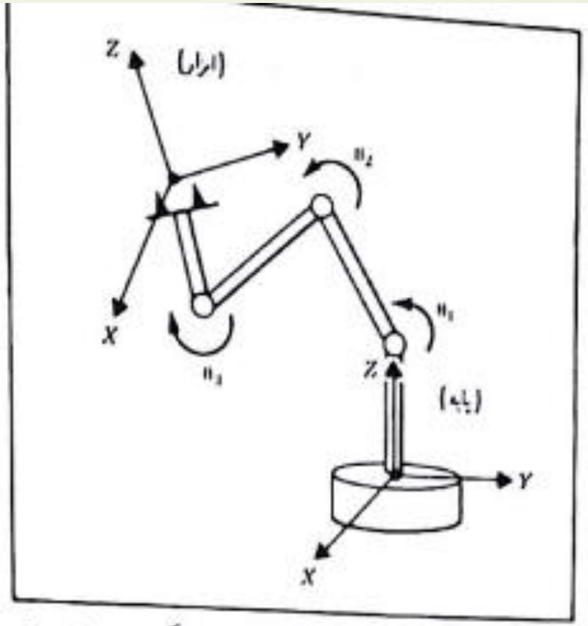
در انتهای آزاد زنجیر رابطهای تشکیل‌دهندهٔ بازوی مکانیکی ماهر، **مجری نهایی** قرار دارد. برحسب کاربردی که از روبات انتظار می‌رود، مجری نهایی می‌تواند گیره یا چنگک، مشعل جوشکاری، آهنربای الکتریکی، و یا ابزاری دیگر باشد. به طورکلی مکان بازوی مکانیکی ماهر را با توصیف **چهارچوب ابزار**، که به مجری نهایی متصل است، نسبت به **چهارچوب پایه**، که به پایهٔ غیر متحرک بازو اتصال دارد، تعیین می‌کنیم (شکل ۱-۶).



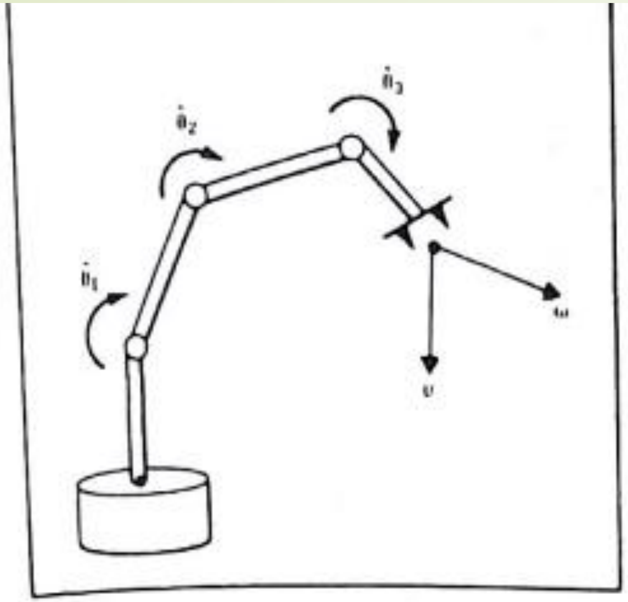
شکل ۱-۶ معادلات سینماتیکی چهارچوب ابزار را نسبت به چهارچوب پایه به‌صورت تابعی از متغیرهای مفصلی، توصیف می‌کنند.

سرعتها، نیروهای استاتیکی، نقاط تکین

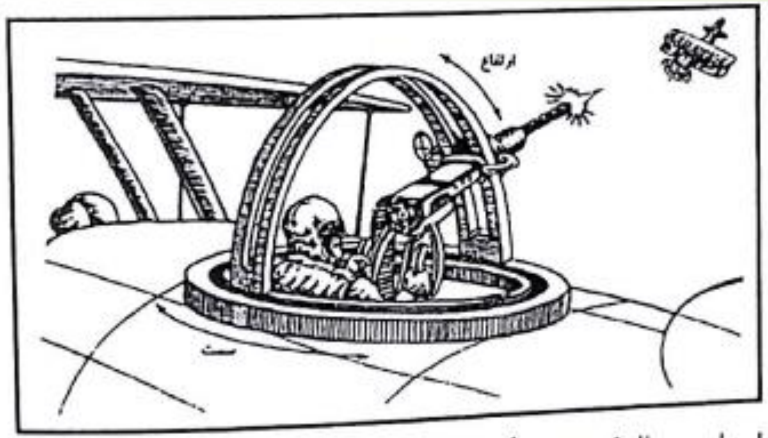
علاوه بر بحث پیرامون مسائل مربوط به استقرار استاتیکی بازوهای مکانیکی ماهر در مکان و جهتگیری مطلوب، می‌خواهیم بازوهای مکانیکی ماهر را در حال حرکت نیز تحلیل کنیم. غالباً بهتر است برای تحلیل سرعت، مکانیزمی ماتریسی را که **ماتریس ژاکوبی** بازوی مکانیکی ماهر نامیده می‌شود، تعیین کرد. ماتریس ژاکوبی **نگاشتی** از سرعتها، از فضای مفصلی به فضای دکارتی است (شکل ۱-۸). طبیعت این نگاشت، با تغییر پیکربندی بازوی مکانیکی تغییر می‌کند. این نگاشت در نقاط معینی، که آنها را **نقاط تکین** می‌نامیم، وارون ناپذیر است.



شکل ۱-۷ برای مکان و جهتگیری مفروض چهارچوب ابزار، می‌توان با استفاده از سینماتیک وارون، متغیرهای مفصلی را محاسبه کرد.



شکل ۱-۸ رابطهٔ هندسی بین سرعت زاویه‌ای مفصلها و سرعت مجری نهایی، با ماتریسی به‌نام ژاکوبی توصیف می‌شود.



شکل ۱-۹ یک هواپیمای دوباله که در جنگ جهانی دوم مورد استفاده قرار می‌گرفت و دو خدمه داشت: خلبان و تیرانداز عقب. مکانیزم عقب باعث ایجاد نقاط تکین در هواپیما شده است.

دینامیک

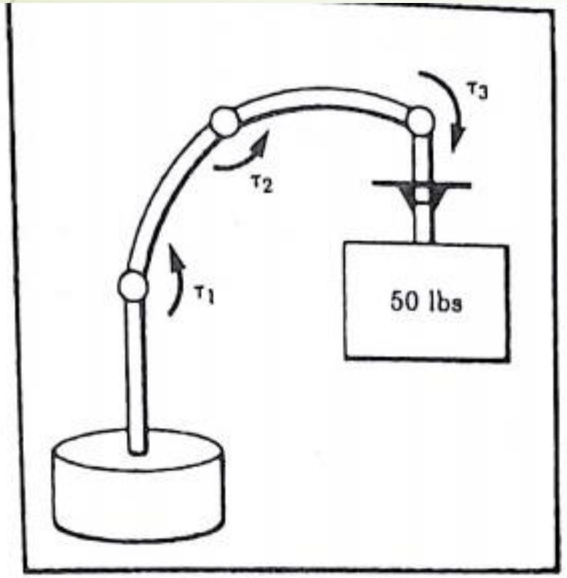
دینامیک شاخه‌ای گسترده از مکانیک است که در آن نیروهای پدید آورندهٔ حرکت مورد مطالعه قرار می‌گیرند. برای اینکه یک بازوی مکانیکی ماهر را از حال سکون با شتاب افزاینده به حرکت درآوریم، حرکت آن را به نرمی با سرعت ثابت مجری نهایی تداوم بخشیم، و سرانجام آن را با شتاب کاهنده به حال سکون درآوریم، باید مجموعهٔ پیچیده‌ای از توابع گشتاوری را به‌وسیلهٔ کاراندازهای مفصل[1] اعمال کنیم. شکل دقیق توابع گشتاور کارانداز مورد نیاز، نه تنها وابسته به مشخصه‌های فضایی و زمانی مسیر پیموده شده به‌وسیلهٔ مجری نهایی است، بلکه به خواص جرمی رابطها، بار مفید، اصطکاک در مفصلها، و غیره نیز بستگی دارد. یکی از روشهای کنترل بازوی مکانیکی ماهر برای حرکت در مسیر مورد نظر، استفاده از معادله‌های دینامیکی حرکت بازوی مکانیکی ماهر، برای محاسبهٔ این توابع گشتاور کارانداز است.

۱. از اصطلاح کارانداز مفصل به منزلهٔ اصطلاحی عمومی برای وسایلی که بازوی مکانیکی ماهر را به حرکت درمی‌آورند، از قبیل موتورهای الکتریکی، کاراندازهای هیدرولیکی و بادی، عضلات و غیره، استفاده می‌کنیم.

تولید مسیر

یک راه معمول برای به حرکت در آوردن بازوی مکانیکی ماهر از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر به صورت کنترل شده و هموار، آن است که ترتیبی دهیم تا مفصل به صورت تابعی هموار از زمان حرکت کند. عموماً، هر مفصل حرکت خود را در یک زمان آغاز می‌کند و به پایان می‌رساند، به گونه‌ای که حرکت بازوی مکانیکی ماهر هماهنگ به نظر می‌رسد. **تولید مسیر** روش دقیق محاسبهٔ این توابع حرکت است (شکل ۱-۱۰ را ببینید). مسیر حرکت غالباً نه تنها به‌وسیلهٔ نقطهٔ نهایی (مقصد)، بلکه با تعدادی نقطهٔ میانی یا بینابینی، که بازوی مکانیکی ماهر باید برای رسیدن به مقصد از آنها بگذرد، مشخص می‌شود. در چنین مواردی، گاه تابع همواری که از مجموعهٔ نقاط بینابینی می‌گذرد را «اسپلاین»[1] می‌نامند.

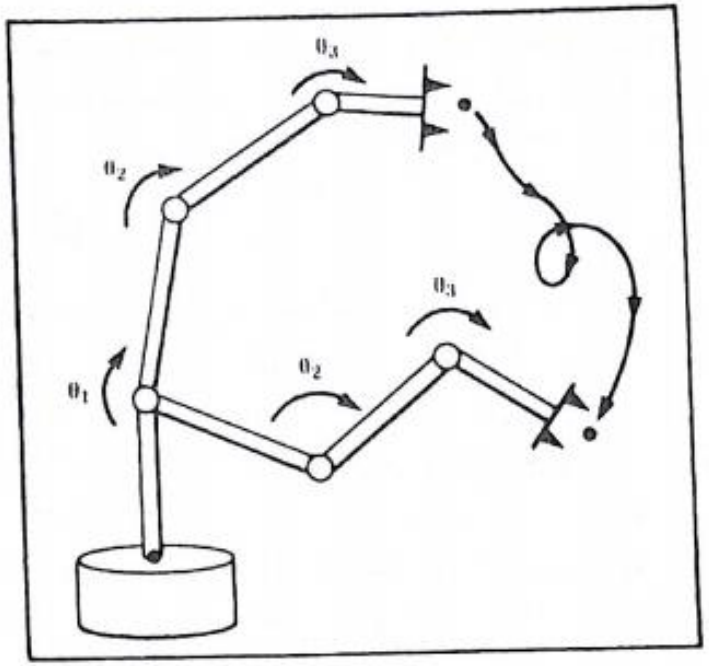
برای واداشتن مجری نهایی به پیمودن خطی مستقیم (یا سایر شکلهای هندسی) در فضا، باید حرکت مورد نظر به مجموعه‌ای معادل از حرکات مفصلها تبدیل شود. این نوع **تولید مسیر دکارتی** نیز در فصل ۷ بررسی خواهد شد.



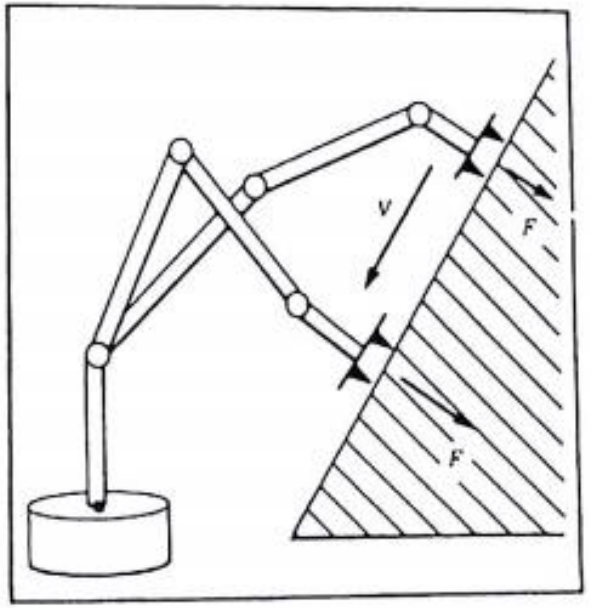
شکل ۱-۱۲ در طراحی بازوهای مکانیکی ماهر، باید نکاتی از قبیل نوع کارانداز، مکان کارانداز، سیستم انتقال، سختی سازه‌ای، مکان حسگر و... در نظر گرفته شوند.

طراحي بازوهای مكانيكی ماهر و حساسه‌ها

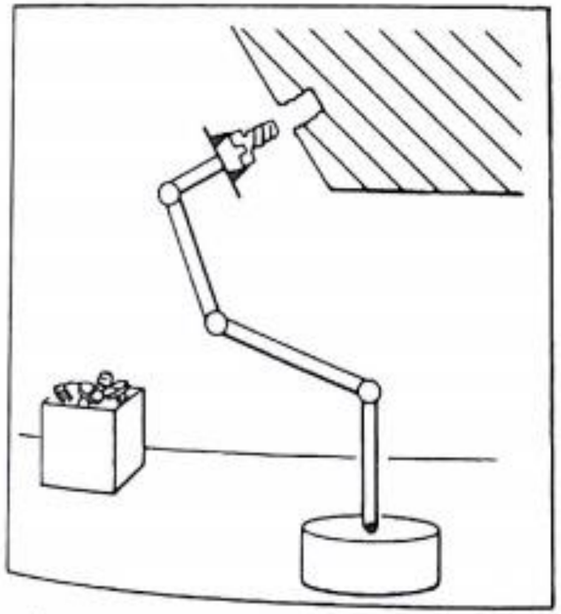
اگر چه از لحاظ نظری،بازوهای مكانيكی ماهر دستگاههایی «همه کاره»، و در موارد زيادي قابل به‌کارگيری‌اند، ولی در حالت کلی، ملاحظات اقتصادي باعث می‌شوند کاری که از بازوی مكانيكی انتظار می‌رود، در طراحی مكانيكی سيستم تأثيرگذارد. طراح بايد همراه با مشخصاتی چون اندازه، سرعت، و توانايی حمل بار، تعداد مفصلها و تركيب هندسی آنها را نيز در نظر بگيرد. اين ملاحظات بر كيفيت و اندازهٔ فضای كاری بازوی مكانيكی، سختی سازهٔ بازوی مكانيكی، و ساير مشخصات آن تأثير می‌گذارند.



شکل ۱-۱۳ واداشتن بازوی مکانیکی ماهر به پیمودن مسیری مطلوب، برعهدهٔ سیستم کنترل مکان است. چنین سیستمی با استفاده از پسخوراند حساسه‌های مفصل، بازوی مکانیکی ماهر را در مسیر تعیین شده نگه می‌دارد.



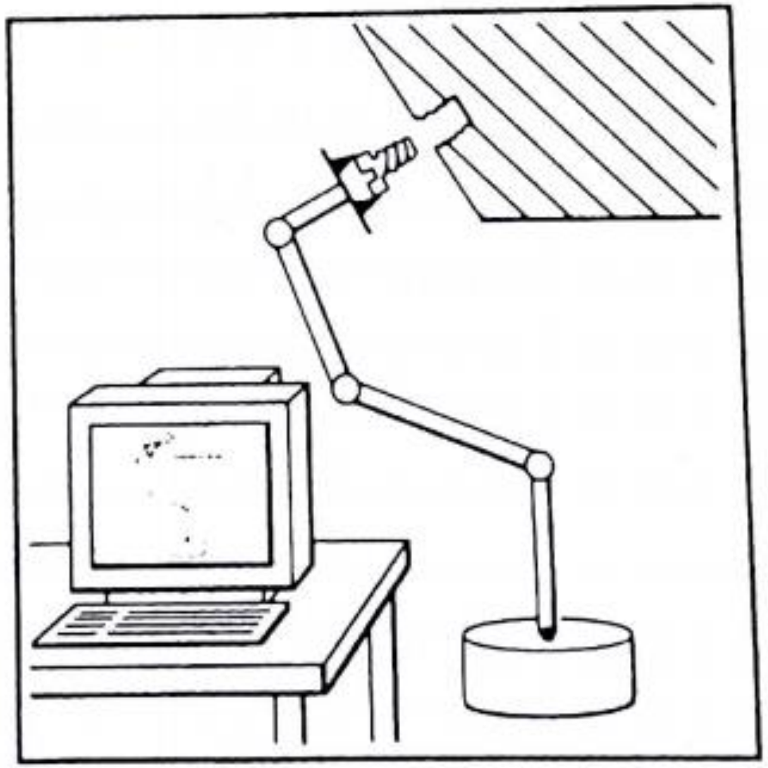
شکل ۱-۱۴ برای آنکه بازوی مکانیکی ماهر روی یک سطح بلغزد و در ضمن به آن نیروی ثابتی اعمال کند، باید از سیستم کنترل مکان-نیروی ترکیبی استفاده شود.



شکل ۱-۱۵ حرکات مطلوب بازوی مکانیکی ماهر و مجری نهایی، نیروهای تماسی مطلوب، و استراتژیهای حرکتی پیچیده، به زبان برنامه‌ریزی روبات توصیف می‌شوند.

برنامه‌ریزی خارج خط و شبیه‌سازی

سیستم برنامه‌ریزی خارج خط، سیستمی است که معمولاً به‌وسیلهٔ گرافیک کامپیوتری تا جایی گسترش یافته است، که به‌وسیلهٔ آن می‌توان برنامه‌های روبات را بدون نیاز به‌دسترسی به خود روبات، نوشت. در دفاع از این سیستم، می‌توان گفت که در سیستم برنامه‌ریزی خارج خط، به هنگام برنامه‌ریزی، دسترسی به عامل تولید (یعنی روبات) لزومی ندارد، و به همین دلیل زمان تولید مفید در کارخانه‌های خودکار، بالاتر خواهد بود



شکل ۱-۱۶ در سیستمهای برنامه‌ریزی خارج خط، معمولاً با استفاده از گرافیک کامپیوتری، برنامه‌ریزی روبات بدون دسترسی به خود آن (در حین برنامه‌ریزی) امکانپذیر است.

۱-۳ نمادگذاری

نمادگذاری همواره در علوم و مهندسی مسئله‌ای قابل‌بحث است. در این کتاب، قراردادهای زیر را به‌کار می‌بریم:

۱. معمولاً متغیرهایی که با حروف بزرگ نوشته می‌شوند، نشان‌دهندهٔ بردار یا ماتریس‌اند. متغیرهای نوشته‌شده با حروف کوچک، اسکالر هستند.

۲. پیش‌زیرنویسها یا پیش‌زبرنویسها، دستگاه مختصاتی را که کمیت در آن نوشته‌شده است، مشخص می‌کنند. مثلاً ^{A}P بردار مکانی را نشان می‌دهد که در دستگاه مختصات $\{A\}$ نوشته شده است، و یا $^{A}_{B}R$ ماتریس دورانی[1] است که رابطهٔ بین دستگاههای مختصات $\{A\}$ و $\{B\}$ را مشخص می‌سازد.

۳. پس‌زبرنویسها، برای نشان دادن وارون یا ترانهادهٔ یک ماتریس به‌کار می‌روند، مانند: R^{T} و R^{-1} (این قرارداد، در سطحی گسترده مورد قبول است).

۴. پس‌زیرنویسها، تابع قاعدهٔ خاصی نیستند، اما می‌توانند برای نشان‌دادن مؤلفه‌های یک بردار (مثلاً x، y، یا z)، یا برای توصیف، مانند P_{bolt} به معنای مکان پیچ، به کار روند.

۵. در این کتاب، بسیاری از توابع مثلثاتی به‌کار می‌آیند. برای نشان‌دادن کسینوس زاویه‌ای مانند θ_1، هر یک از صورتهای c_1، $c\theta_1$، یا $\cos\theta_1$ به‌کار رفته است.

بردارها همواره به صورت ستونی در نظر گرفته می‌شوند. از این‌رو بردارهای سطری با علامت ترانهاده به روشنی مشخص خواهند شد.

تمرین کلاسی ۱:   مهلت تحویل : دو هفته

شرحی از رویدادهای مهم در تاریخ تکامل روباتهای صنعتی در طول ۳۰ سال گذشته تهیه کنید.

فصل ۲: توصیفها و تبدیلهای فضایی کلی

اعمال روباتی بنابر تعریف عبارت از به حرکت در آوردن قطعات و ابزارها در فضا به‌وسیلهٔ نوعی مکانیزم است. این امر، طبیعتاً نیاز به نمایش مکانها و جهتگیریهای قطعات، ابزار، و خود مکانیزم را مطرح می‌سازد. برای تعریف و به‌کارگیری کمیتهای ریاضی که مکان و جهتگیری را نشان می‌دهند، باید دستگاههای مختصاتی تعریف، و قراردادهایی برای نمایش آنها وضع کنیم. بسیاری از مطالبی که در اینجا در زمینهٔ مکان و جهتگیری مطرح می‌شوند، اصولی را تشکیل می‌دهند که در آینده در بحث سرعتهای خطی و دورانی، و همچنین نیروها و گشتاورها، به‌کار خواهند رفت.

می‌پذیریم که در جایی یک دستگاه مختصات عام وجود دارد که هر کمیت مورد بحث را می‌توانیم نسبت به آن بسنجیم. کلیهٔ مکانها و جهتگیریها را نسبت به این دستگاه مختصات عام، یا نسبت به دستگاه مختصات دکارتی دیگری که خود نسبت به این دستگاه عام تعریف شده (یا می‌تواند تعریف شود)، توصیف می‌کنیم.

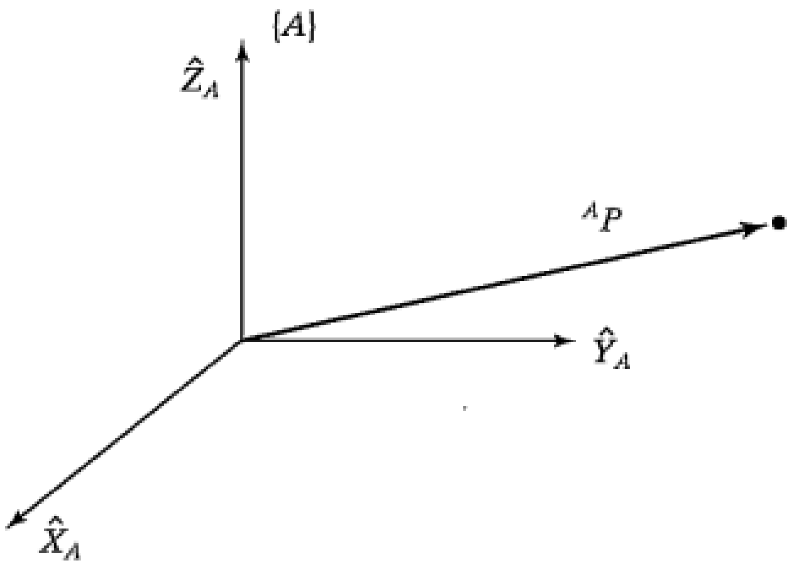


FIGURE 2.1: Vector relative to frame (example).

$$ {}^AP = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}. \tag{2.1} $$

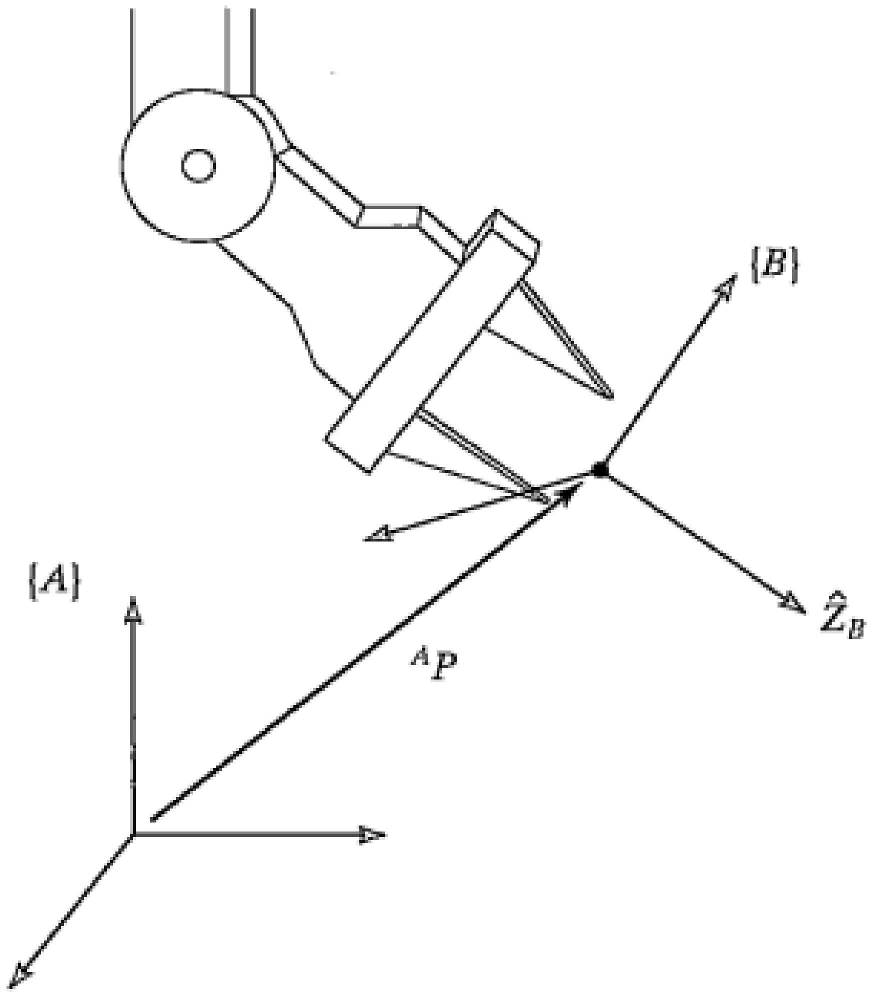


FIGURE 2.2: Locating an object in position and orientation.

توصیف جهتگیری

اغلب علاوه بر نمایش یک نقطه در فضا، به تعریف **جهتگیری** یک جسم در فضا نیز نیازمندیم.

برای توصیف

جهتگیری هر جسم، دستگاه مختصاتی را به آن متصل می‌کنیم، سپس این دستگاه را نسبت به دستگاه مرجع تعریف می‌کنیم.

برای مشخص کردن جهتگیری جسم، کافی‌است دستگاه $\{B\}$ را نسبت به $\{A\}$ توصیف

بردارهای یکهٔ سه محور اصلی آن نسبت به دستگاه مختصات $\{A\}$ است. ما این بردارهای یکه را که نشان‌دهندهٔ جهات اصلی دستگاه مختصات $\{B\}$ هستند، با $\hat{X}_B$، $\hat{Y}_B$، و $\hat{Z}_B$ نشان می‌دهیم. هنگامی که این بردارها نسبت به دستگاه مختصات $\{A\}$ نوشته شوند، با نمادهای ${}^A\hat{X}_B$، ${}^A\hat{Y}_B$، و ${}^A\hat{Z}_B$ نمایش داده خواهند شد. ساده‌تر است اگر این سه‌بردار را به‌صورت ستونهای یک ماتریس 3×3 (با ترتیب ${}^A\hat{X}_B$، ${}^A\hat{Y}_B$، و ${}^A\hat{Z}_B$) نشان دهیم. این ماتریس را ماتریس دوران می‌نامیم. چون این ماتریس خاص، دستگاه $\{B\}$ را نسبت به $\{A\}$ توصیف می‌کند، آن را با نماد ${}^A_BR$ نشان خواهیم داد. چگونگی انتخاب پیش‌زیرنویسها و پیش‌زبرنویسها در تعریف ماتریسهای دوران، در بخشهای آینده روشن خواهد شد.

$$ {}^A_BR = \left[{}^A\hat{X}_B \quad {}^A\hat{Y}_B \quad {}^A\hat{Z}_B \right] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}2) $$

به‌طور خلاصه، برای تعیین هر جهتگیری می‌توان از مجموعهٔ سه‌بردار استفاده کرد. برای سادگی، ماتریسی 3×3 خواهیم ساخت که ستونهایش را این سه‌بردار تشکیل می‌دهند. بنابراین، همان‌طور که مکان هر نقطه با یک بردار بیان می‌شود، جهتگیری هر جسم نیز با یک ماتریس مشخص خواهد شد.

با توجه به اینکه مؤلفه‌های هر بردار، تصاویر آن بردار در امتدادهای یکهٔ چهارچوب مرجع آن هستند، می‌توانیم عباراتی برای اسکالرهای r_{ij} در (۲-۲) بنویسیم. بدین ترتیب، هر مؤلفهٔ ${}^{A}_{B}R$ در (۲-۲) را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب نقطه‌ای یک زوج از بردارهای یکه، به ترتیب زیر نوشت

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} \quad (۲-۳) $$

برای ساده‌نویسی، در ماتریس سمت راست از نوشتن پیش‌زیرنویس خودداری کرده‌ایم. در واقع اگر زوج بردارهای یکه‌ای که در هم ضرب می‌شوند، در یک دستگاه مختصات نوشته شده باشند، انتخاب دستگاه مختصات به‌دلخواه صورت خواهد گرفت. از آنجا که حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار یکه، کسینوس زاویهٔ بین آنها را به‌دست می‌دهد، مؤلفه‌های ماتریس دوران را کسینوسهای هادی می‌نامند.

$$
{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Y}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Z}_{B}^{T} \end{bmatrix} \left[\, {}^{A}\hat{X}_{B} \;\; {}^{A}\hat{Y}_{B} \;\; {}^{A}\hat{Z}_{B} \,\right] = I_{3},
$$

چهارچوب

که در آن ${}^{A}P_{BORG}$ بردار نشان‌دهندهٔ مبدأ چهارچوب $\{B\}$ است:

$$\{B\} = \{{}^{A}_{B}R \,, {}^{A}P_{BORG}\} \qquad (۸-۲)$$

در شکل ۲-۳، علاوه بر دستگاه مختصات عام، سه چهارچوب دیگر نیز نشان داده شده است. چهارچوبهای $\{A\}$ و $\{B\}$ نسبت به دستگاه مختصات عام، و چهارچوب $\{C\}$ نسبت به چهارچوب $\{A\}$ مشخص شده است.

به‌طور خلاصه، از هر چهارچوب می‌توان برای توصیف یک دستگاه مختصات نسبت به دستگاه مختصات دیگر استفاده کرد. چهارچوب به منظور نمایش یکجای مکان و جهتگیری به‌کار می‌رود، و می‌توان آن را به‌صورت تعمیم یافتهٔ این دو مشخصه در نظر گرفت. مکانها را می‌توان به‌وسیلهٔ چهارچوبی که قسمت ماتریس دورانی آن ماتریس یکه است و قسمت بردار مکان آن نقطهٔ مورد بررسی را توصیف می‌کند، نشان داد. به همین ترتیب، جهتگیری را می‌توان با چهارچوبی که بردار مکان آن بردار صفر است، مشخص کرد.

در شکل ۲-۳ نمایشی گرافیکی از چهارچوبها، که برای تجسم آنها مناسب است، ارائه شده است. هر چهارچوب با سه‌بردار یکه، که محورهای اصلی آن را تشکیل می‌دهند، نمایش داده می‌شود. یک بردار نیز از مبدأ هر چهارچوب به مبدأ چهارچوب دیگر رسم می‌شود. این بردار، مکان مبدأ چهارچوبی را که در انتهای بردار قرار دارد، نسبت به چهارچوبی که در مبدأ بردار واقع است، نشان می‌دهد. جهت این بردار در شکل ۲-۳ نشان می‌دهد که مثلاً چهارچوب $\{C\}$ نسبت به چهارچوب $\{A\}$ مشخص شده است و نه برعکس.

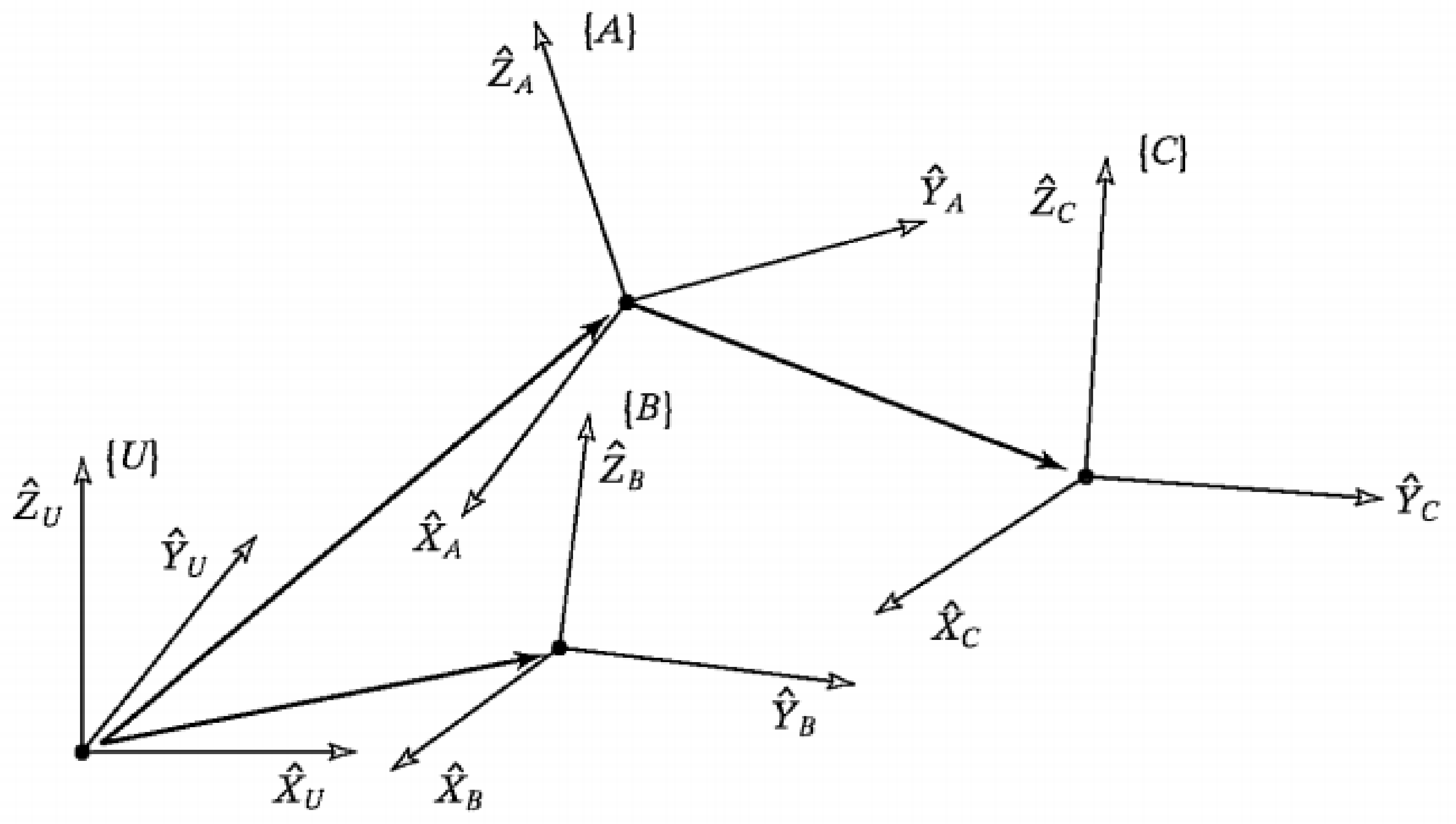


FIGURE 2.3: Example of several frames.

نگاشتها: تغییر دادن توصیفها از چهارچوبی به چهارچوب دیگر

نگاشت شامل چهارچوبهای انتقال یافته

در شکل ۲-۴، مکانی را با بردار ^{B}P تعریف کرده‌ایم. می‌خواهیم این نقطه را در فضا نسبت به چهارچوب $\{A\}$ تعریف کنیم: فرض می‌شود چهارچوب $\{A\}$ جهتگیری یکسان با $\{B\}$ دارد. در چنین حالتی، اختلاف $\{B\}$ و $\{A\}$ تنها در یک انتقال است که با $^{A}P_{BORG}$ (برداری که مکان مبدأ $\{B\}$ را نسبت به $\{A\}$ تعیین می‌کند)، قابل بیان خواهد بود.

چون هر دو بردار در چهارچوبهایی که جهتگیریهای یکسان دارند، تعریف می‌شوند، می‌توان مکان نقطهٔ P نسبت به $\{A\}$، یعنی ^{A}P را با جمع برداری به‌دست آورد

$$^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} \qquad (۲-۹)$$

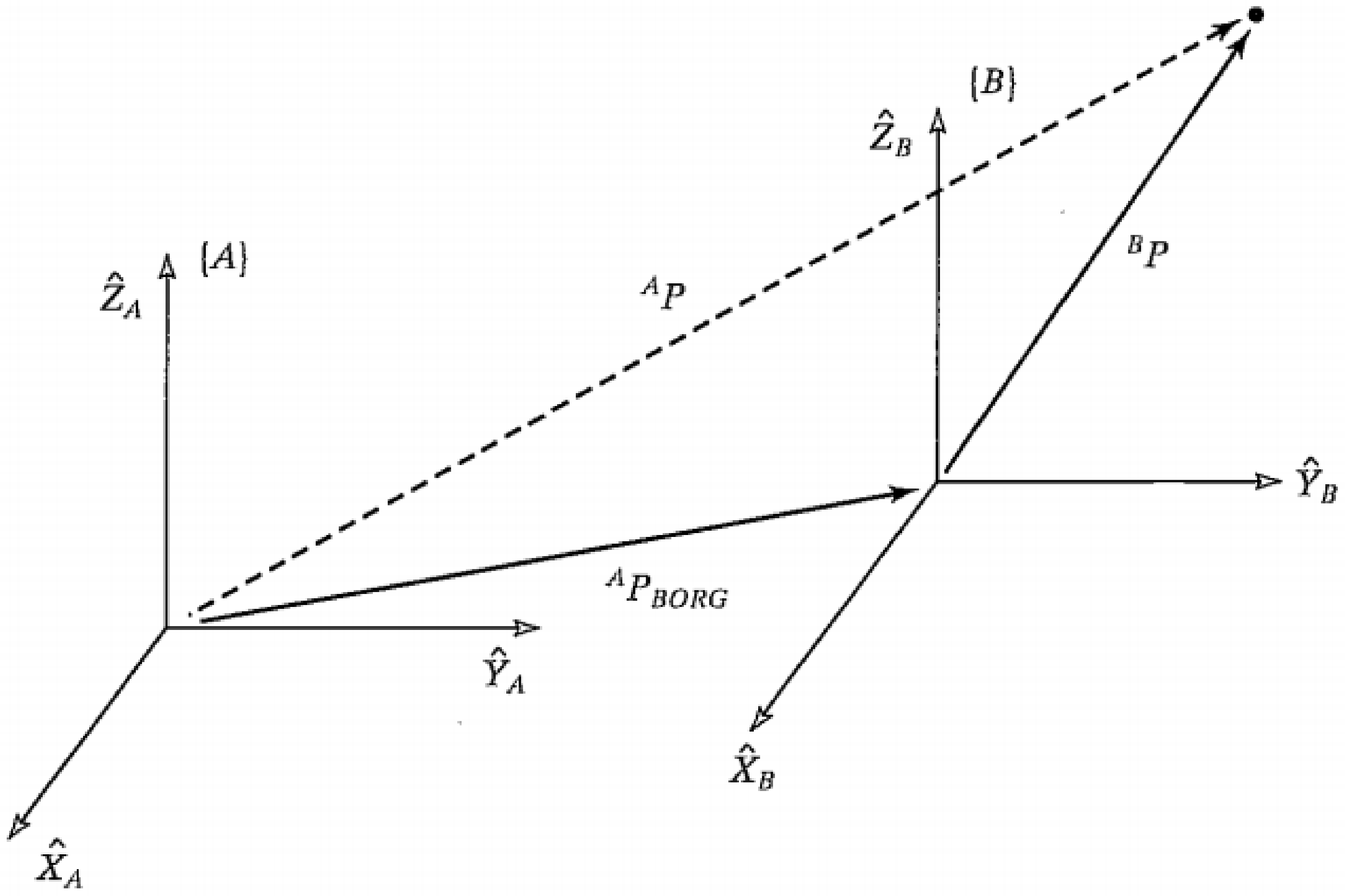


FIGURE 2.4: Translational mapping.

نگاشت شامل چهارچوبهای دوران یافته

ماتریس دوران، چهارچوب $\{B\}$ را نسبت به $\{A\}$ توصیف کند، آن را با نماد ${}^{A}_{B}R$ نشان می‌دهیم.
توجه کنید که بنابر تعریف ما، همهٔ ستونهای هر ماتریس دوران اندازهٔ واحد دارند، و همچنین این بردارهای یکه، متعامدند.

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T} \qquad (۱۰-۲) $$

بنابراین، چون ستونهای ${}^{A}_{B}R$ بردارهای یکهٔ $\{B\}$، نوشته شده در دستگاه $\{A\}$ هستند، سطرهای ${}^{A}_{B}R$ بردارهای یکهٔ $\{A\}$ خواهند بود که نسبت به دستگاه $\{B\}$ نوشته شده‌اند.
پس هر ماتریس دوران را می‌توان به‌وسیلهٔ مجموعه‌ای از سه‌بردار ستونی و یا مجموعه‌ای از سه بردار سطری به‌صورت زیر نمایش داد

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Y}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Z}_{A}^{T} \end{bmatrix} \qquad (۱۱-۲) $$

برای محاسبهٔ ^{A}P، باید توجه داشته باشیم که مؤلفه‌های هر بردار، در حقیقت تصاویر آن بردار روی امتدادهای یکهٔ چهارچوب آن بردار هستند. تصویر هر بردار، از ضرب نقطه‌ای (عددی) بردار، قابل محاسبه است. بدین ترتیب، مؤلفه‌های ^{A}P چنین به‌دست خواهند آمد

$$
\begin{aligned}
{}^{A}px &= {}^{B}\hat{X}_{A} \cdot {}^{B}P, \\
{}^{A}p_{y} &= {}^{B}\hat{Y}_{A} \cdot {}^{B}P, \\
{}^{A}p_{z} &= {}^{B}\hat{Z}_{A} \cdot {}^{B}P.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

برای بیان رابطهٔ (۲-۱۲) به‌صورت حاصل‌ضرب ماتریس دوران، از رابطهٔ (۲-۱۱) در می‌یابیم که سطرهای ${}^{A}_{B}R$ عبارت‌اند از ${}^{B}\hat{X}_{A}$، ${}^{B}\hat{Y}_{A}$، و ${}^{B}\hat{Z}_{A}$. بنابراین رابطهٔ (۲-۱۲) را می‌توان به‌وسیلهٔ یک ماتریس دوران، به شکل فشردهٔ زیر نوشت

$$
{}^{A}P = {}^{A}_{B}R \; {}^{B}P \qquad (۱۳-۲)
$$

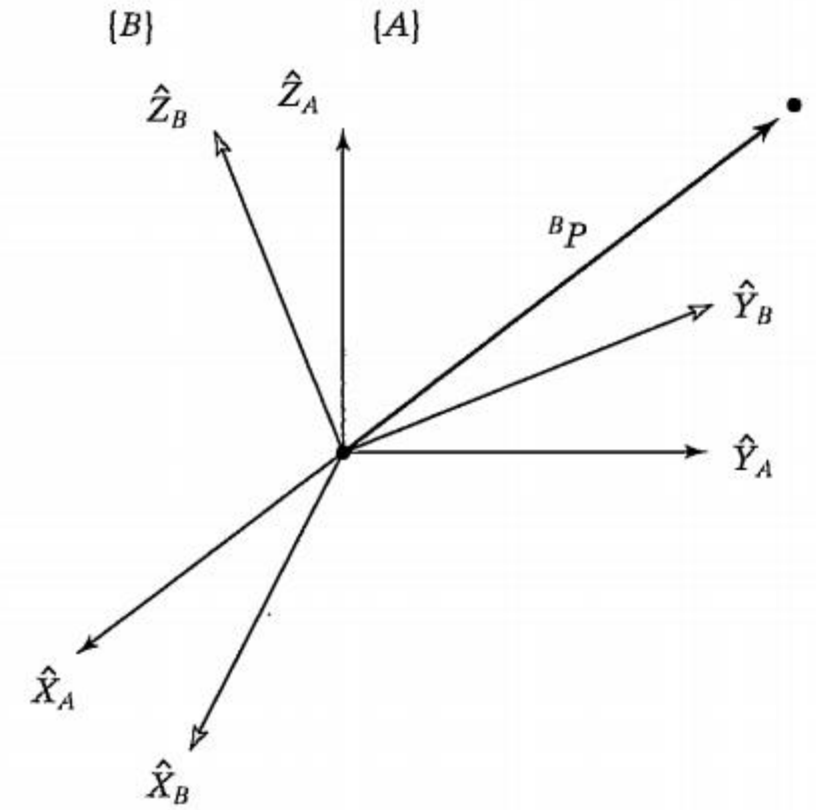


FIGURE 2.5: Rotating the description of a vector.

EXAMPLE 2.1

Figure 2.6 shows a frame $\{B\}$ that is rotated relative to frame $\{A\}$ about $\hat{Z}$ by 30 degrees. Here, $\hat{Z}$ is pointing out of the page.

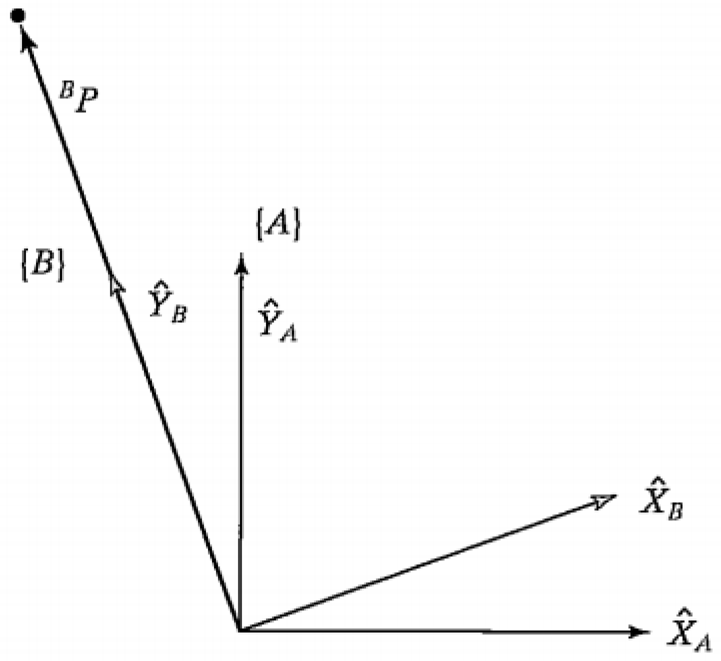


FIGURE 2.6: $\{B\}$ rotated 30 degrees about $\hat{Z}$.

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}. \tag{2.14} $$

Given

$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \tag{2.15} $$

we calculate ${}^{A}P$ as

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}P = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 1.732 \\ 0.000 \end{bmatrix}. \tag{2.16} $$

compute a new description of the vector relative to another frame.

نگاشت شامل چهارچوبهای کلی(عمومی)

اغلب توصیف یک بردار را نسبت به چهارچوبی مانند $\{B\}$ در دست داریم، و می‌خواهیم توصیف آن را نسبت به چهارچوب دیگری چون $\{A\}$ به‌دست آوریم. در اینجا حالت کلی نگاشت را در نظر می‌گیریم که در آن مبدأ چهارچوب $\{B\}$ بر مبدأ چهارچوب $\{A\}$ منطبق نیست، و این عدم انطباق به‌وسیلهٔ برداری مشخص می‌شود. بردار نشان‌دهندهٔ مبدأ $\{B\}$ را با ${}^{A}P_{BORG}$، و دوران $\{B\}$ نسبت به $\{A\}$ را با ${}^{A}_{B}R$ نشان می‌دهیم. با در دست داشتن ${}^{B}P$، می‌خواهیم ${}^{A}P$ را مانند شکل ۲-۷ محاسبه کنیم.

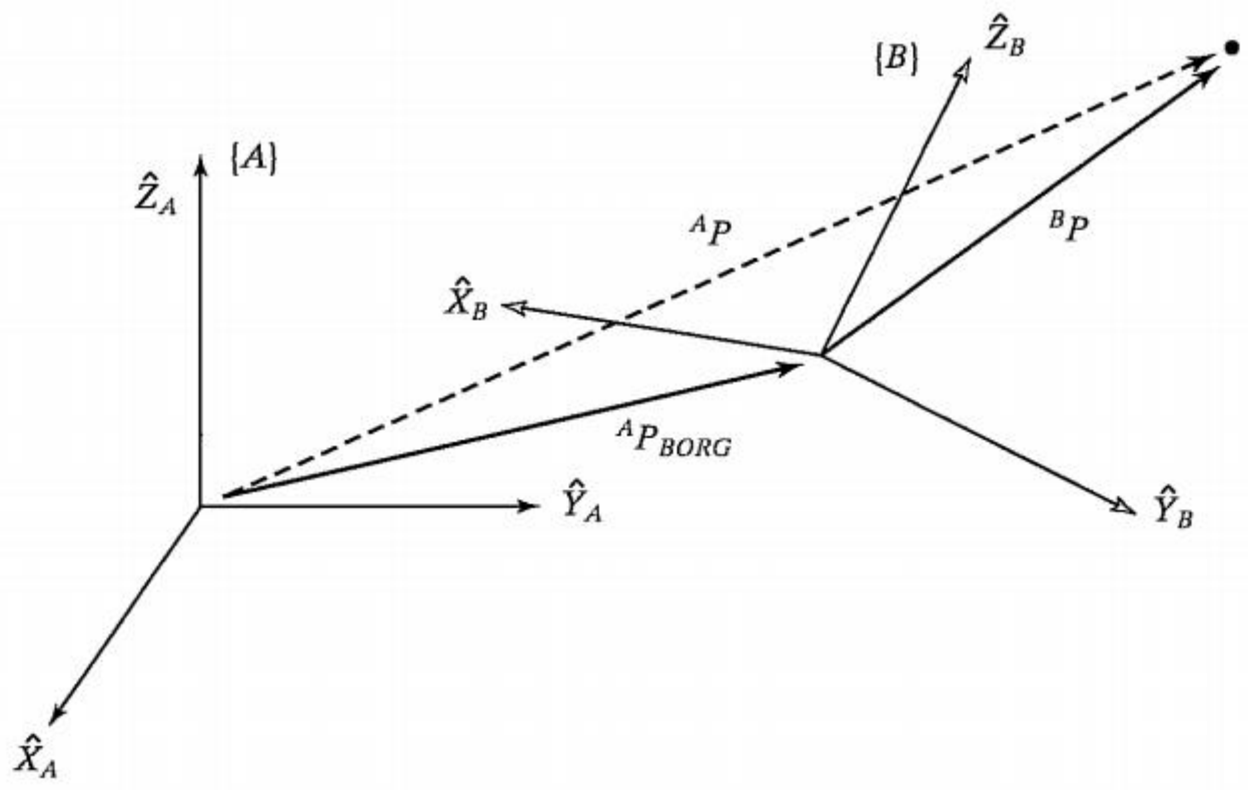


FIGURE 2.7: General transform of a vector.

ابتدا می‌توانیم ${}^{B}P$ را نسبت به چهارچوب سومی، که جهتگیری آن با جهتگیری $\{A\}$ یکسان، اما مبدأ آن بر مبدأ $\{B\}$ منطبق است، توصیف کنیم. این عمل، چنانکه در بخش ۲-۳ دیدیم، با پیش‌ضرب (ضرب از سمت چپ) در ${}^{A}_{B}R$ انجام می‌شود. پس از آن، انتقال بین دو مبدأ مختصات را، چنانکه در بخش ۲-۳ دیدیم، با جمع‌برداری و به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} \qquad (۱۷-۲) $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P. \qquad (2.18) $$

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (2.19) $$

1. a "1" is added as the last element of the 4×1 vectors;
2. a row "[0 0 0 1]" is added as the last row of the 4×4 matrix.

$$
\begin{aligned}
{}^{A}P &= {}^{A}_{B}R\, {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} \\
1 &= 1.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

The 4×4 matrix in (2.19) is called a **homogeneous transform**.

■ مثال ۲-۲

شکل ۲-۸ چهارچوب $\{B\}$ را که نسبت به چهارچوب $\{A\}$ به‌اندازهٔ ۳۰ درجه حول محور $\hat{Z}$ دوران کرده، و به‌اندازهٔ ۱۰ واحد در راستای $\hat{X}_A$ و ۵ واحد در راستای $\hat{Y}_A$ انتقال یافته است، نشان می‌دهد. مطلوب است محاسبهٔ ^{A}P، در صورتی‌که $^{B}P = [۳/۰ \quad ۷/۰ \quad ۰/۰]^T$.

تعریف چهارچوب $\{B\}$ چنین است

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} ۰/۸۶۶ & -۰/۵۰۰ & ۰/۰۰۰ & ۱۰/۰ \\ ۰/۵۰۰ & ۰/۸۶۶ & ۰/۰۰۰ & ۵/۰ \\ ۰/۰۰۰ & ۰/۰۰۰ & ۱/۰۰۰ & ۰/۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۲۱\text{-}۲) $$

با داشتن بردار ^{B}P به شکل زیر

$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} ۳/۰ \\ ۷/۰ \\ ۰/۰ \end{bmatrix} \qquad (۲۲\text{-}۲) $$

we use the definition of $\{B\}$ just given as a transformation:

$$^{A}P = {}^{A}_{B}T\ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0.000 \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

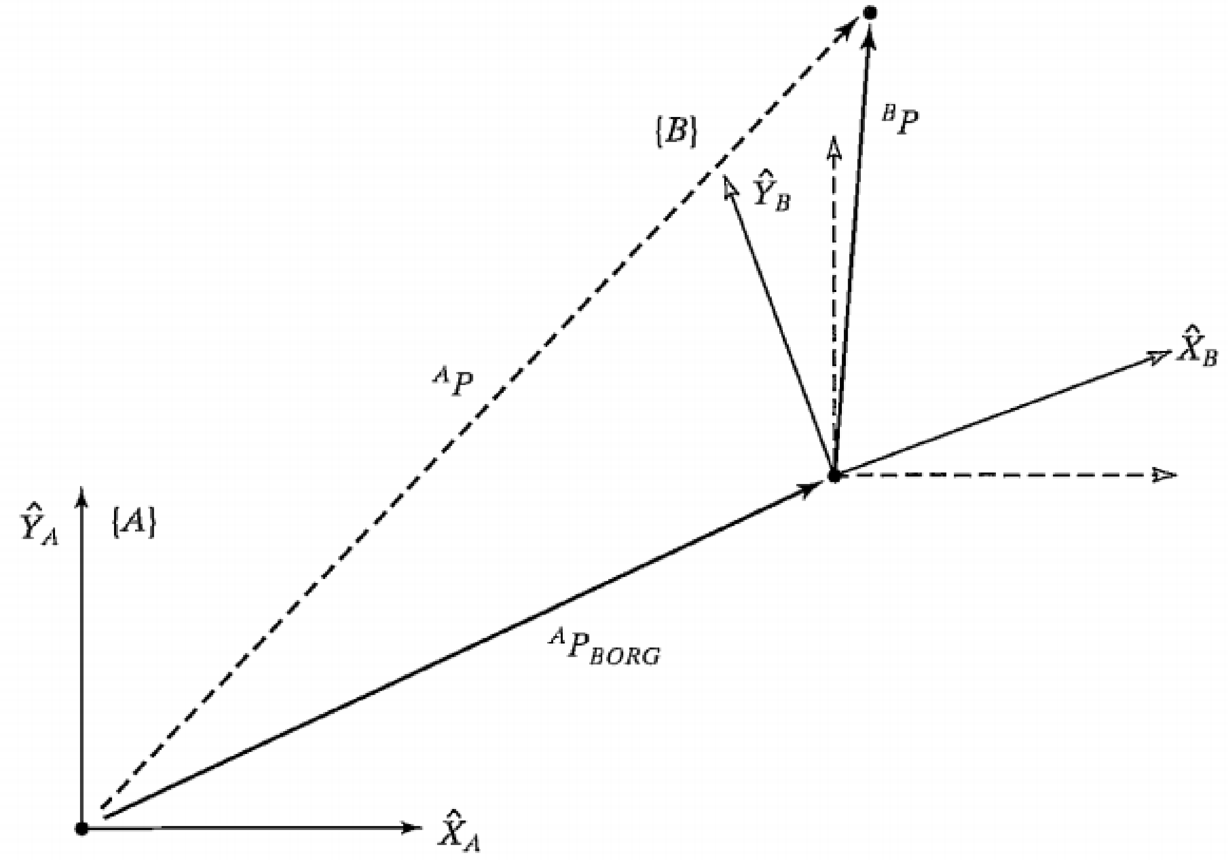
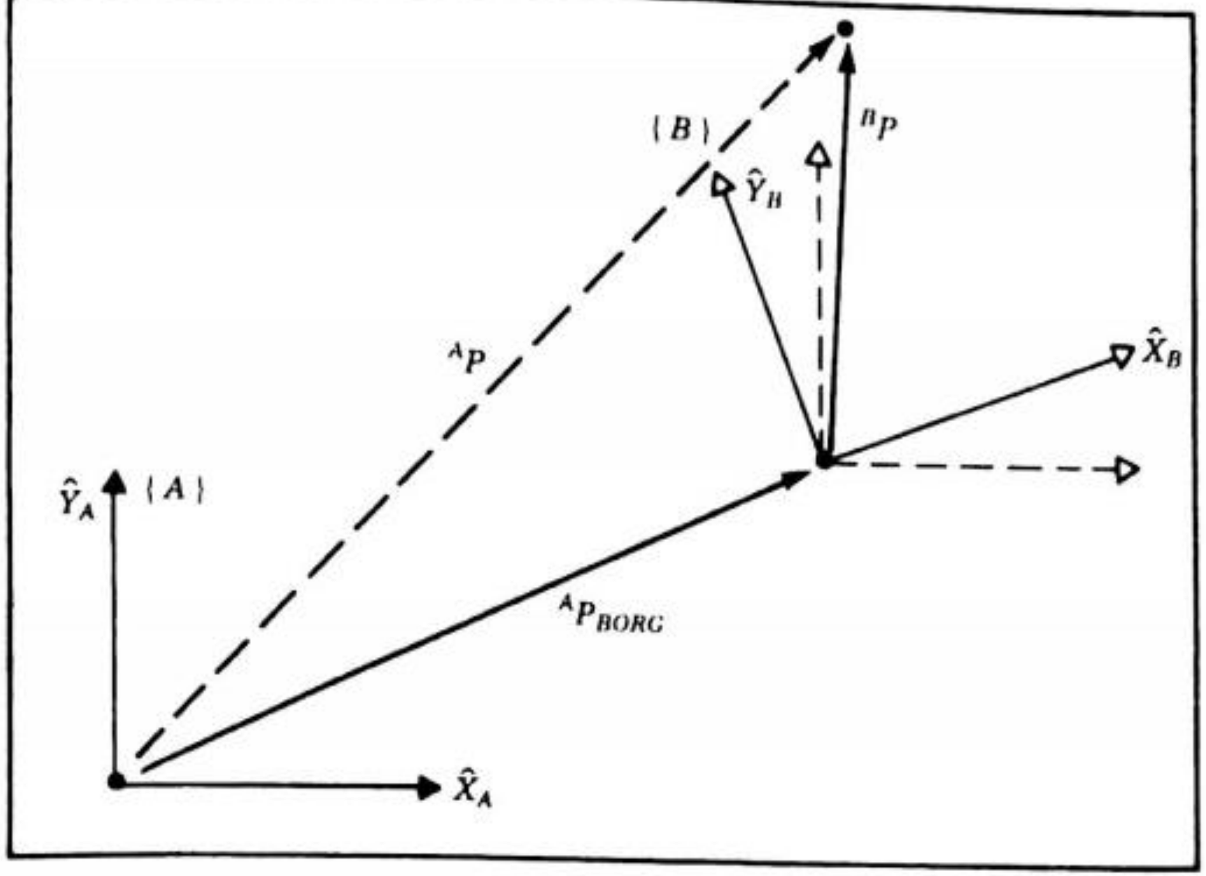
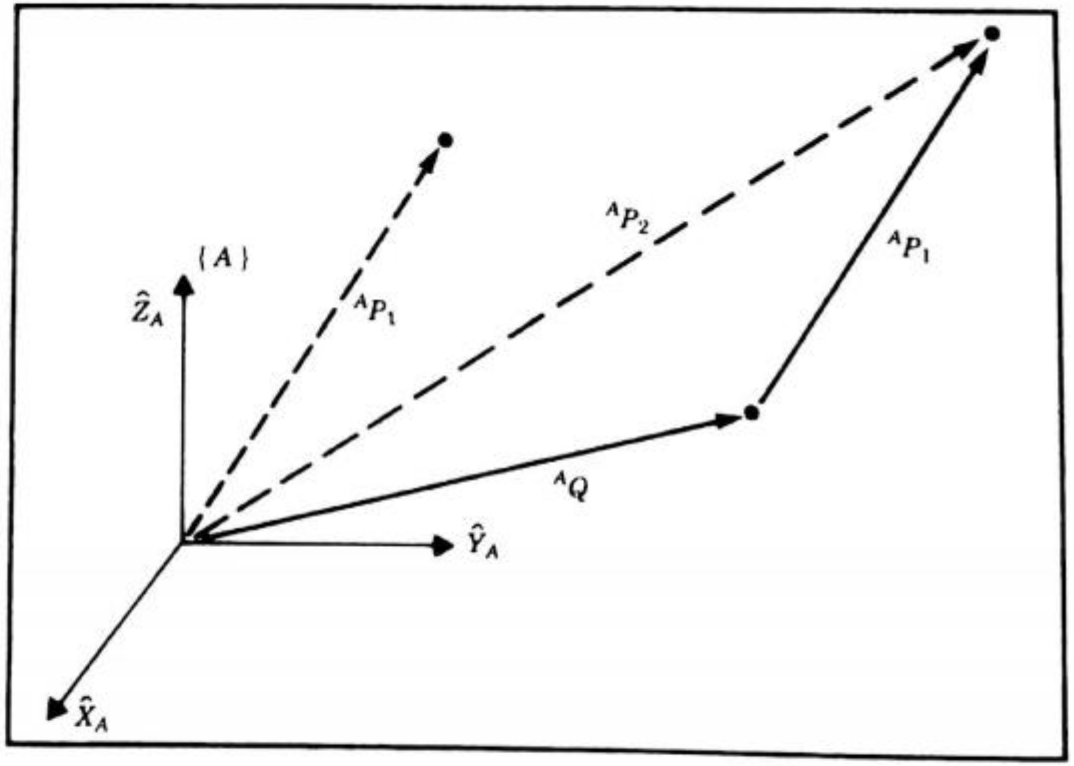


FIGURE 2.8: Frame $\{B\}$ rotated and translated.



شکل ۲-۸ چهارچوب انتقال و دوران یافته $\{B\}$.



شکل ۲-۹ عملگر انتقال.

عملگر ها: انتقال ها، دوران ها، و تبدیلات کلی

هنگامی‌که یک بردار نسبت به چهارچوب به «جلو» حرکت می‌کند، می‌توان حرکت بردار را به «جلو»، یا حرکت چهارچوب را به «عقب» در نظر گرفت. بیان ریاضی در هر دو حالت یکسان است.

حاصل این عمل، بردار جدید ${}^{A}P_{2}$ است که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$ {}^{A}P_{2} = {}^{A}P_{1} + {}^{A}Q \qquad (۲۴-۲) $$

برای نوشتن این عمل انتقال به‌صورت عملگر ماتریسی، از نماد زیر استفاده می‌کنیم

$$ {}^{A}P_{2} = D_{Q}(q)\, {}^{A}P_{1} \qquad (۲۵-۲) $$

که در آن q اندازهٔ (با علامت مثبت یا منفی) انتقال در راستای بردار $\hat{Q}$ است. عملگر D_Q را می‌توان به شکل ساده و خاصی از یک تبدیل همگن در نظر گرفت

$$ D_{Q}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۶-۲) $$

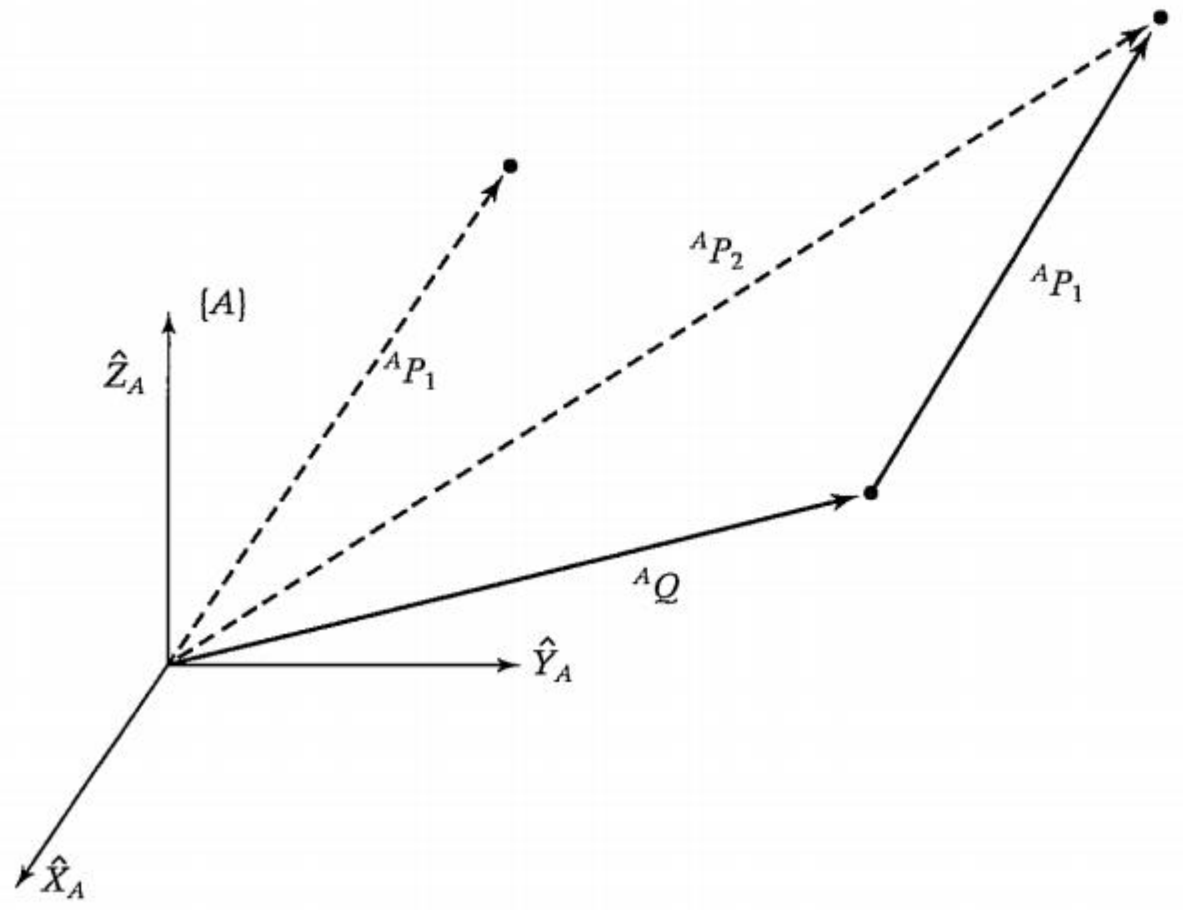


FIGURE 2.9: Translation operator.

که در آن، q_x، q_y و q_z مؤلفه‌های بردار انتقال Q هستند و داریم

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$$

عملگرهای دورانی

تعبیر دیگر ماتریس دوران، به‌صورت عملگری دورانی است، که بردار ${}^{A}P_{1}$ را از طریق دوران R به بردار جدید ${}^{A}P_{2}$ تغییر می‌دهد.

$$ {}^{A}P_{2} = R\ {}^{A}P_{1} \qquad (۲۷-۲) $$

ماتریس دورانی که بردارها را با دوران R می‌چرخاند، همان ماتریس دورانی است که چهارچوب چرخانده شده به‌وسیلهٔ R را نسبت به چهارچوب مرجع توصیف می‌کند.

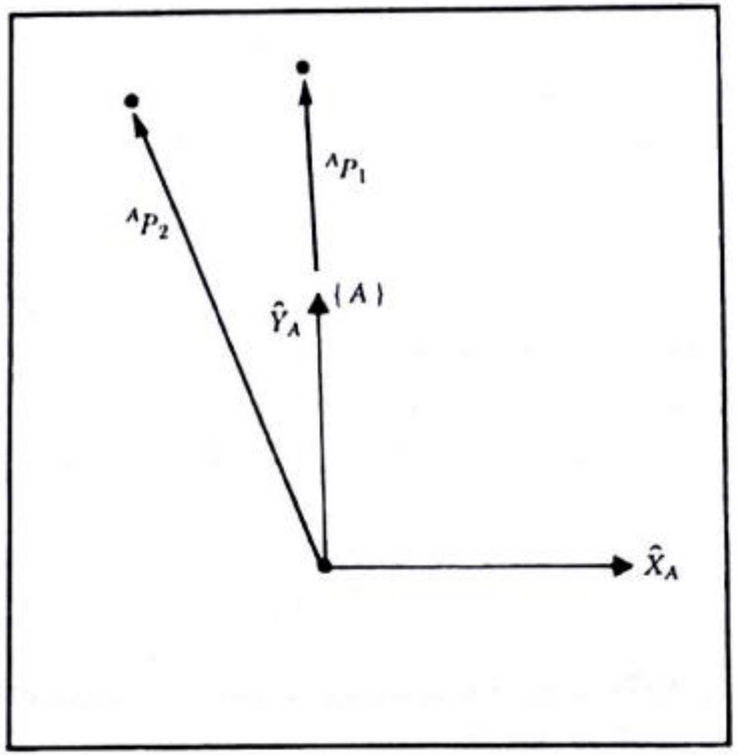
$$ {}^{A}P_{2} = R_{K}(\theta)\ {}^{A}P_{1} \qquad (۲۸-۲) $$

در این نمادگذاری، «$R_{K}(\theta)$» عملگری دورانی است که دورانی را حول راستای محور $\hat{K}$ به‌اندازهٔ θ درجه انجام می‌دهد.

$$R_z(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

■ مثال ۲-۳

شکل ۲-۱۰ بردار ${}^{A}P_1$ را نشان می‌دهد. می‌خواهیم برداری را که از دوران این بردار حول محور $\hat{Z}$ به‌اندازهٔ ۳۰ درجه حاصل می‌شود، محاسبه کنیم. بردار جدید را ${}^{A}P_2$ بنامید.



شکل ۲-۱۰ بردار ${}^{A}P_1$ که به‌اندازهٔ ۳۰ درجه حول $\hat{Z}$ چرخیده است.

$$R_z(30.0) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

Given

$${}^{A}P_1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \tag{2.31}$$

we calculate ${}^{A}P_2$ as

$${}^{A}P_2 = R_z(30.0)\,{}^{A}P_1 = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 1.732 \\ 0.000 \end{bmatrix}. \tag{2.32}$$

عملگرهای تبدیل

مانند بردارها و ماتریسهای دوران، چهارچوب را نیز می‌توان به‌صورت «عملگر تبدیل» تعبیر کرد.

$$ {}^{A}P_{2} = T\, {}^{A}P_{1} \qquad (۳۳-۲) $$

تبدیلی که به‌وسیلهٔ R دوران، و به‌وسیلهٔ Q انتقال می‌دهد، معادل است با تبدیلی‌که چهارچوب دوران داده شده به‌وسیلهٔ R و انتقال یافته به‌وسیلهٔ Q را نسبت به چهارچوب مرجع توصیف می‌کند.

■ مثال ۲-۴

شکل ۲-۱۱ بردار $^{A}P_1$ را نشان می‌دهد. می‌خواهیم این بردار را به‌اندازهٔ ۳۰ درجه حول محور $\hat{Z}$ دوران، و به‌اندازهٔ ۱۰ واحد در راستای $\hat{X}_A$ و ۵ واحد در راستای $\hat{Y}_A$ انتقال دهیم. چنانچه $^{A}P_1 = [۳/۰ \ ۷/۰ \ ۰/۰]^T$، $^{A}P_2$ را به‌دست آورید.

عملگر T که دوران و انتقال را انجام می‌دهد، چنین است

$$T = \begin{bmatrix} ۰/۸۶۶ & -۰/۵۰۰ & ۰/۰۰۰ & ۱۰/۰ \\ ۰/۵۰۰ & ۰/۸۶۶ & ۰/۰۰۰ & ۵/۰ \\ ۰/۰۰۰ & ۰/۰۰۰ & ۱/۰۰۰ & ۰/۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۲-۳۴)$$

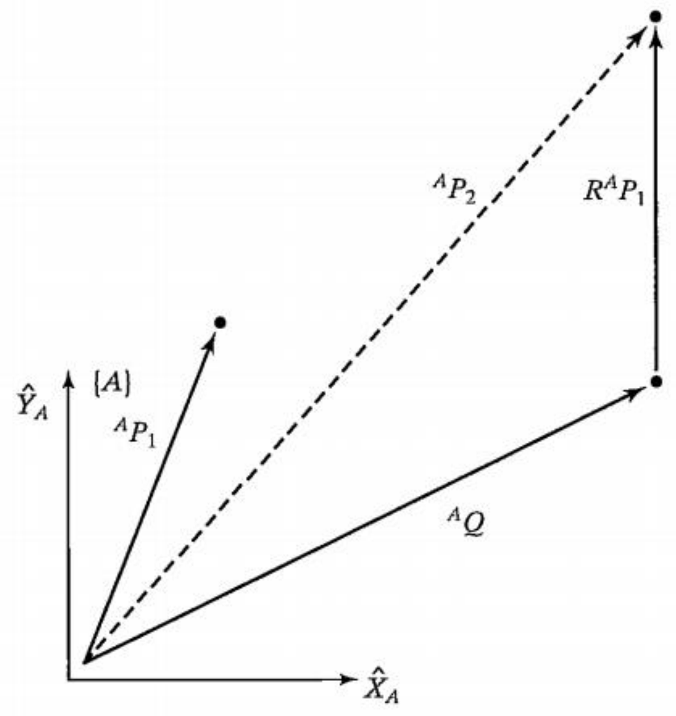


FIGURE 2.11: The vector $^{A}P_1$ rotated and translated to form $^{A}P_2$.

Given

$$^{A}P_1 = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 7.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

we use T as an operator:

$$^{A}P_2 = T\,^{A}P_1 = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0.000 \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

2.5 SUMMARY OF INTERPRETATIONS

1. It is a *description of a frame*. ${}^A_BT$ describes the frame $\{B\}$ relative to the frame $\{A\}$. Specifically, the columns of ${}^A_BR$ are unit vectors defining the directions of the principal axes of $\{B\}$, and ${}^AP_{BORG}$ locates the position of the origin of $\{B\}$.
2. It is a *transform mapping*. ${}^A_BT$ maps ${}^BP \rightarrow {}^AP$.
3. It is a *transform operator*. T operates on ${}^AP_1$ to create ${}^AP_2$.

از این پس، واژه‌های « چهارچوب» و « تبدیل» هر دو به معنای یک بردار مکان به‌علاوهٔ یک جهتگیری به‌کار خواهند رفت. از « چهارچوب» به هنگام صحبت از توصیف، و از تبدیل غالباً به مفهوم نگاشت یا عملگر استفاده می‌شود. همچنین، با توجه به اینکه واژهٔ تبدیل کلی، حالت کلی انتقال و دوران توأم را در بر می‌گیرد، بنابراین، اگر بخواهیم دوران صرف (یا انتقال صرف) را بیان کنیم، غالباً از واژهٔ تبدیل استفاده خواهیم کرد.

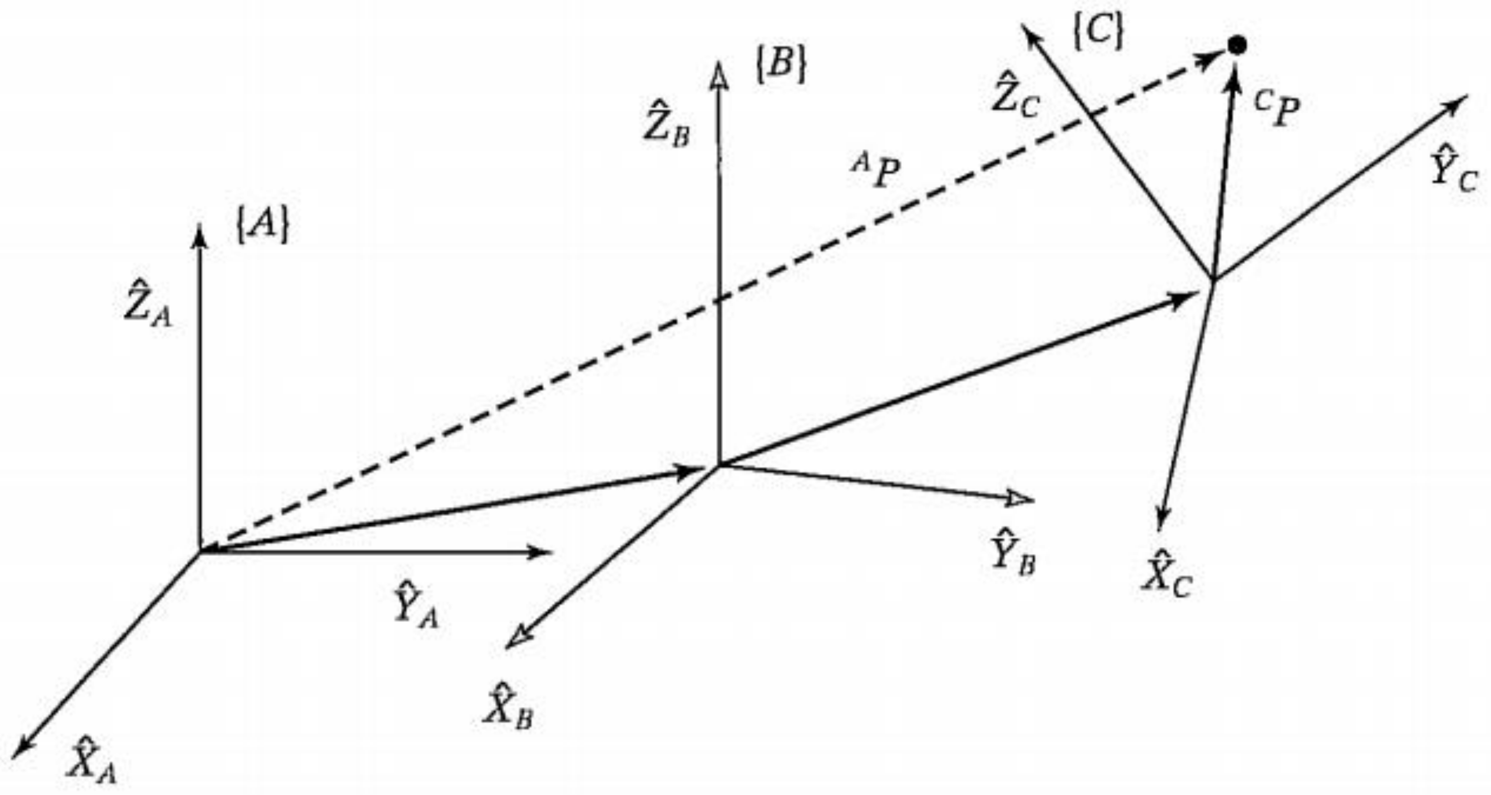


FIGURE 2.12: Compound frames: Each is known relative to the previous one.

Frame $\{C\}$ is known relative to frame $\{B\}$, and frame $\{B\}$ is known relative to frame $\{A\}$. We can transform ${}^{C}P$ into ${}^{B}P$ as

$$ {}^{B}P = {}^{B}_{C}T \, {}^{C}P; \tag{2.37} $$

then we can transform ${}^{B}P$ into ${}^{A}P$ as

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T \, {}^{B}P. \tag{2.38} $$

Combining (2.37) and (2.38), we get the (not unexpected) result

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T \, {}^{B}_{C}T \, {}^{C}P, \tag{2.39} $$

from which we could define

$$ {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T \, {}^{B}_{C}T. \tag{2.40} $$

$$
{}^{A}_{C}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{CORG} + {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (2.41)
$$

Inverting a transform

Consider a frame $\{B\}$ that is known with respect to a frame $\{A\}$ ${}^{A}_{B}T$.

${}^{B}_{A}T$. ؟؟؟؟

To find ${}^{B}_{A}T$, we must compute ${}^{B}_{A}R$ and ${}^{B}P_{AORG}$ from ${}^{A}_{B}R$ and ${}^{A}P_{BORG}$.

$$ {}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T}. \tag{2.42} $$

Next, we change the description of ${}^{A}P_{BORG}$ into $\{B\}$ by using (2.13):

$$ {}^{B}({}^{A}P_{BORG}) = {}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{BORG} + {}^{B}P_{AORG}. \tag{2.43} $$

The left-hand side of (2.43) must be zero, so we have

$$ {}^{B}P_{AORG} = -{}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{BORG} = -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG}. \tag{2.44} $$

Using (2.42) and (2.44), we can write the form of ${}^{B}_{A}T$ as

$$ {}^{B}_{A}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R^{T} & & -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{2.45} $$

Note that, with our notation,

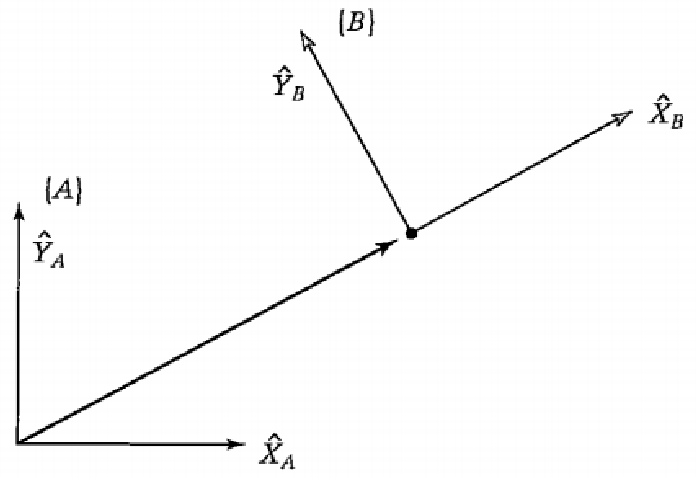
$$ {}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1}. $$

مثال

شکل ۲-۱۳ چهارچوب $\{B\}$ را نشان می‌دهد که نسبت به چهارچوب $\{A\}$ به‌اندازهٔ ۳۰ درجه حول محور $\hat{Z}$ دوران کرده، در راستاهای $\hat{X}_A$ و $\hat{Y}_A$ به‌ترتیب ۴ و ۳ واحد انتقال یافته است. بنابراین ${}^A_BT$ مشخص است. ${}^B_AT$ را بیابید.

The frame defining $\{B\}$ is

$$
{}^A_BT = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 4.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 3.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2.46)
$$



Using (2.45), we compute

$$
{}^{B}_{A}T = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.500 & 0.000 & -4.964 \\ -0.500 & 0.866 & 0.000 & -0.598 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.47}
$$

2.7 TRANSFORM EQUATIONS

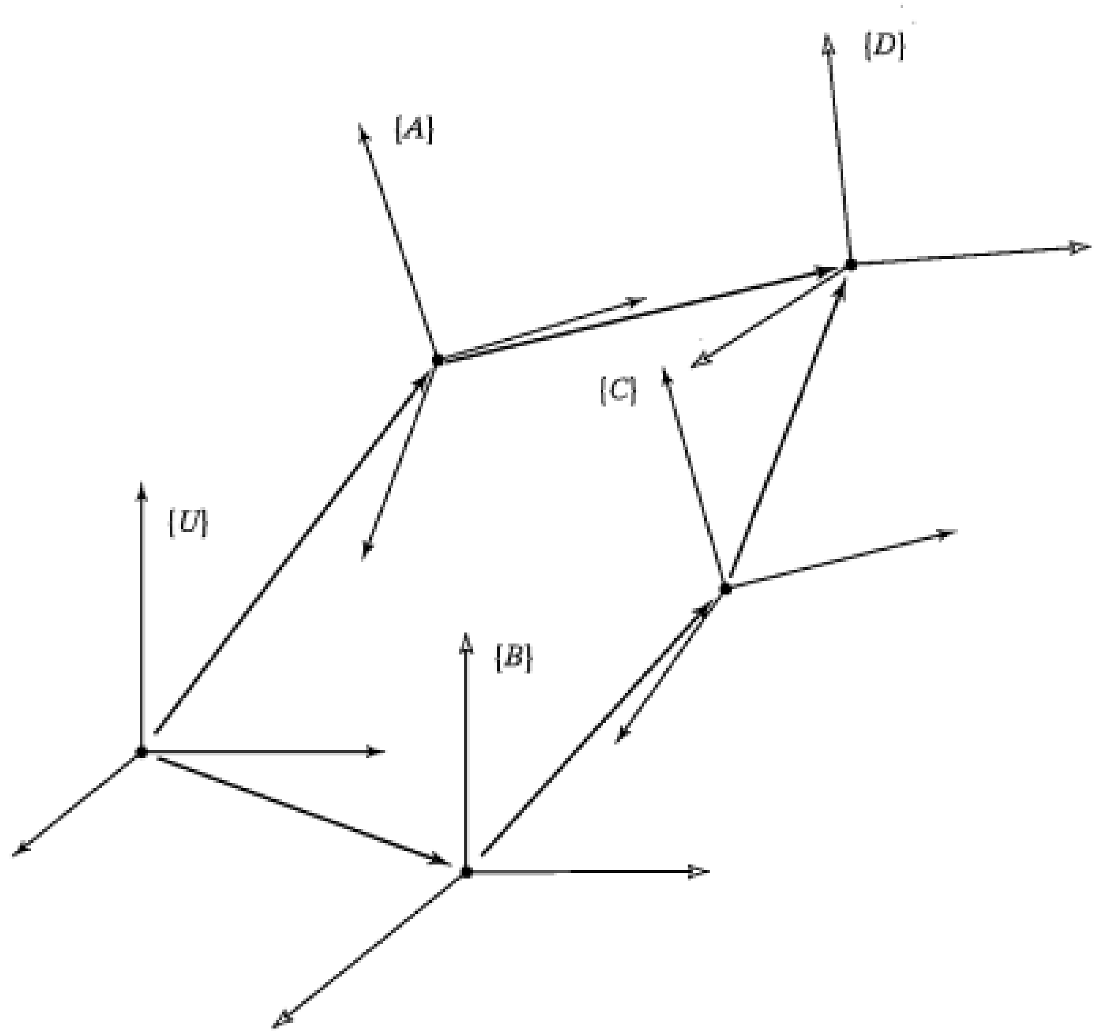


FIGURE 2.14: Set of transforms forming a loop.

$$ {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{A}T \, {}^{A}_{D}T; \tag{2.48} $$

second;

$$ {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{B}T \, {}^{B}_{C}T \, {}^{C}_{D}T. \tag{2.49} $$

We can set these two descriptions of ${}^{U}_{D}T$ equal to construct a **transform equation**:

$$ {}^{U}_{A}T \, {}^{A}_{D}T = {}^{U}_{B}T \, {}^{B}_{C}T \, {}^{C}_{D}T. \tag{2.50} $$

$$ {}^{B}_{C}T = {}^{U}_{B}T^{-1} \, {}^{U}_{A}T \, {}^{A}_{D}T \, {}^{C}_{D}T^{-1}. $$

$$^{U}_{C}T = {}^{U}_{A}T\;{}^{D}_{A}T^{-1}\;{}^{D}_{C}T \tag{2.52}$$

and

$$^{U}_{C}T = {}^{U}_{B}T\;{}^{B}_{C}T. \tag{2.53}$$

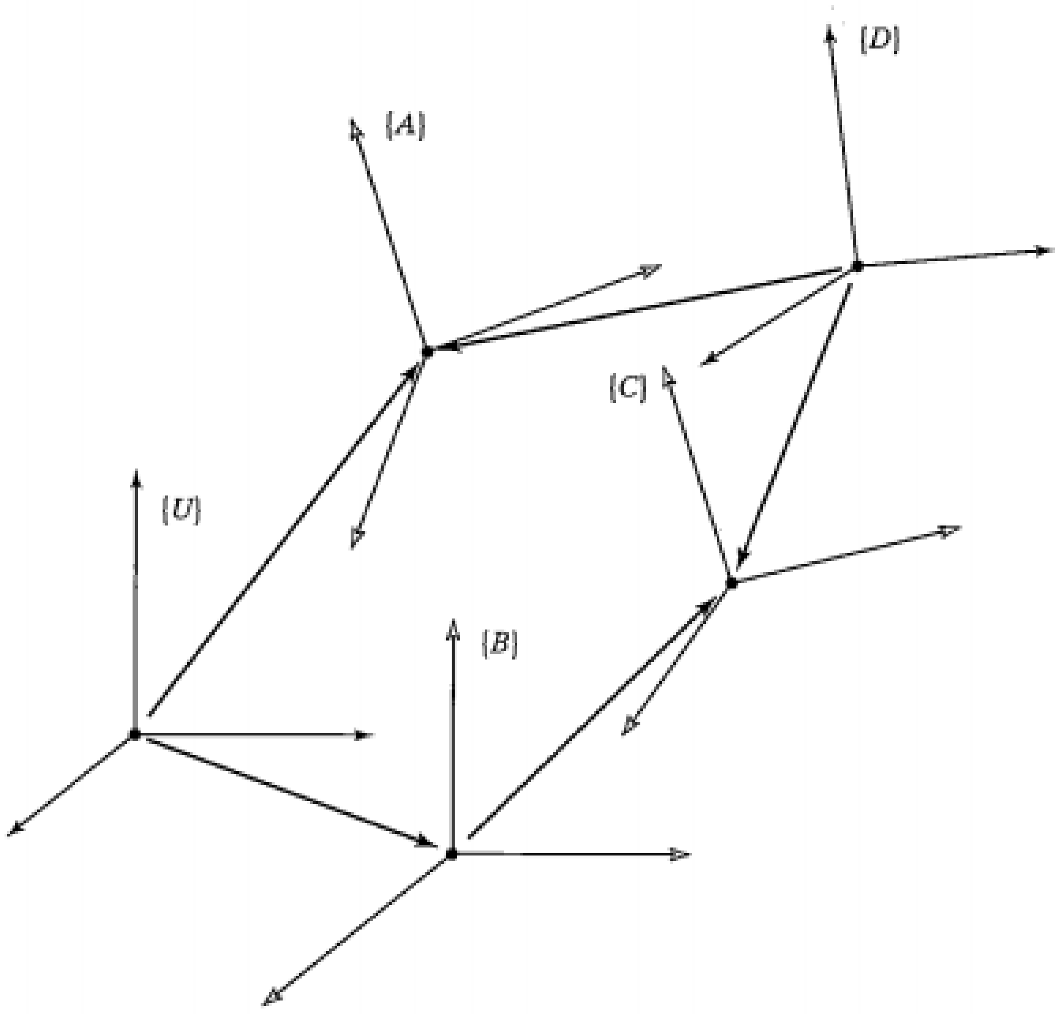


FIGURE 2.15: Example of a transform equation.

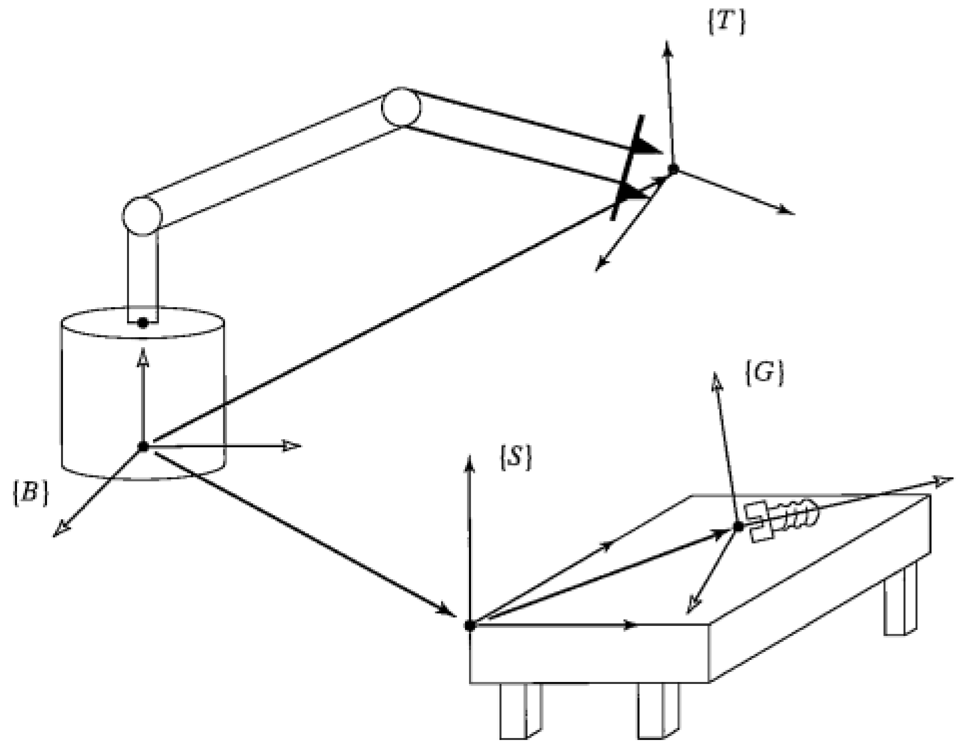


FIGURE 2.16: Manipulator reaching for a bolt.

$$ {}^{U}_{A}T = {}^{U}_{B}T \; {}^{B}_{C}T \; {}^{D}_{C}T^{-1} \; {}^{D}_{A}T. $$

مثال

فرض کنید تبدیل ${}^{B}_{T}T$ در شکل ۲-۱۶، که نمایانگر چهارچوب $\{T\}$، واقع بر انگشتان بازوی مکانیکی نسبت به پایهٔ بازو $\{B\}$ است، معلوم باشد. همچنین، تبدیل ${}^{B}_{S}T$، چهارچوب $\{S\}$ را که به میز کار متصل است، نسبت به پایهٔ $\{B\}$ توصیف می‌کند. مکان پیچی که روی میز قرار دارد نیز به‌وسیلهٔ تبدیل ${}^{S}_{G}T$ مشخص می‌شود. ${}^{T}_{G}T$، مکان و جهتگیری پیچ نسبت به دست بازوی مکانیکی ماهر، را محاسبه کنید.

$$ {}^{T}_{G}T = {}^{B}_{T}T^{-1} \; {}^{B}_{S}T \; {}^{S}_{G}T $$

ماتریسهای دوران را **ماتریسهای یکامتعامد سره** نیز می‌نامند.

که دترمینان ماتریس مقدار عددی برابر با ۱+ دارد (ماتریسهای یکامتعامد «ناسره» دترمینانی برابر با ۱− دارند).

این سؤال مطرح می‌شود که آیا یک جهتگیری را می‌توان با کمتر از ۹ عدد توصیف کرد یا نه. برطبق **فرمول کیلی**[۱] **برای ماتریسهای یکامتعامد** در جبر خطی ، برای هر ماتریس یکامتعامد سره، می‌توان یک ماتریس «پادمتقارن» تعریف کرد، به‌گونه‌ای که

$$R = (I_۳ - S)^{-۱}(I_۳ + S) \qquad (۵۶\text{-}۲)$$

که در آن $I_۳$ ماتریس یکهٔ ۳ × ۳ است. ماتریس پادمتقارن (یعنی $S = -S^T$)، که خود ماتریسی ۳ × ۳ است، برحسب سه پارامتر (s_x, s_y, s_z) چنین به‌دست می‌آید

$$S = \begin{bmatrix} ۰ & -s_z & s_y \\ s_z & ۰ & -s_x \\ -s_y & s_x & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۵۷\text{-}۲)$$

$$|\hat{X}| = 1,$$
$$|\hat{Y}| = 1,$$
$$|\hat{Z}| = 1,$$
$$\hat{X} \cdot \hat{Y} = 0,$$
$$\hat{X} \cdot \hat{Z} = 0,$$
$$\hat{Y} \cdot \hat{Z} = 0.$$

EXAMPLE 2.7

Consider two rotations, one about $\hat{Z}$ by 30 degrees and one about $\hat{X}$ by 30 degrees:

$$R_z(30) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

$$R_x(30) = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.866 & -0.500 \\ 0.000 & 0.500 & 0.866 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

$$R_z(30)R_x(30) = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.43 & 0.25 \\ 0.50 & 0.75 & -0.43 \\ 0.00 & 0.50 & 0.87 \end{bmatrix}$$

$$\neq R_x(30)R_z(30) = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.50 & 0.00 \\ 0.43 & 0.75 & -0.50 \\ 0.25 & 0.43 & 0.87 \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

- ماتریس ذوران برای نشان دادن جهت گیری مناسب نیست.
- راه حل؟؟؟؟

X–Y–Z fixed angles

One method of describing the orientation of a frame $\{B\}$ is as follows:

> Start with the frame coincident with a known reference frame $\{A\}$. Rotate $\{B\}$ first about $\hat{X}_A$ by an angle γ, then about $\hat{Y}_A$ by an angle β, and, finally, about $\hat{Z}_A$ by an angle α.

roll, pitch, yaw angles,

۱. roll دوران حول محور طولی.

۲. pitch دوران حول محور عرضی.

۳. yaw دوران حول محور قائم.

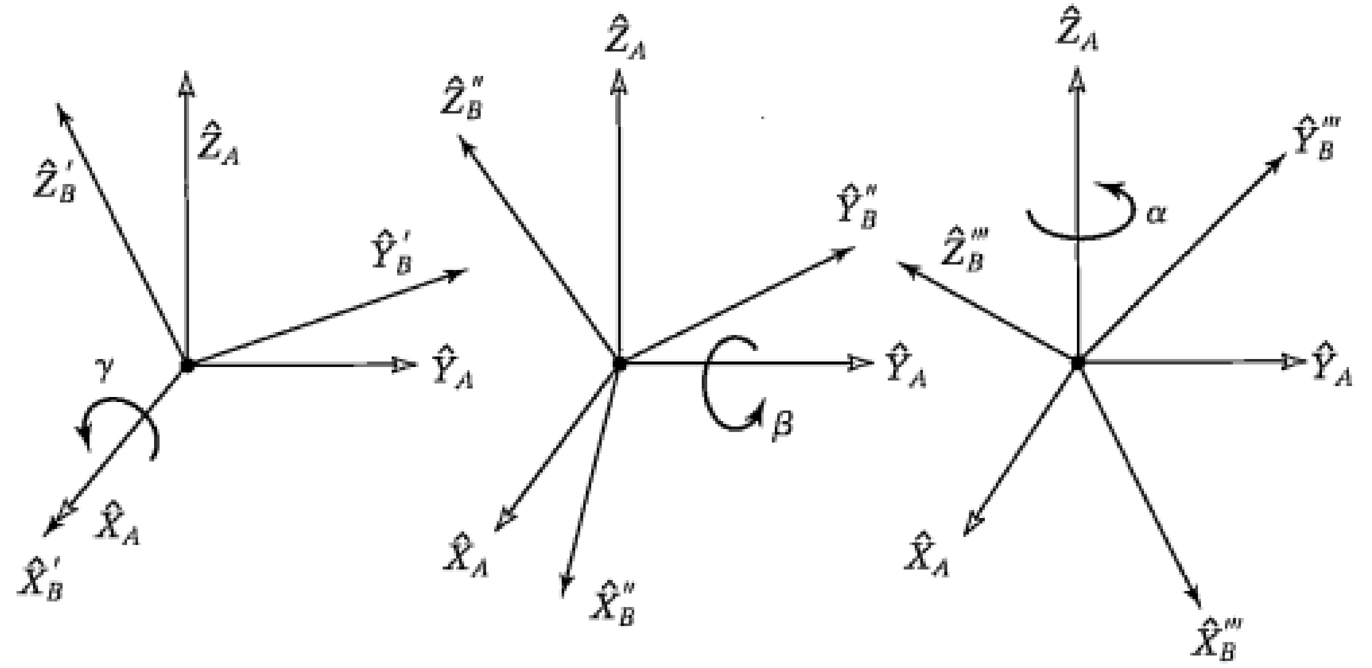


FIGURE 2.17: X–Y–Z fixed angles. Rotations are performed in the order $R_X(\gamma)$, $R_Y(\beta)$, $R_Z(\alpha)$.

$$
\begin{aligned}
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) &= R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{2.63}
$$

$$
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}. \tag{2.64}
$$

$$ {}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}. \tag{2.65} $$

از رابطهٔ (۲-۶۴) مشاهده می‌شود که با محاسبهٔ جذر مجموع مربعات $r_{۱۱}$ و $r_{۲۱}$، می‌توان $\cos\beta$ را به‌دست آورد. سپس زاویهٔ β با گرفتن آرک تانژانت از نسبت $-r_{۳۱}$ به $\cos\beta$، محاسبه می‌شود. تا زمانی‌که $c\beta \neq ۰$، می‌توان α را با گرفتن آرک تانژانت از نسبت $r_{۲۱}/c\beta$ به $r_{۱۱}/c\beta$، و γ را با گرفتن آرک تانژانت از نسبت $r_{۳۲}/c\beta$ به $r_{۳۳}/c\beta$ به‌دست آورد.

به‌طور خلاصه می‌توان نوشت

$$ \begin{aligned} \beta &= \mathrm{Atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right), \\ \alpha &= \mathrm{Atan2}(r_{21}/c\beta, r_{11}/c\beta), \\ \gamma &= \mathrm{Atan2}(r_{32}/c\beta, r_{33}/c\beta), \end{aligned} \tag{2.66} $$

که در آن $\mathrm{Atan۲}(y, x)$ آرک تانژانت دو شناسه‌ای است.[۱]

[3] $\operatorname{Atan2}(y, x)$ computes $\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ but uses the signs of both x and y to identify the quadrant in which the resulting angle lies. For example, Atan 2(−2.0, −2.0) = −135°, whereas Atan 2(2.0, 2.0) = 45°, a

$$\begin{aligned} \beta &= 90.0°, \\ \alpha &= 0.0, \\ \gamma &= \operatorname{Atan2}(r_{12}, r_{22}). \end{aligned} \tag{2.67}$$

If $\beta = -90.0°$, then a solution can be calculated to be

$$\begin{aligned} \beta &= -90.0°, \\ \alpha &= 0.0, \\ \gamma &= -\operatorname{Atan2}(r_{12}, r_{22}). \end{aligned} \tag{2.68}$$

Z–Y–X Euler angles

Another possible description of a frame $\{B\}$ is as follows:

> Start with the frame coincident with a known frame $\{A\}$. Rotate $\{B\}$ first about $\hat{Z}_B$ by an angle α, then about $\hat{Y}_B$ by an angle β, and, finally, about $\hat{X}_B$ by an angle γ.

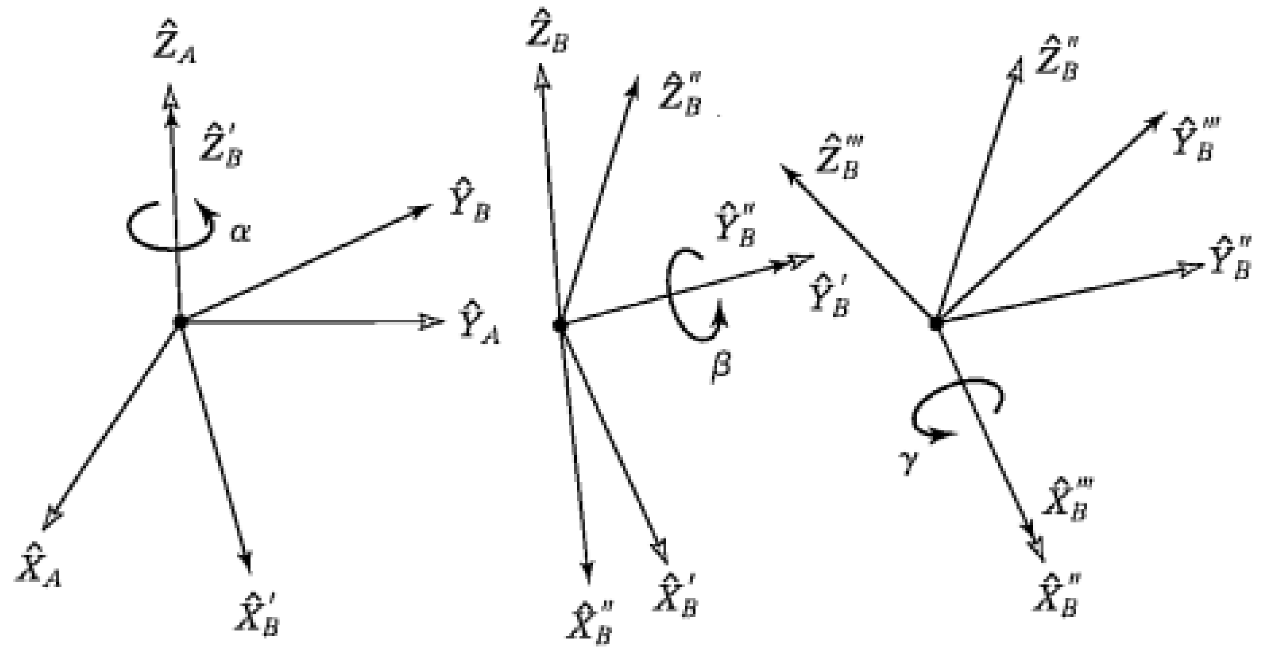


FIGURE 2.18: Z–Y–X Euler angles.

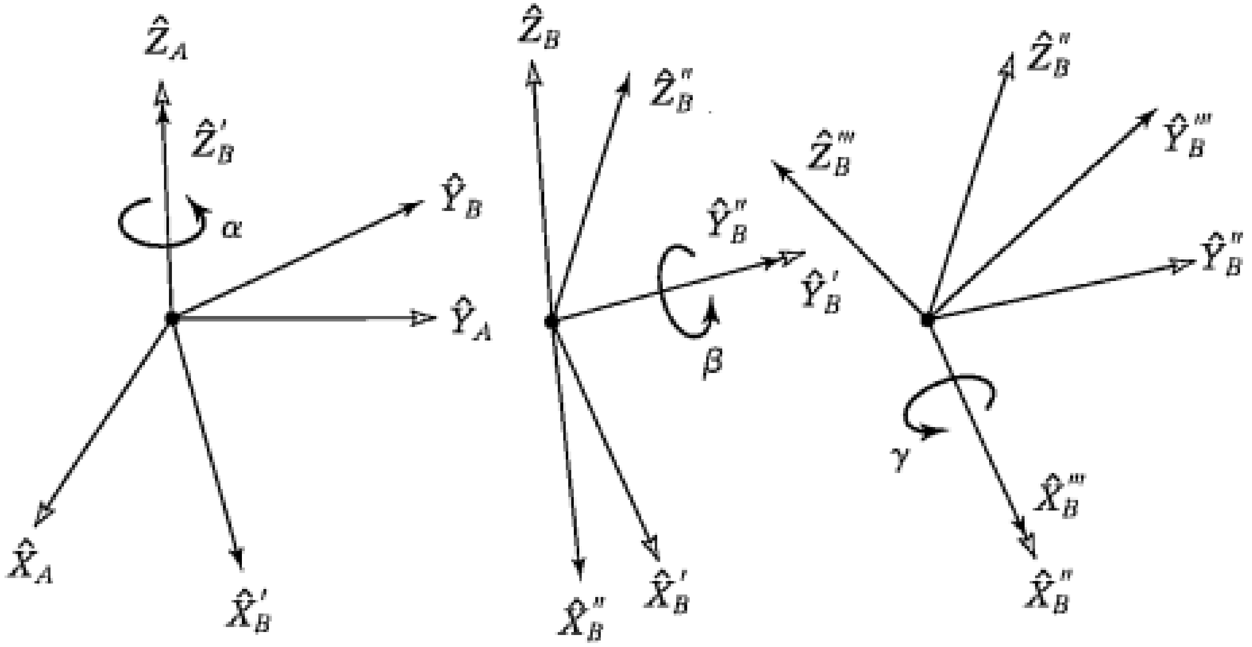


FIGURE 2.18: Z–Y–X Euler angles.

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{A}_{B'}R \; {}^{B'}_{B''}R \; {}^{B''}_{B}R, \tag{2.69}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'} &= R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

where $c\alpha = \cos\alpha$, $s\alpha = \sin\alpha$, and so on. Multiplying out, we obtain

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}.
\tag{2.71}
$$

Z–Y–Z Euler angles

Another possible description of a frame $\{B\}$ is

> Start with the frame coincident with a known frame $\{A\}$. Rotate $\{B\}$ first about $\hat{Z}_B$ by an angle α, then about $\hat{Y}_B$ by an angle β, and, finally, about Z_b by an angle γ.

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}. \qquad (2.72)
$$

The solution for extracting Z–Y–Z Euler angles from a rotation matrix is stated next.

Given

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \qquad (2.73)
$$

then, if $\sin\beta \neq 0$, it follows that

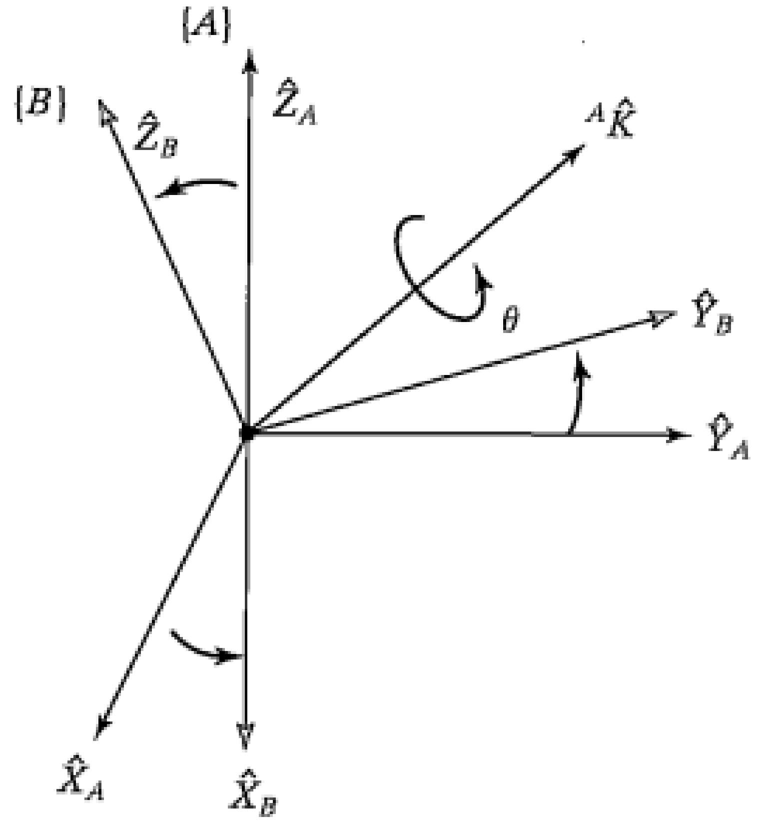
$$
\begin{aligned}
\beta &= \mathrm{Atan2}\left(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}\right), \\
\alpha &= \mathrm{Atan2}(r_{23}/s\beta, r_{13}/s\beta), \qquad (2.74) \\
\gamma &= \mathrm{Atan2}(r_{32}/s\beta, -r_{31}/s\beta).
\end{aligned}
$$

If $\beta = 0.0$, then a solution can be calculated to be

$$\begin{aligned} \beta &= 0.0, \\ \alpha &= 0.0, \\ \gamma &= \mathrm{Atan2}(-r_{12}, r_{11}). \end{aligned} \tag{2.75}$$

If $\beta = 180.0°$, then a solution can be calculated to be

$$\begin{aligned} \beta &= 180.0°, \\ \alpha &= 0.0, \\ \gamma &= \mathrm{Atan2}(r_{12}, -r_{11}). \end{aligned} \tag{2.76}$$



$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad (2.77)$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{2.78}$$

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.79}$$

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y k_y v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z k_z v\theta + c\theta \end{bmatrix}, \tag{2.80}$$

where $c\theta = \cos\theta$, $s\theta = \sin\theta$, $v\theta = 1 - \cos\theta$, and ${}^A\hat{K} = [k_x k_y k_z]^T$. The sign of θ is determined by the right-hand rule, with the thumb pointing along the positive sense of ${}^A\hat{K}$.

$$ {}^{A}_{B}R_K(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.81} $$

$$ \theta = \mathrm{A}\cos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) $$

$$ \hat{K} = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}. \tag{2.82} $$

EXAMPLE 2.8

A frame $\{B\}$ is described as initially coincident with $\{A\}$. We then rotate $\{B\}$ about the vector ${}^{A}\hat{K} = [0.7070\ 7070\ 0]^T$ (passing through the origin) by an amount $\theta = 30$ degrees. Give the frame description of $\{B\}$.

Substituting into (2.80) yields the rotation-matrix part of the frame description. There was no translation of the origin, so the position vector is $[0, 0, 0]^T$. Hence,

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0.0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0.0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}. \qquad (2.83) $$

EXAMPLE 2.9

A frame $\{B\}$ is described as initially coincident with $\{A\}$. We then rotate $\{B\}$ about the vector ${}^{A}\hat{K} = [0.707\ 0.707\ 0.0]^{T}$ (passing through the point ${}^{A}P = [1.0\ 2.0\ 3.0]$) by an amount $\theta = 30$ degrees. Give the frame description of $\{B\}$.

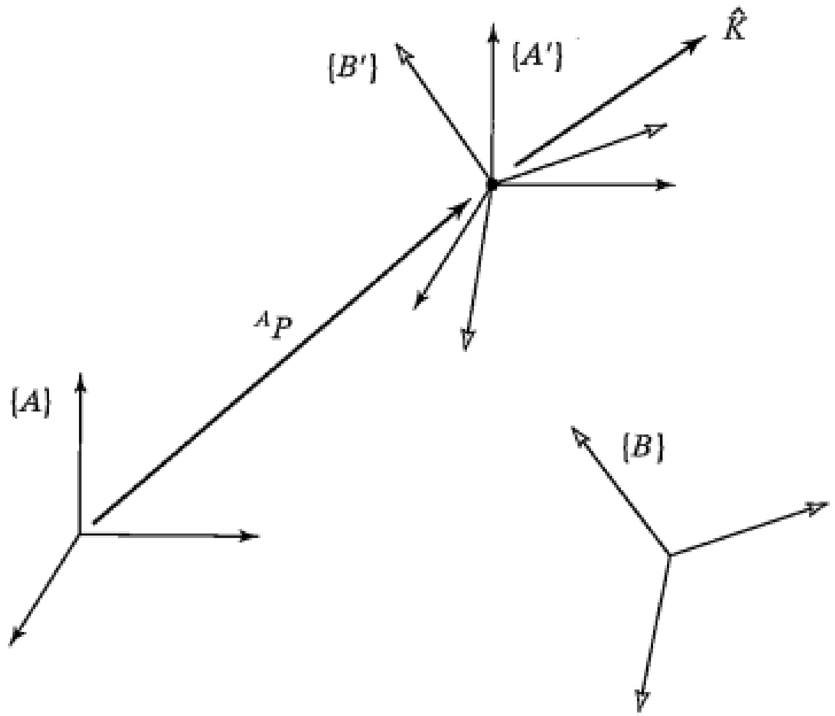


FIGURE 2.20: Rotation about an axis that does not pass through the origin of $\{A\}$. Initially, $\{B\}$ was coincident with $\{A\}$.

$$
{}^{A}_{A'}T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 3.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}. \tag{2.84}
$$

$$
{}^{B'}_{B}T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & -2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -3.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}. \tag{2.85}
$$

$$
{}^{A'}_{B'}T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0.0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0.0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}. \tag{2.86}
$$

Finally, we can write a transform equation to compute the desired frame,

$$
{}^{A}_{B}T = {}^{A}_{A'}T \, {}^{A'}_{B'}T \, {}^{B'}_{B}T, \tag{2.87}
$$

which evaluates to

$$
{}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & -1.13 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 1.13 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.05 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.00 \end{bmatrix}. \tag{2.88}
$$

Euler parameters

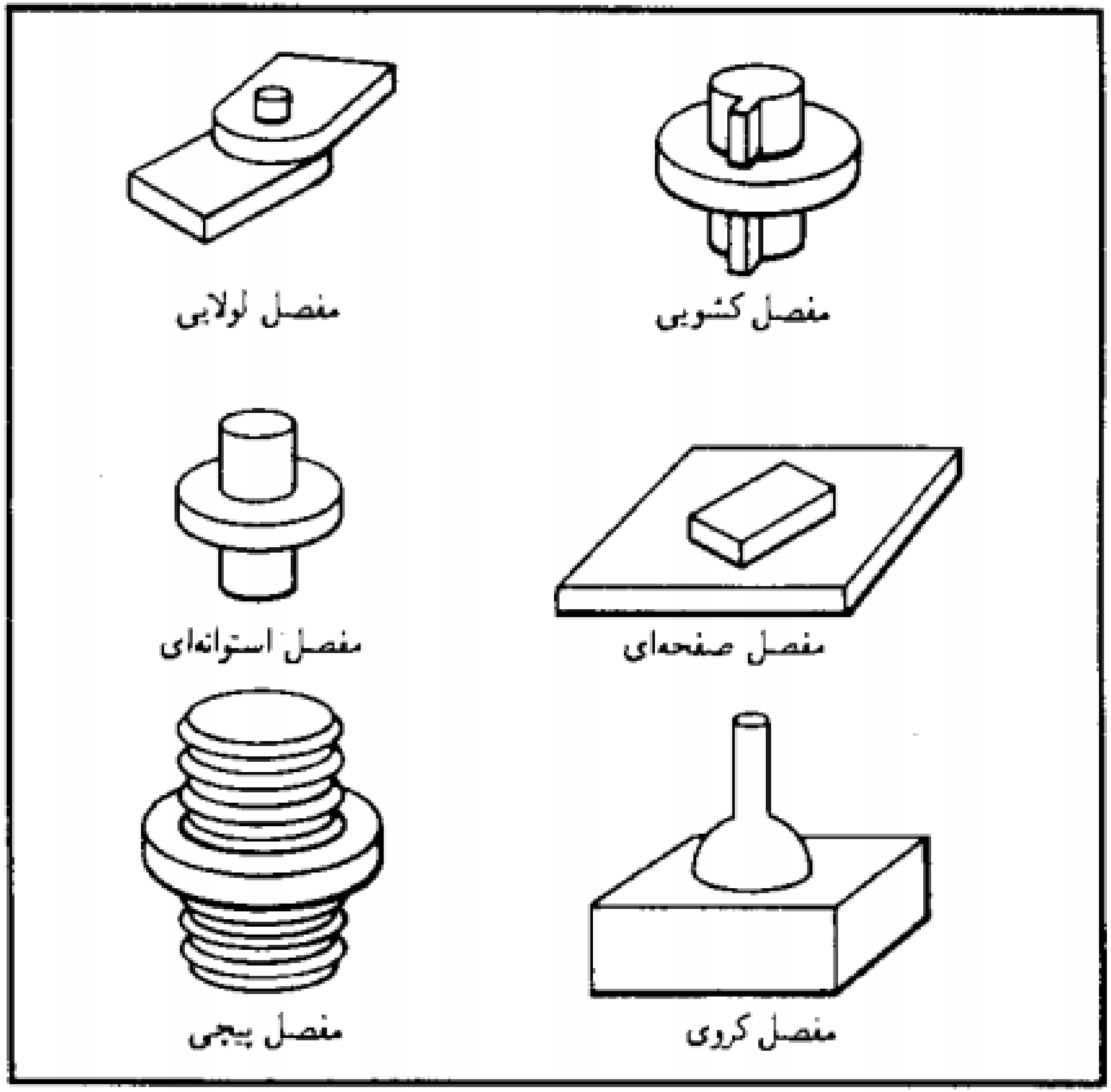
Another representation of orientation is by means of four numbers called the **Euler parameters**.

In terms of the equivalent axis $\hat{K} = [k_x\ k_y\ k_z]^T$ and the equivalent angle θ, the Euler parameters are given by

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= k_x \sin\frac{\theta}{2}, \\ \epsilon_2 &= k_y \sin\frac{\theta}{2}, \\ \epsilon_3 &= k_z \sin\frac{\theta}{2}, \\ \epsilon_4 &= \cos\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{2.89}$$

It is then clear that these four quantities are not independent:

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 = 1 \tag{2.90}$$

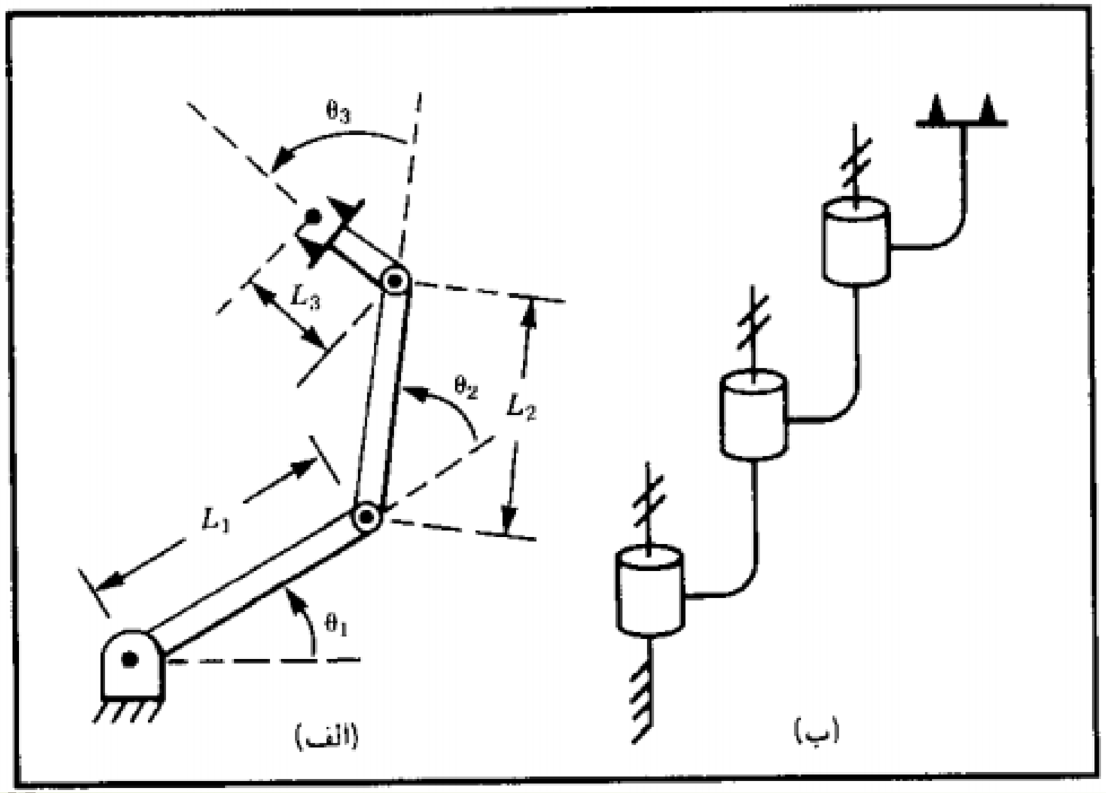

مفصل لولایی
مفصل کشویی
مفصل استوانه‌ای
مفصل صفحه‌ای
مفصل پیچی
مفصل کروی

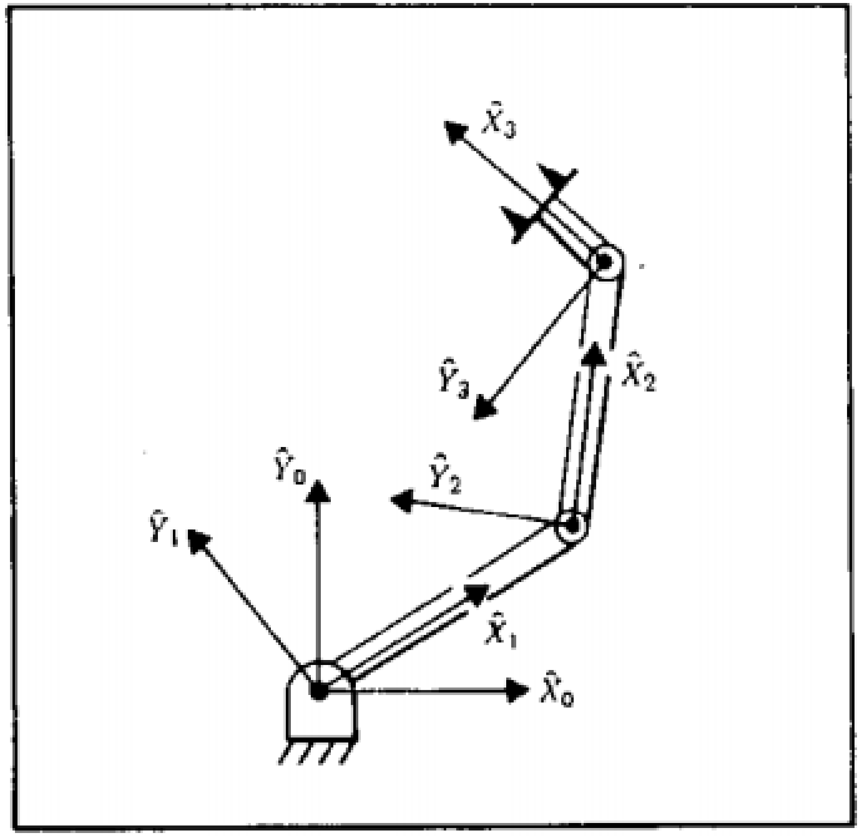
$a_i =$ فاصلهٔ بین $\hat{Z}_i$ و $\hat{Z}_{i+1}$ اندازه‌گیری شده در راستای $\hat{X}_i$؛

$\alpha_i =$ زاویهٔ بین $\hat{Z}_i$ و $\hat{Z}_{i+1}$ اندازه‌گیری شده حول $\hat{X}_i$؛

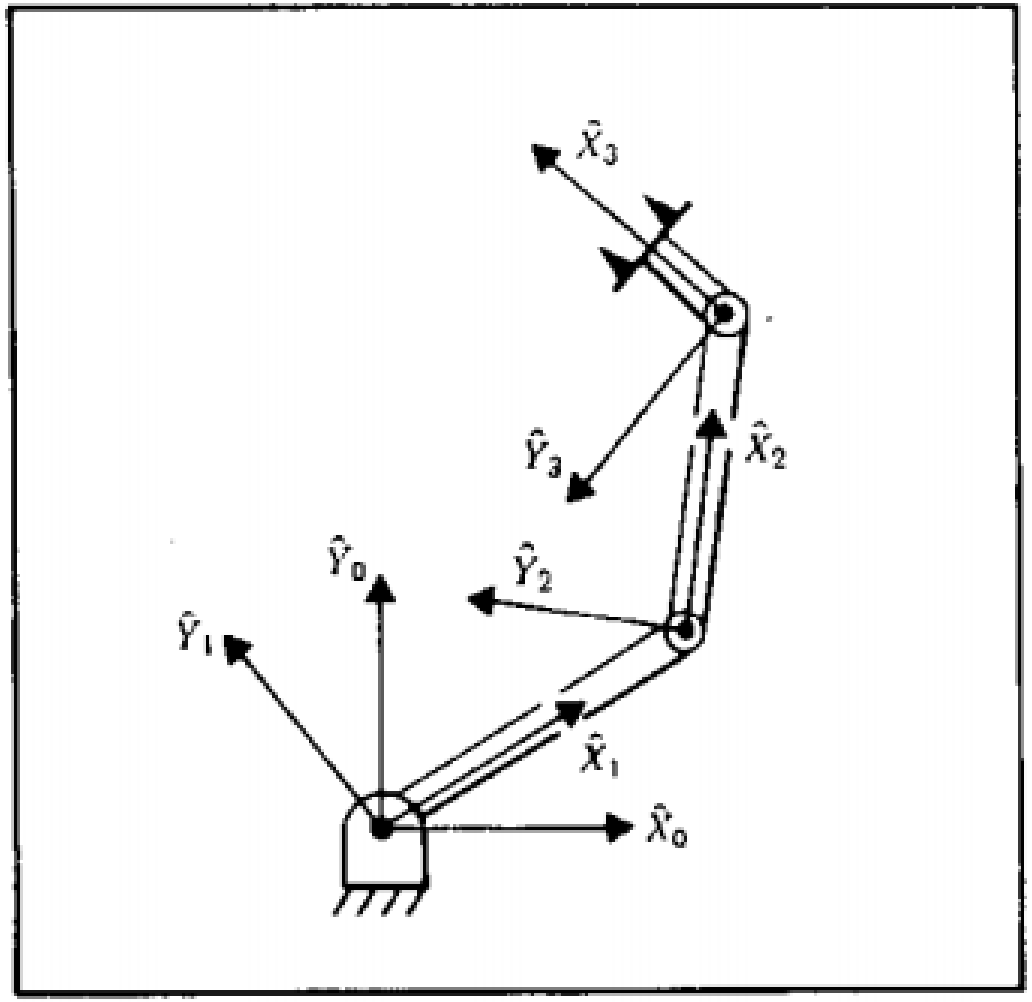
$d_i =$ فاصلهٔ بین $\hat{X}_{i-1}$ و $\hat{X}_i$ اندازه‌گیری شده در راستای $\hat{Z}_i$؛ و

$\theta_i =$ زاویهٔ بین $\hat{X}_{i-1}$ و $\hat{X}_i$ اندازه‌گیری شده حول $\hat{Z}_i$.





$a_i =$ فاصلهٔ بین $\hat{Z}_i$ و $\hat{Z}_{i+1}$ اندازه‌گیری شده در راستای $\hat{X}_i$؛
$\alpha_i =$ زاویهٔ بین $\hat{Z}_i$ و $\hat{Z}_{i+1}$ اندازه‌گیری شده حول $\hat{X}_i$؛
$d_i =$ فاصلهٔ بین $\hat{X}_{i-1}$ و $\hat{X}_i$ اندازه‌گیری شده در راستای $\hat{Z}_i$؛ و
$\theta_i =$ زاویهٔ بین $\hat{X}_{i-1}$ و $\hat{X}_i$ اندازه‌گیری شده حول $\hat{Z}_i$.



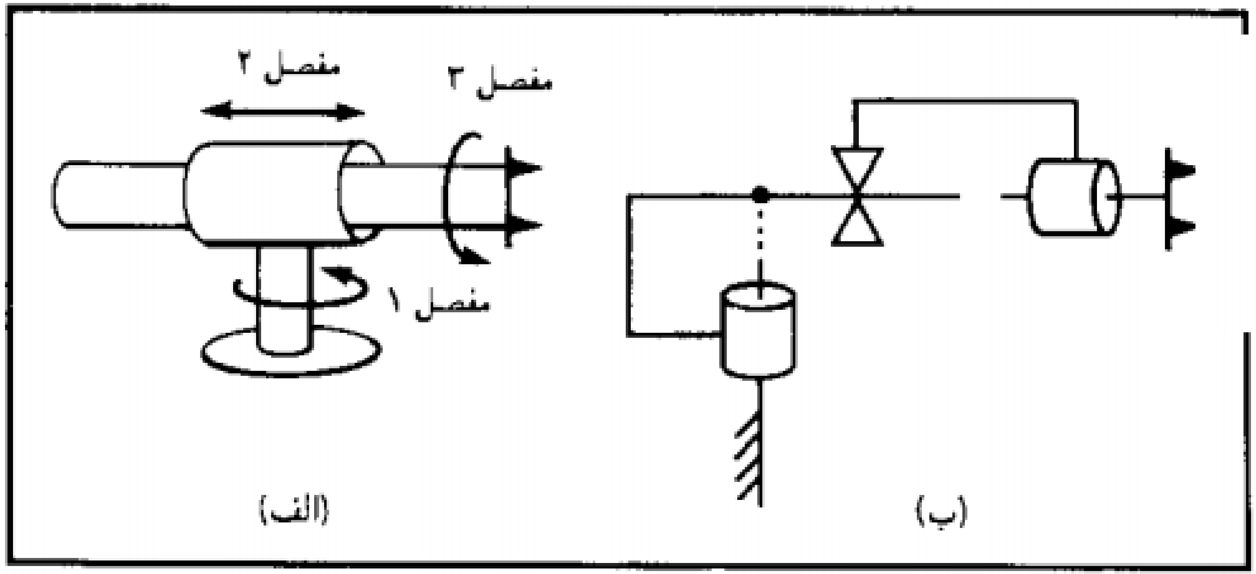
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

a_i = فاصلهٔ بین $\hat{Z}_i$ و $\hat{Z}_{i+1}$ اندازه‌گیری شده در راستای $\hat{X}_i$؛

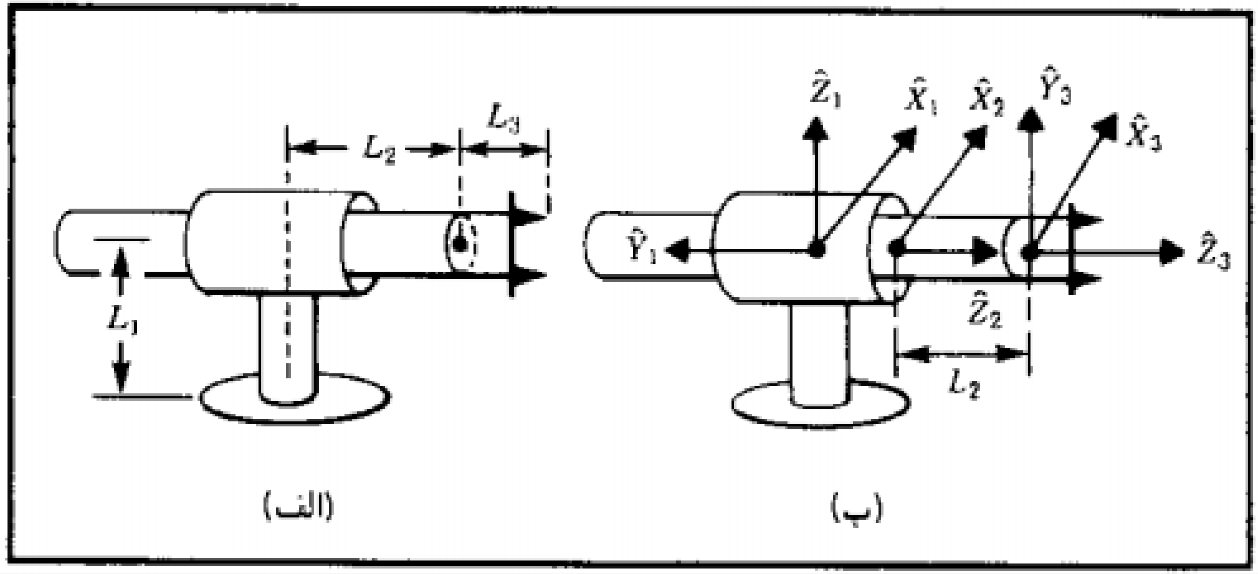
α_i = زاویهٔ بین $\hat{Z}_i$ و $\hat{Z}_{i+1}$ اندازه‌گیری شده حول $\hat{X}_i$؛

d_i = فاصلهٔ بین $\hat{X}_{i-1}$ و $\hat{X}_i$ اندازه‌گیری شده در راستای $\hat{Z}_i$؛ و

θ_i = زاویهٔ بین $\hat{X}_{i-1}$ و $\hat{X}_i$ اندازه‌گیری شده حول $\hat{Z}_i$.



شکل ۳-۹ بازوی مکانیکی ماهر با سه درجهٔ آزادی و یک مفصل کشویی.



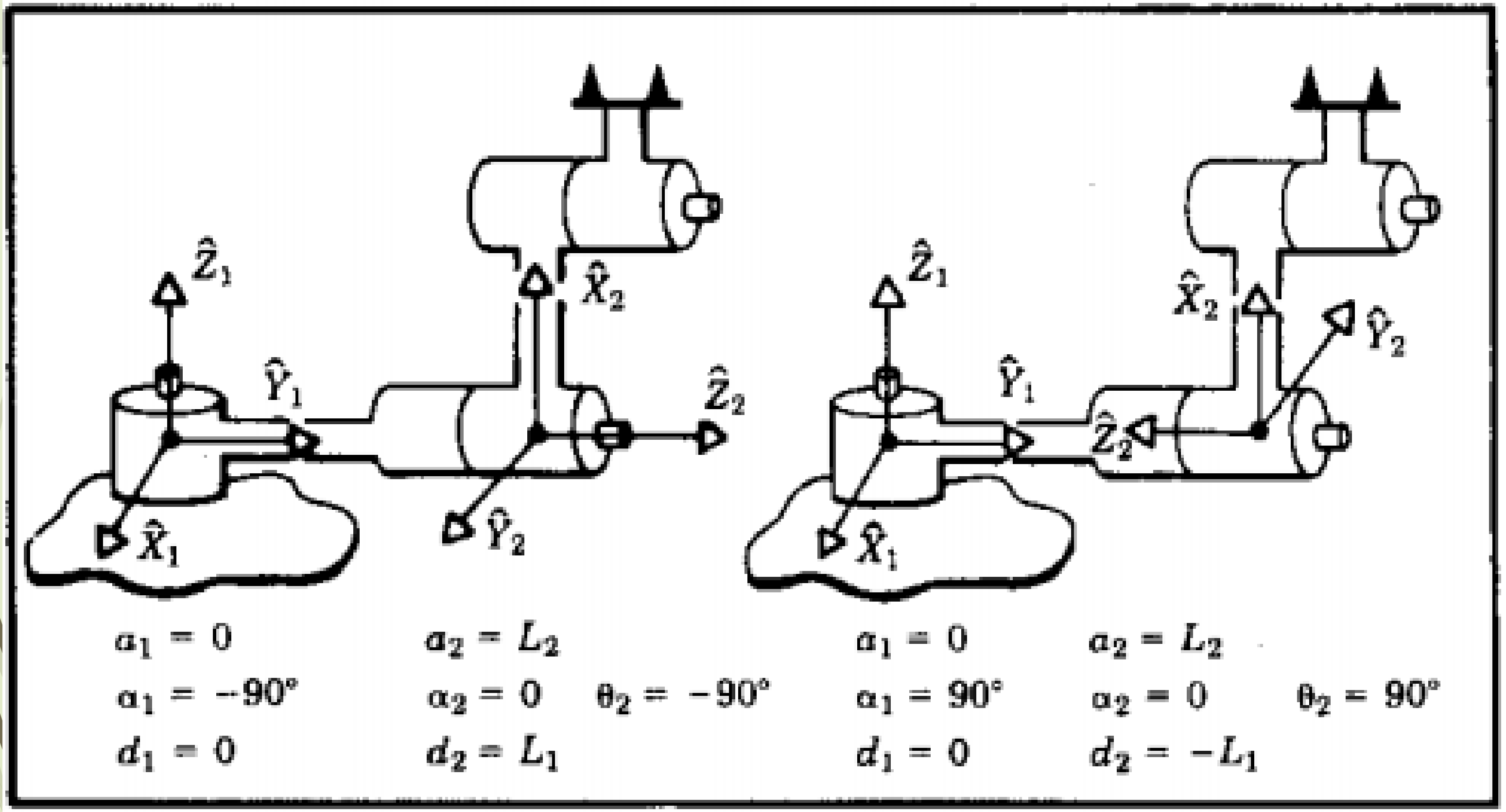
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

$a_i =$ فاصلهٔ بین $\hat{Z}_i$ و $\hat{Z}_{i+1}$ اندازه‌گیری شده در راستای $\hat{X}_i$؛

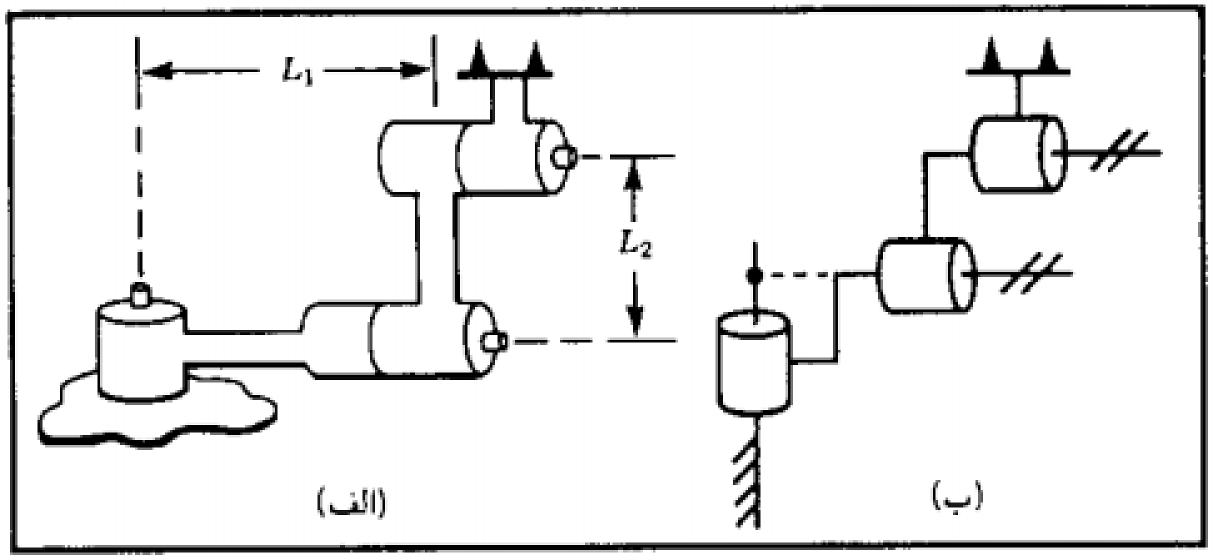
$\alpha_i =$ زاویهٔ بین $\hat{Z}_i$ و $\hat{Z}_{i+1}$ اندازه‌گیری شده حول $\hat{X}_i$؛

$d_i =$ فاصلهٔ بین $\hat{X}_{i-1}$ و $\hat{X}_i$ اندازه‌گیری شده در راستای $\hat{Z}_i$؛ و

$\theta_i =$ زاویهٔ بین $\hat{X}_{i-1}$ و $\hat{X}_i$ اندازه‌گیری شده حول $\hat{Z}_i$.

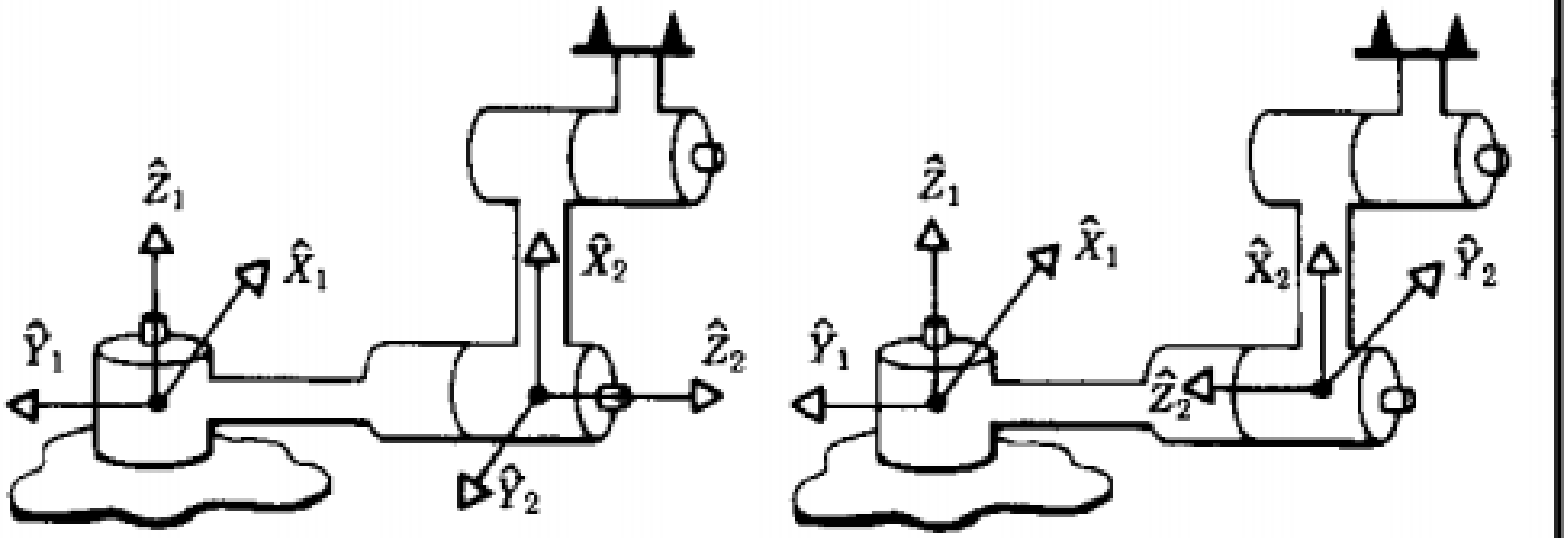


Quiz

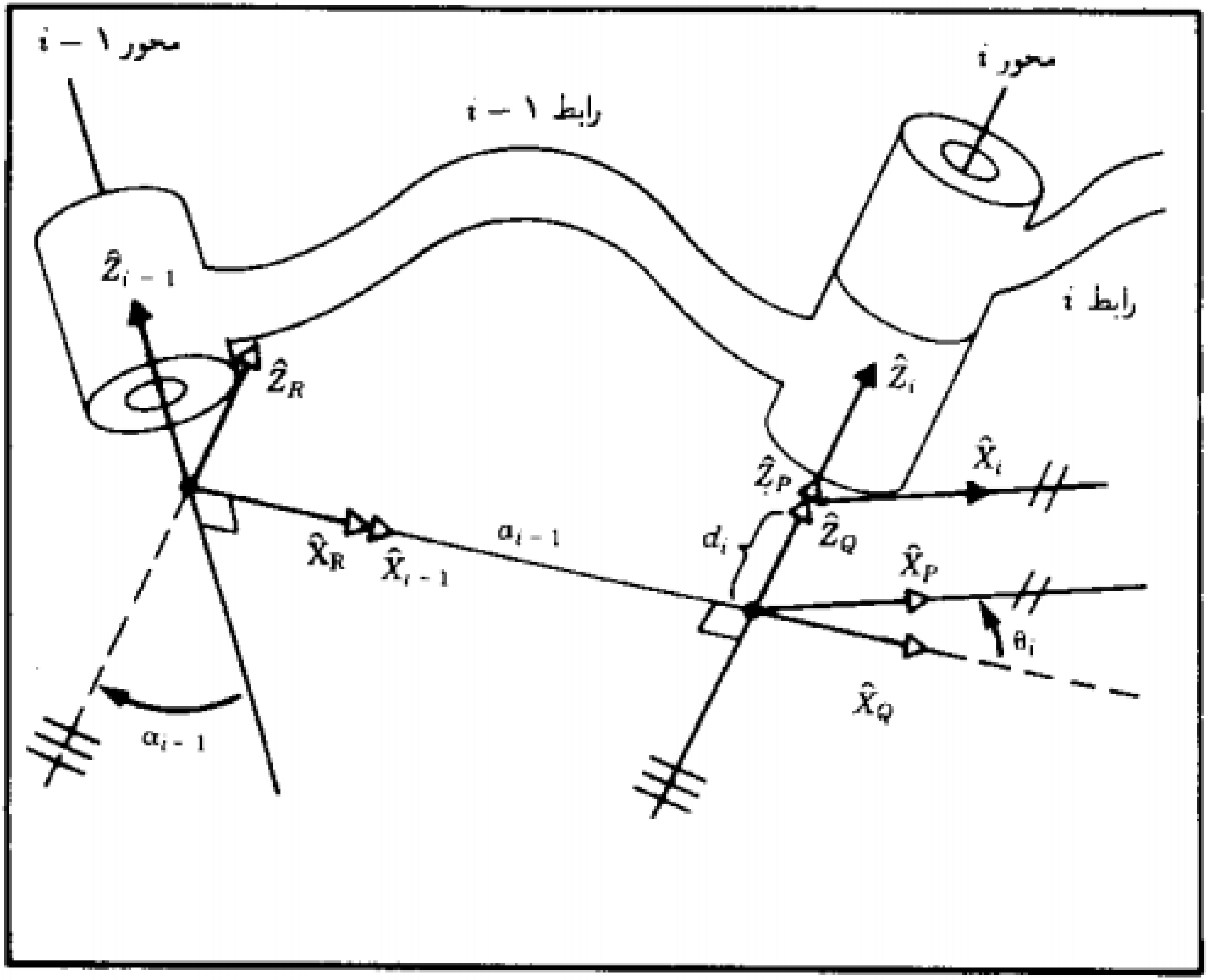


شکل ۳-۱۲ بازوی مکانیکی ماهر غیر صفحه‌ای با سه رابط.

$a_i =$ فاصلهٔ بین $\hat{Z}_i$ و $\hat{Z}_{i+1}$ اندازه‌گیری شده در راستای $\hat{X}_i$؛
$\alpha_i =$ زاویهٔ بین $\hat{Z}_i$ و $\hat{Z}_{i+1}$ اندازه‌گیری شده حول $\hat{X}_i$؛
$d_i =$ فاصلهٔ بین $\hat{X}_{i-1}$ و $\hat{X}_i$ اندازه‌گیری شده در راستای $\hat{Z}_i$؛ و
$\theta_i =$ زاویهٔ بین $\hat{X}_{i-1}$ و $\hat{X}_i$ اندازه‌گیری شده حول $\hat{Z}_i$.



$a_1 = 0$	$a_2 = L_2$		$a_1 = 0$	$a_2 = L_2$	
$\alpha_1 = 90°$	$\alpha_2 = 0$	$\theta_2 = 90°$	$\alpha_1 = -90°$	$\alpha_2 = 0$	$\theta_2 = -90°$
$d_1 = 0$	$d_2 = L_1$		$d_1 = 0$	$d_2 = -L_1$	



محل قرارگیری چهارچوبهای میانی $\{P\}$، $\{Q\}$، و $\{R\}$.

$$ {}^{i-1}P = {}^{i-1}_{i}T \; {}^{i}P $$

$$ {}^{i-1}_{i}T = {}^{i-1}_{R}T \; {}^{R}_{Q}T \; {}^{Q}_{P}T \; {}^{P}_{i}T $$

$$ {}^{i-1}_{i}T = R_X(\alpha_{i-1}) \; D_X(a_{i-1}) \; R_Z(\theta_i) \; D_Z(d_i) $$

$$ {}^{i-1}_{i}T = \mathrm{Screw}_X(a_{i-1}, \alpha_{i-1})\mathrm{Screw}_Z(d_i, \theta_i) $$

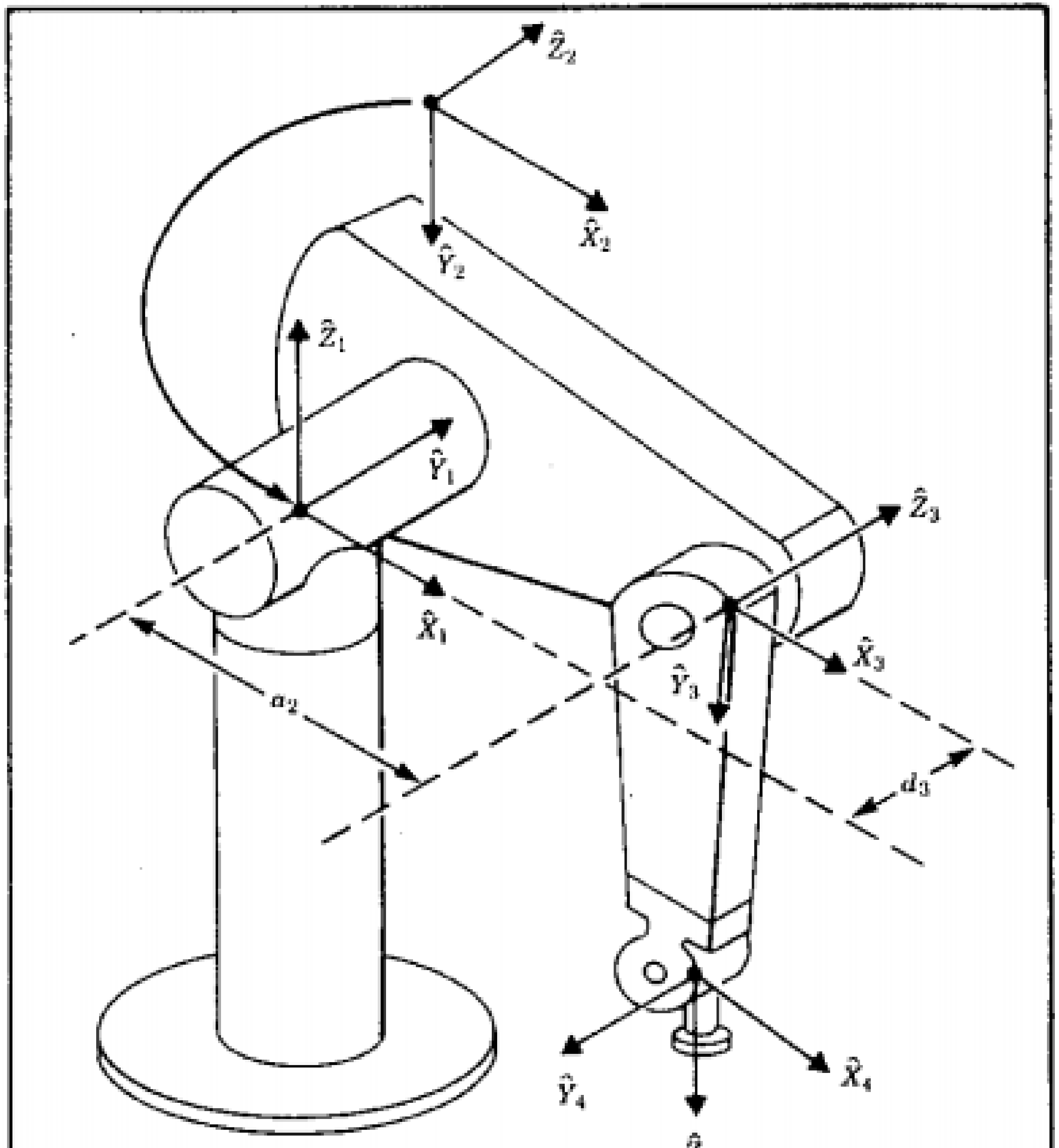
که در آن نمادگذاری $\mathrm{Screw}_Q(r,\phi)$[۱] به معنای یک انتقال در راستای محور $\hat{Q}$ به اندازهٔ r، و یک

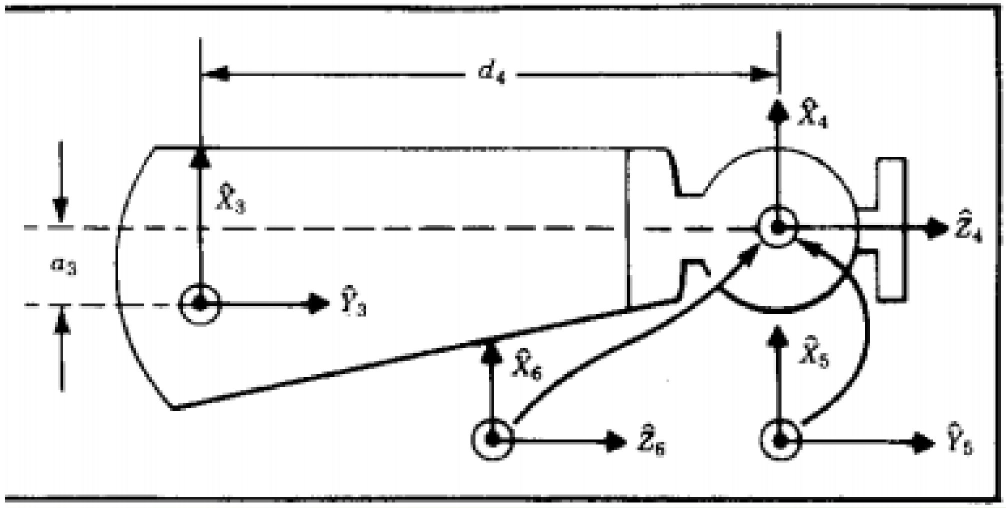
دوران حول همان محور به اندازهٔ زاویهٔ ϕ است. با انجام عمل ضرب در تبدیل کلی ${}^{i-1}_{i}T$ چنین به‌دست می‌آید

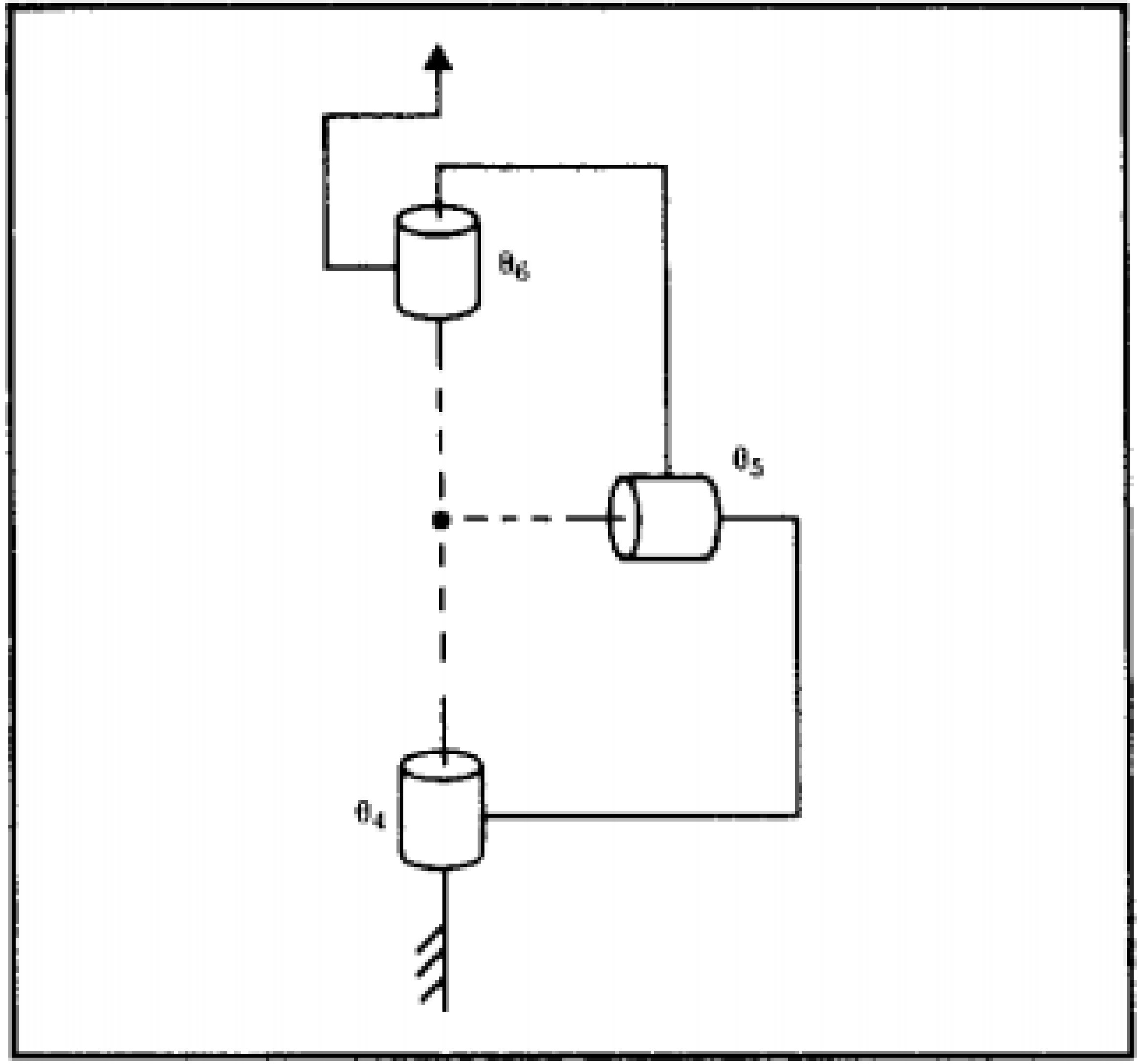
$$
{}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) &= R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$


UNIMATE
PUMA 560


$\hat{Z}_2$
$\hat{X}_2$
$\hat{Y}_2$
$\hat{Z}_1$
$\hat{Y}_1$
$\hat{X}_1$
a_2
$\hat{Z}_3$
$\hat{X}_3$
$\hat{Y}_3$
d_3
$\hat{Y}_4$
$\hat{X}_4$


d_4
$\hat{X}_4$
$\hat{X}_3$
$\hat{Z}_4$
a_3
$\hat{Y}_3$
$\hat{X}_6$
$\hat{X}_5$
$\hat{Z}_6$
$\hat{Y}_5$



تصویر شماتیک مچ دست از نوع $3R$ که در آن هر سه محور در نقطه‌ای یکدیگر را قطع می‌کنند و دوبه‌دو بر هم عمودند. این مکانیزم علاوه برپیوما ۵۶۰، در بسیاری از روباتهای صنعتی دیگر نیز به‌کار رفته است.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$-90°$	0	0	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	$-90°$	a_3	d_4	θ_4
5	$90°$	0	0	θ_5
6	$-90°$	0	0	θ_6

پارامترهای رابط برای روبات پیوما ۵۶۰.

$$
{}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$ {}^{4}_{6}T = {}^{4}_{5}T \; {}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{3}_{6}T = {}^{3}_{4}T \; {}^{4}_{6}T = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & -c_4 s_5 & a_3 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}_{3}T = {}^{1}_{2}T \; {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$
{}^1_6T = {}^1_4T \; {}^4_6T = \begin{bmatrix} {}^1r_{11} & {}^1r_{12} & {}^1r_{13} & {}^1p_x \\ {}^1r_{21} & {}^1r_{22} & {}^1r_{23} & {}^1p_y \\ {}^1r_{31} & {}^1r_{32} & {}^1r_{33} & {}^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^1r_{11} &= c_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - s_{23}s_5c_6 \\
{}^1r_{21} &= -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\
{}^1r_{31} &= -s_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - c_{23}s_5c_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^1r_{12} &= -c_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + s_{23}s_5s_6 \\
{}^1r_{22} &= s_4c_5s_6 - c_4c_6 \\
{}^1r_{32} &= s_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + c_{23}s_5s_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^1r_{13} &= -c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5 \\
{}^1r_{23} &= s_4s_5 \\
{}^1r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^1p_x &= a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23} \\
{}^1p_y &= d_3 \\
{}^1p_z &= -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}
\end{aligned}
$$

$$
{}^{0}_{6}T = {}^{0}_{1}T \; {}^{1}_{6}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

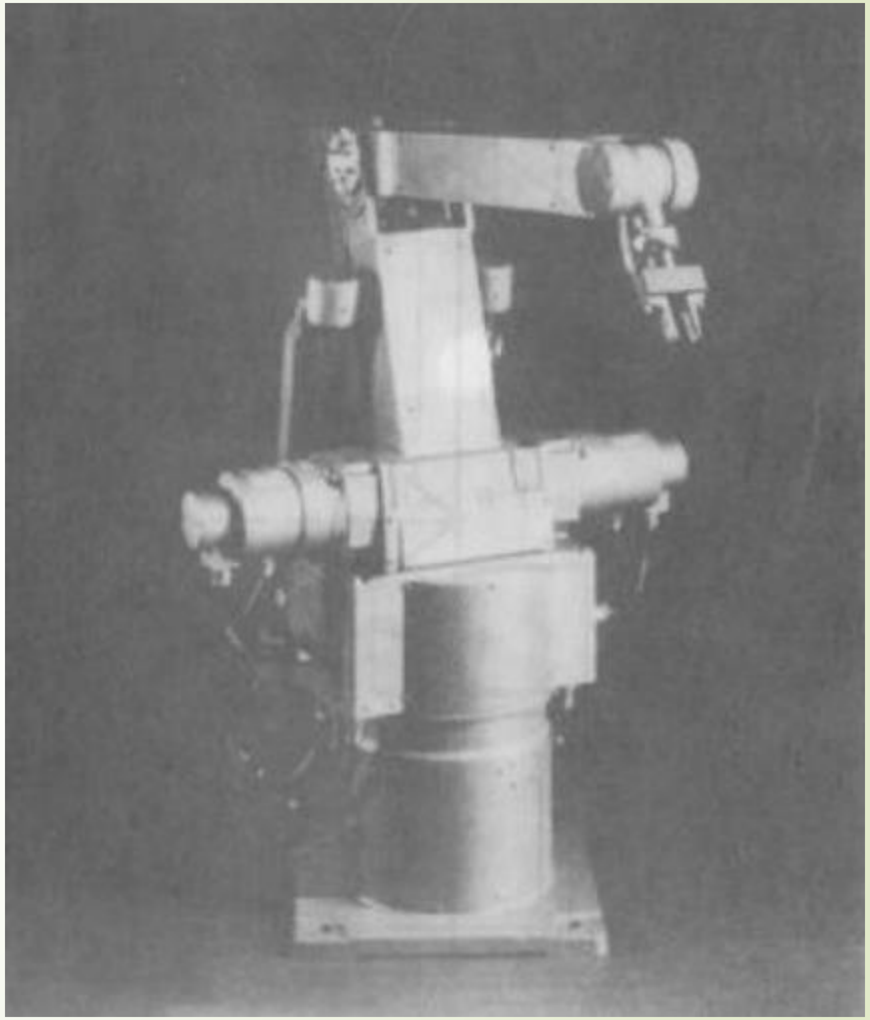
$$r_{11} = c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)$$
$$r_{21} = s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)$$
$$r_{31} = -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6$$

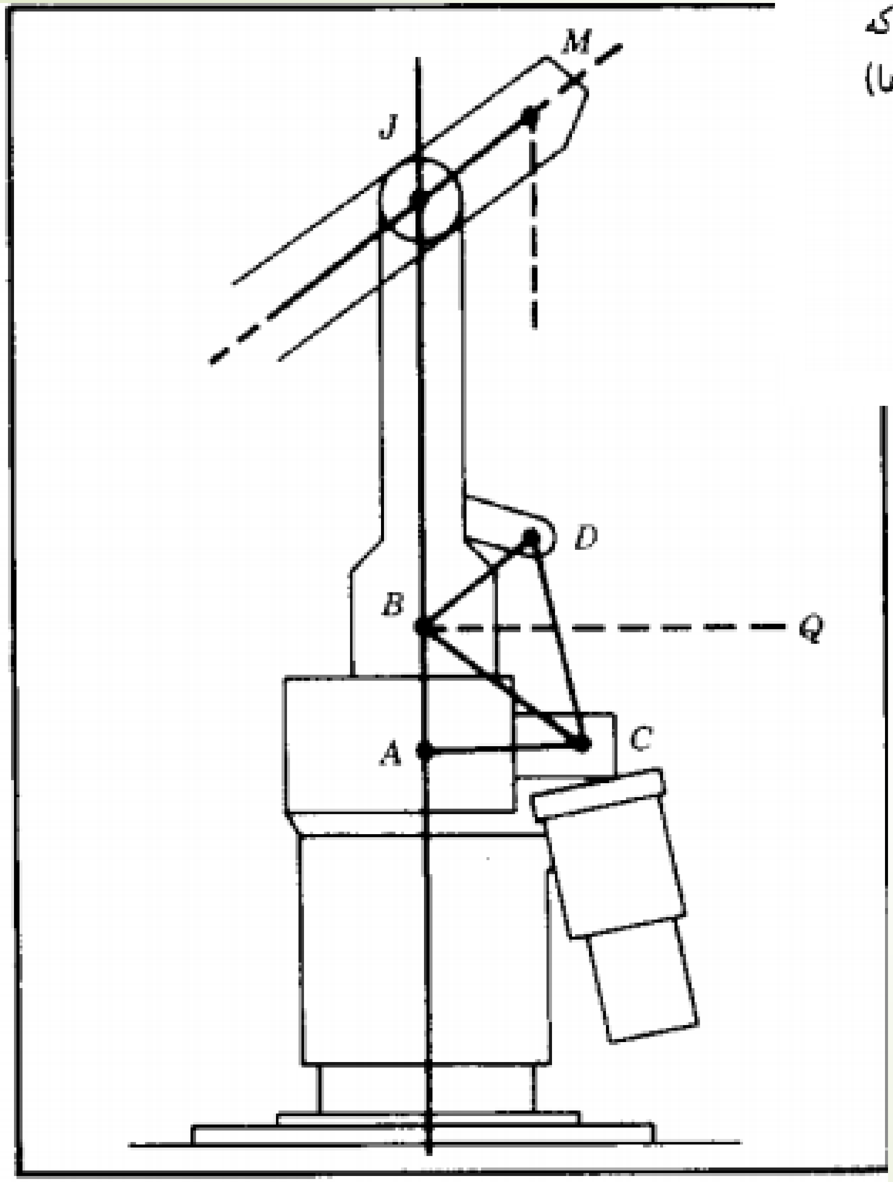
$$r_{12} = c_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + s_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6)$$
$$r_{22} = s_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - c_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6)$$
$$r_{32} = -s_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + c_{23}s_5s_6$$

$$r_{13} = -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5$$
$$r_{23} = -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5$$
$$r_{33} = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5$$

$$p_x = c_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_3s_1$$
$$p_y = s_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] + d_3c_1$$
$$p_z = -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}$$


YASKAWA
YASKAWA
MOTOMAN ROBOTICS





مکانیزمی که کارانداز شمارهٔ ۲ را به رابطهای ۲ و ۳ از روبات متصل می‌کند، نشان داده شده است. این کارانداز از نوع خطی است و مستقیماً طول میلهٔ DC را کنترل می‌کند. مثلث ABC و طول BD ثابت است. مفصل ۲ می‌تواند حول نقطهٔ B دوران کند، و هنگامی که مکانیزم حرکت می‌کند، کارانداز کمی حول نقطهٔ C می‌گردد. برای مقادیر ثابت (طولها و زاویه‌ها) مربوط به کارانداز ۲، از نمادهای زیر استفاده شده است

$$\gamma_2 = AB, \quad \phi_2 = AC, \quad \alpha_2 = BC$$
$$\beta_2 = BD, \quad \Omega_2 = \angle JBD, \quad l_2 = BJ$$

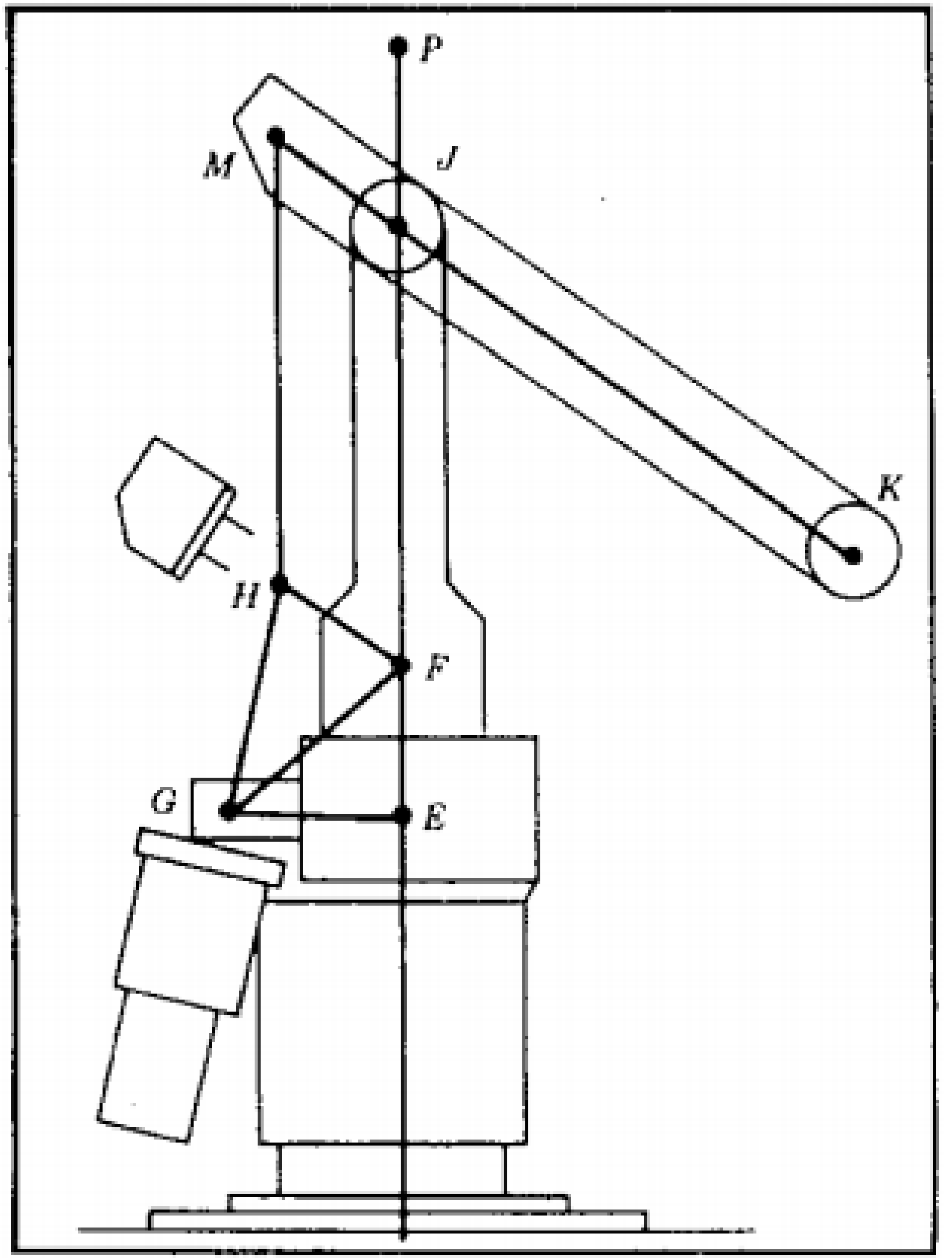
$$\theta_2 = -\angle JBQ,\ \psi_2 = \angle CBD,\ g_2 = DC$$

مکانیزم میله‌بندی که کارانداز ۳ را به رابطهای ۲ و ۳ روبات متصل می‌کند،
نشان داده شده است. کارانداز خطی است و طول میلهٔ HG را مستقیماً کنترل می‌کند. مثلث
EFG و طول FH ثابت است. مفصل ۳ حول نقطهٔ J لولا شده است و کارانداز در هنگام حرکت
مکانیزم، کمی حول نقطهٔ G دوران می‌کند. مقادیر ثابت کارانداز ۳ با نمادهای زیر مشخص شده‌اند

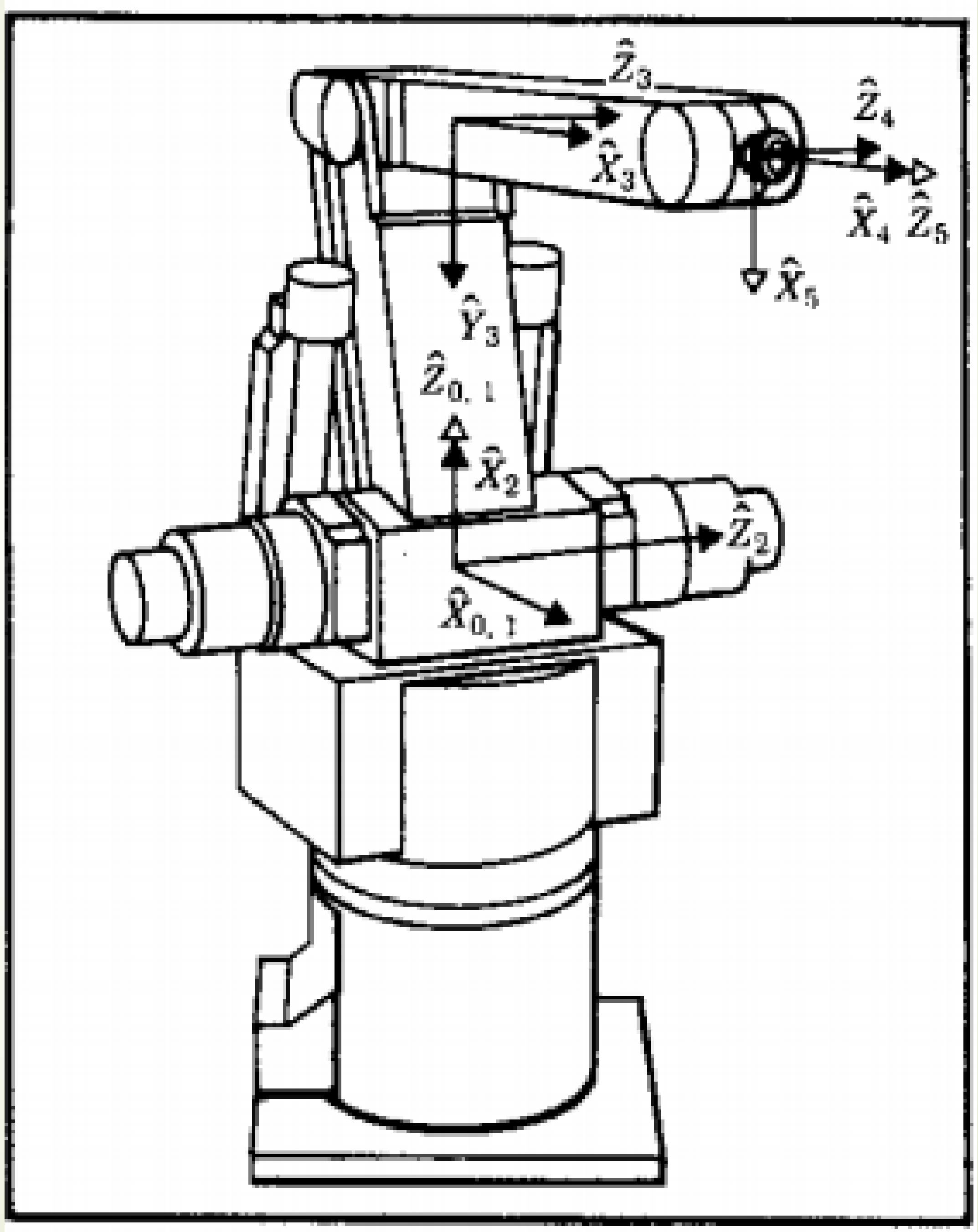
$$\gamma_3 = EF, \quad \phi_3 = EG, \quad \alpha_3 = GF$$
$$\beta_3 = HF, \quad l_3 = JK$$

و به متغیرها اسامی زیر داده شده است

$$\theta_3 = \angle PJK, \quad \psi_3 = \angle GFH, \quad g_3 = GH$$



جزئیات مکانیزم کارانداز ۳ در میله‌بندی پازوکاوا.


$\hat{Z}_3$
$\hat{X}_3$
$\hat{Z}_4$
$\hat{X}_4$
$\hat{Z}_5$
$\hat{X}_5$
$\hat{Y}_3$
$\hat{Z}_{0,1}$
$\hat{X}_2$
$\hat{Z}_2$
$\hat{X}_{0,1}$

$$
{}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90°	0	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3
4	0	L_3	0	θ_4
5	90°	0	0	θ_5

$$
{}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & l_3 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

پس از انجام عمل ضرب، ماتریس تبدیل کلی ${}^{0}_{5}T$ حاصل می‌شود

$$
{}^{0}_{5}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$r_{۱۱} = c_{۱}c_{۲۳۴}c_{۵} - s_{۱}s_{۵}$$

$$r_{۲۱} = s_{۱}c_{۲۳۴}c_{۵} + c_{۱}s_{۵}$$

$$r_{۳۱} = -s_{۲۳۴}c_{۵}$$

$$r_{۱۲} = -c_{۱}c_{۲۳۴}s_{۵} - s_{۱}c_{۵}$$

$$r_{۲۲} = -s_{۱}c_{۲۳۴}s_{۵} + c_{۱}c_{۵}$$

$$r_{۳۲} = s_{۲۳۴}s_{۵}$$

$$r_{۱۳} = c_{۱}s_{۲۳۴}$$

$$r_{۲۳} = s_{۱}s_{۲۳۴}$$

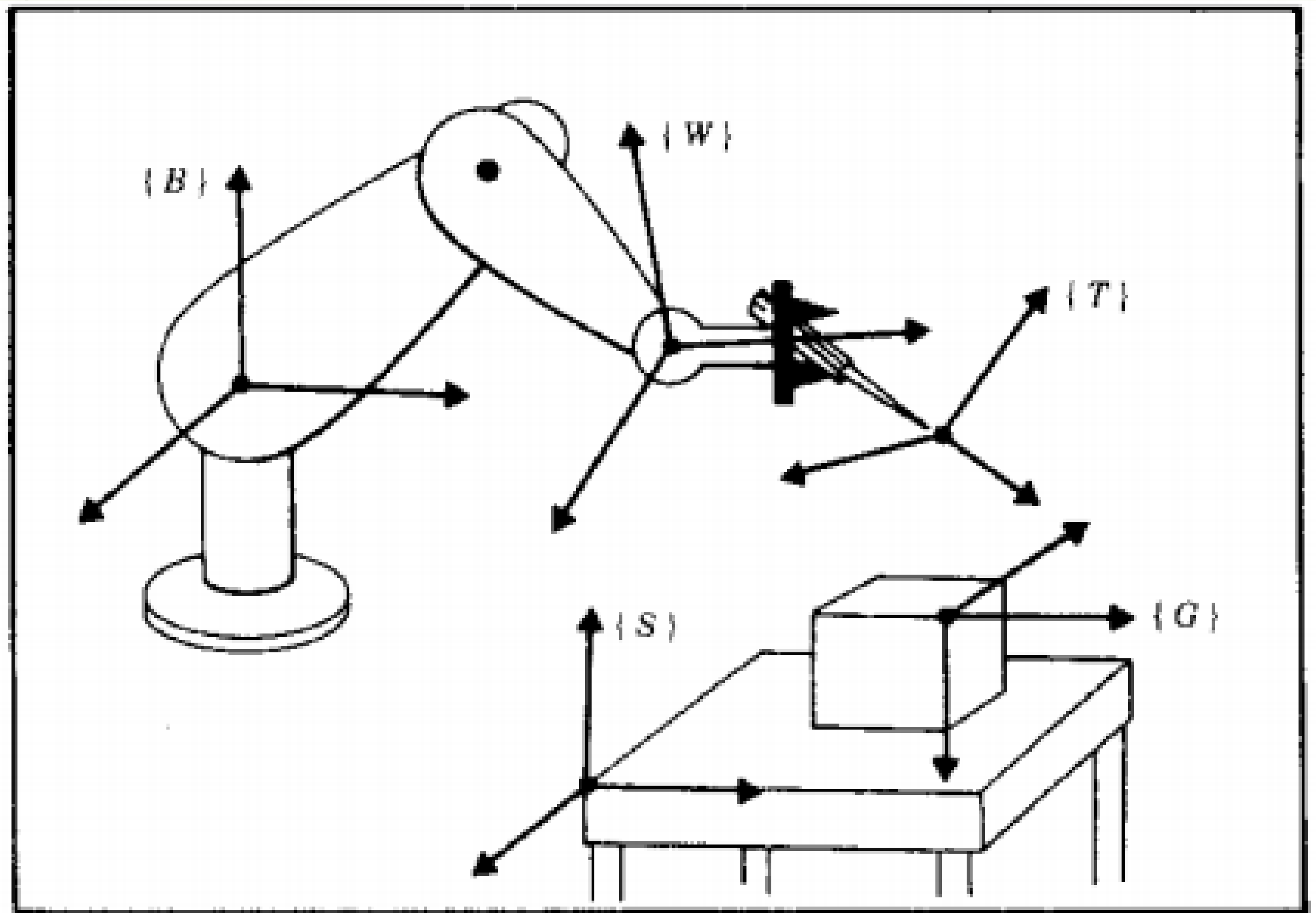
$$r_{۳۳} = c_{۲۳۴}$$

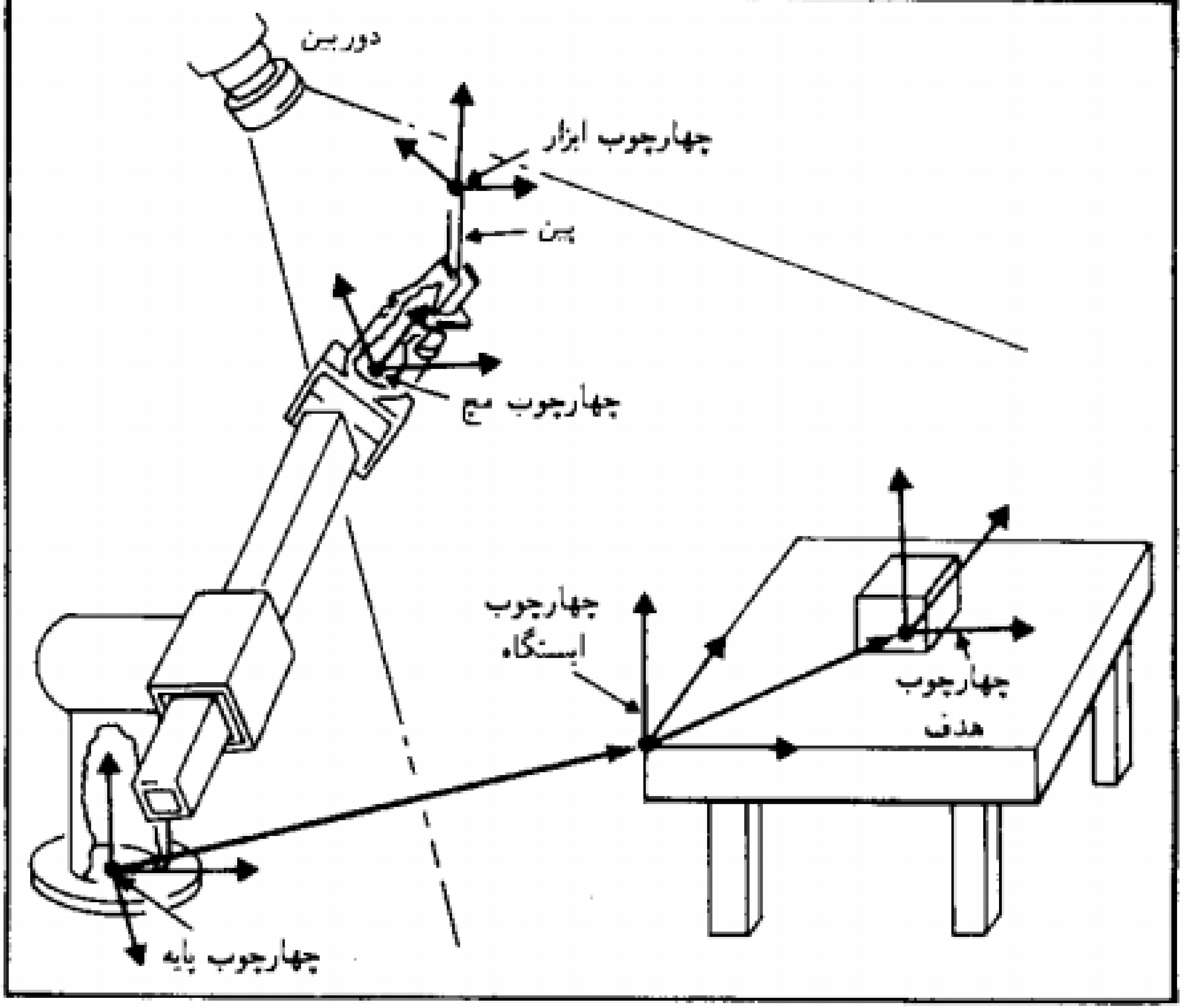
$$p_x = c_{۱}(l_{۲}c_{۲} + l_{۳}c_{۲۳})$$

$$p_y = s_{۱}(l_{۲}c_{۲} + l_{۳}c_{۲۳})$$

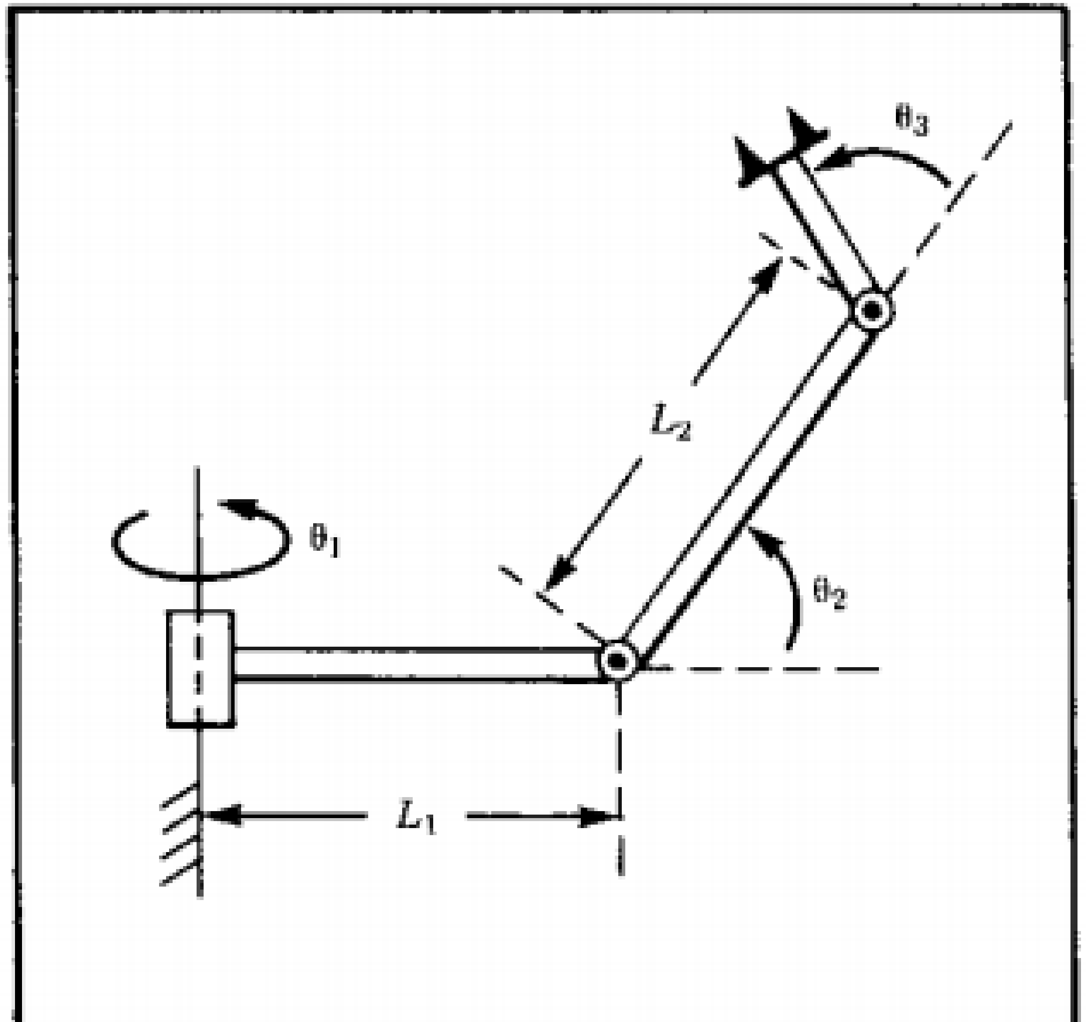
$$p_z = -l_{۲}s_{۲} - l_{۳}s_{۲۳}$$

چهارچوبهای با نامهای استاندارد



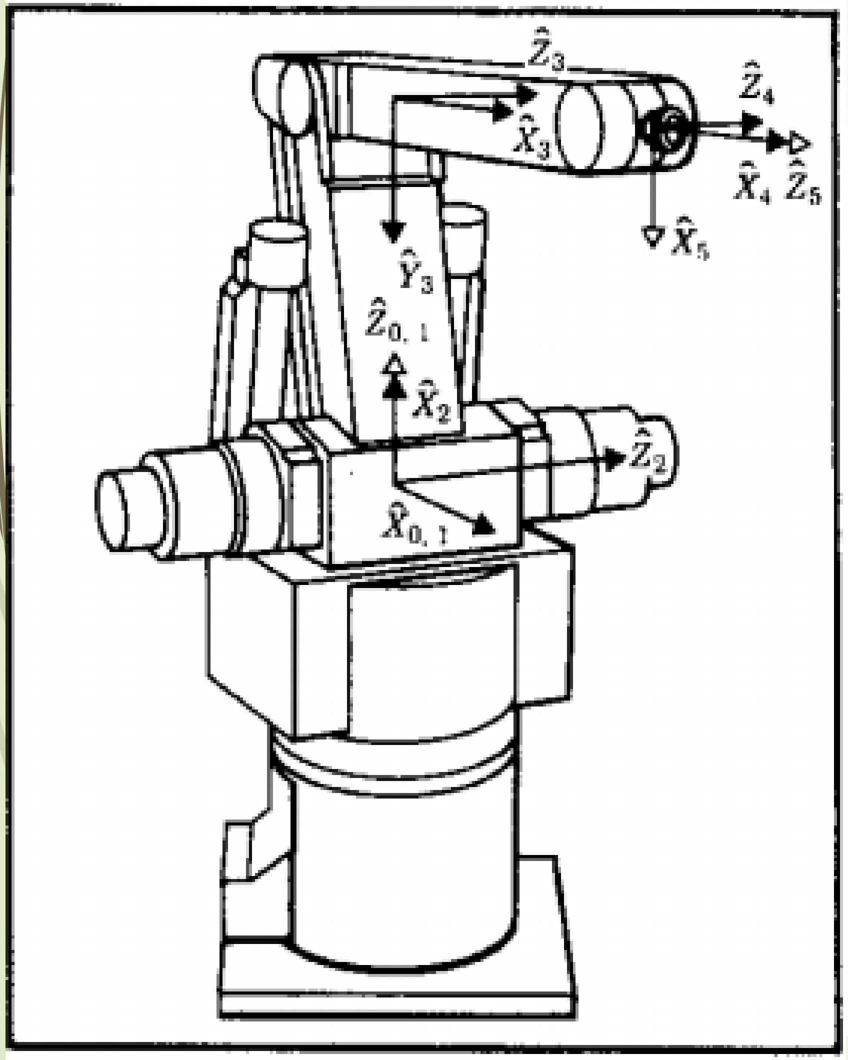

دوربین
چهارچوب ابزار
پین
چهارچوب مچ
چهارچوب ایستگاه
چهارچوب هدف
چهارچوب پایه

بازوی مکانیکی با سه درجهٔ آزادی که در شکل نشان داده شده است، مانند بازوی مثال ۳-۳ است، با این تفاوت که در آن محور مفصل ۱ با دو محوَر دیگر موازی نیست و در عوض بین محورهای ۱ و ۲ پیچشی برابر ۹۰° وجود دارد. پارامترهای رابط و معادله‌های سینماتیکی را برای ${}^{B}_{W}T$ به‌دست آورید. توجه کنید که در اینجا به تعریف $l_۲$ نیاز نیست.



۴

سینماتیک وارون بازوهای مکانیکی ماهر



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$-90°$	0	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3
4	0	L_3	0	θ_4
5	$90°$	0	0	θ_5

$$ {}^{0}_{5}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

حل مسئلهٔ پیدا کردن زوایای مفصلی مورد نیاز برای استقرار چهارچوب ابزار $\{T\}$ نسبت به چهارچوب ایستگاه $\{S\}$، به دو بخش تقسیم می‌شود. ابتدا تبدیلهای کلی لازم برای به‌دست آوردن چهارچوب مچ دست، $\{W\}$، نسبت به چهارچوب پایه، $\{B\}$، را محاسبه می‌کنیم، و سپس برای یافتن زوایای مفصلی، از سینماتیک وارون استفاده خواهیم کرد.

۲-۴ حل پذیر بودن

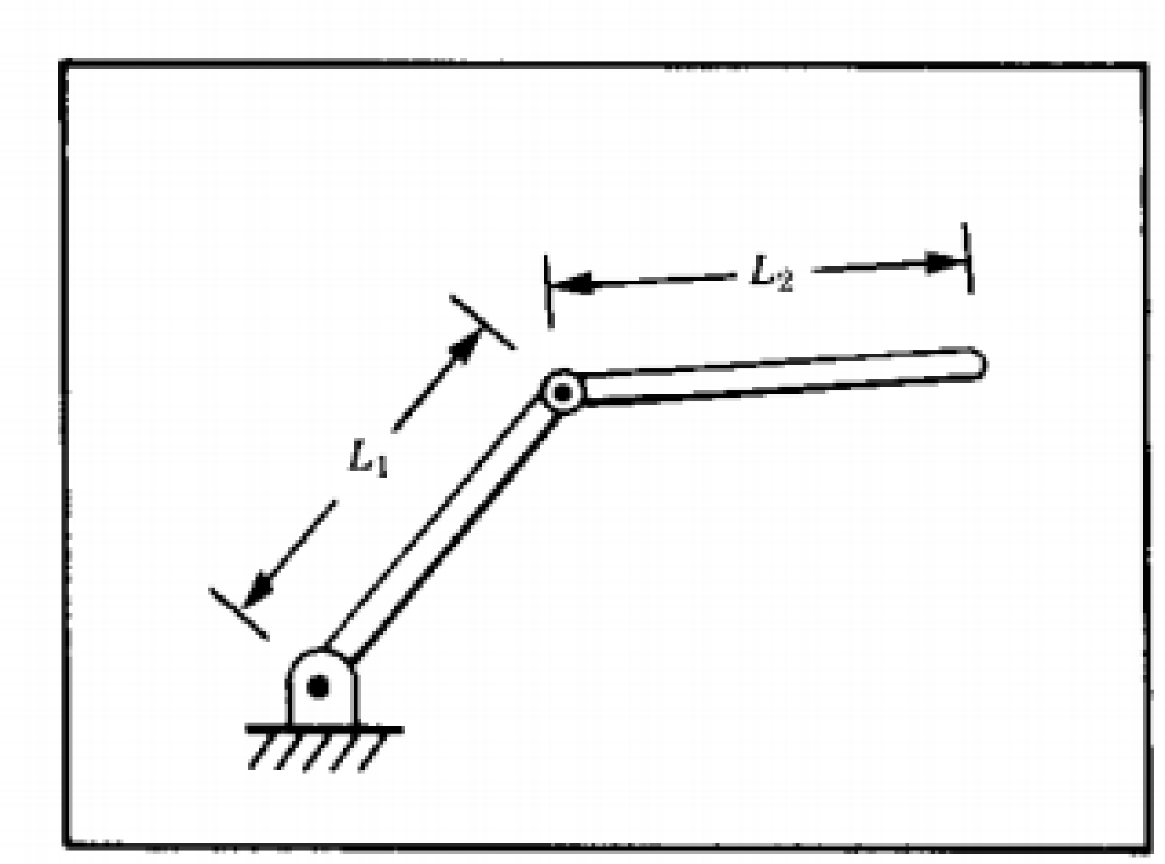
حل معادله‌های سینماتیکی بازوی مکانیکی ماهر به‌روشهای غیرخطی صورت می‌گیرد و در آن با داشتن مقادیر عددی $_N^{}T$؛ می‌کوشیم مقادیر θ_1، θ_2، $\cdots$، و θ_n را پیدا کنیم.

مسئلهٔ فوق در مورد روبات پیوما ۵۶۰ چنین است:

با داشتن T؛ به‌صورت ۱۶ مقدار عددی (که چهار مقدار آن بدیهی هستند)، معادله‌های را حل کنید و زوایای مفصلی θ_1 تا θ_6 را به‌دست آورید.

وجود جوابها

وجود یا عدم وجود جواب، به فضای کاری بازوی مکانیکی ماهر بستگی دارد.



دقت و تکرارپذیری

۵

ژاکوبیها، سرعتها و نیروهای استاتیکی

۲-۵ نمادگذاری برای مکان و جهتگیری متغیر با زمان

$$^{B}V_{Q} = \frac{d}{dt}\,{}^{B}Q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{^{B}Q(t+\Delta t) - {}^{B}Q(t)}{\Delta t}$$

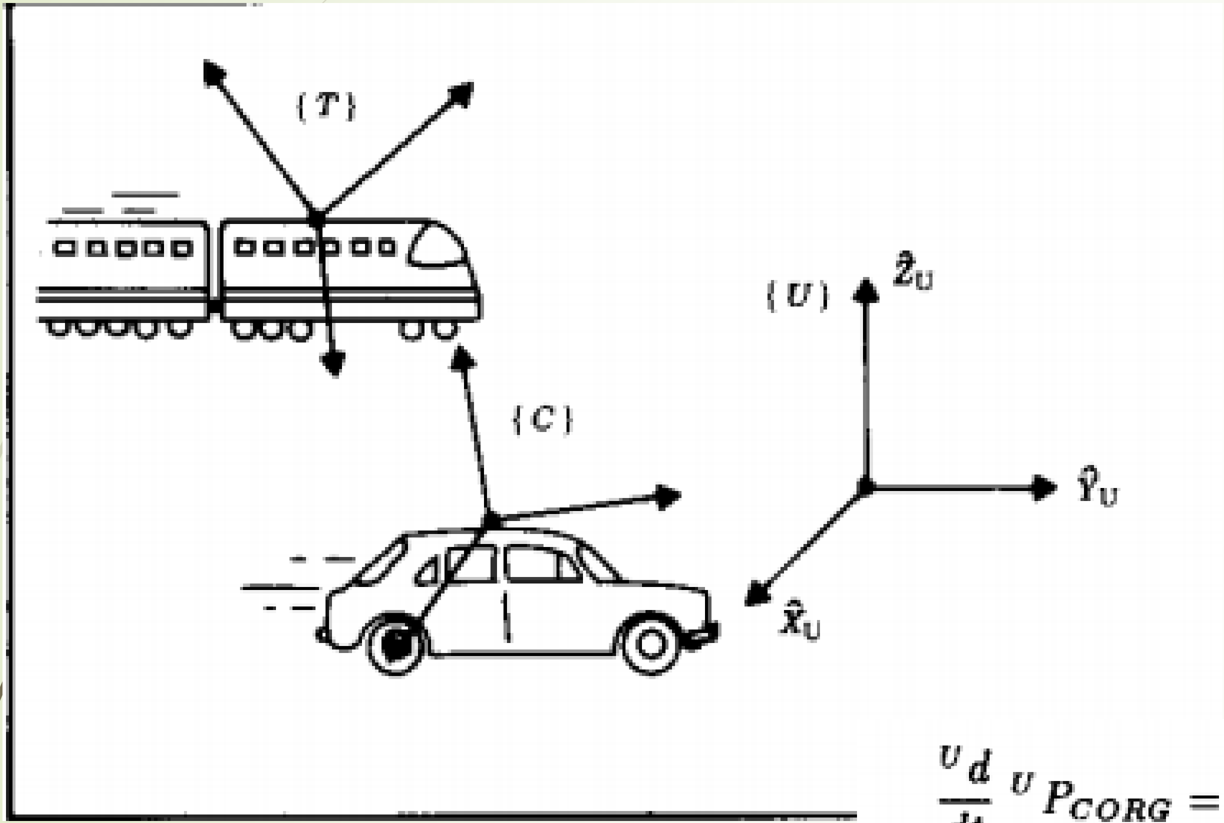
$$^{A}\left(^{B}V_{Q}\right) = \frac{^{A}d}{dt}\,{}^{B}Q$$

$$^{B}({}^{B}V_Q) = {}^{B}V_Q$$

$$^{A}({}^{B}V_Q) = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q$$

$$v_C = {}^{U}V_{CORG}$$

مثال



۱. $\frac{^U d}{dt}\, {}^U P_{CORG}$

۲. ${}^C({}^U V_{TORG})$

۳. ${}^C({}^T V_{CORG})$

۱. $\frac{^U d}{dt}\, {}^U P_{CORG} = {}^U V_{CORG} = v_C = ۳۰\hat{X}$

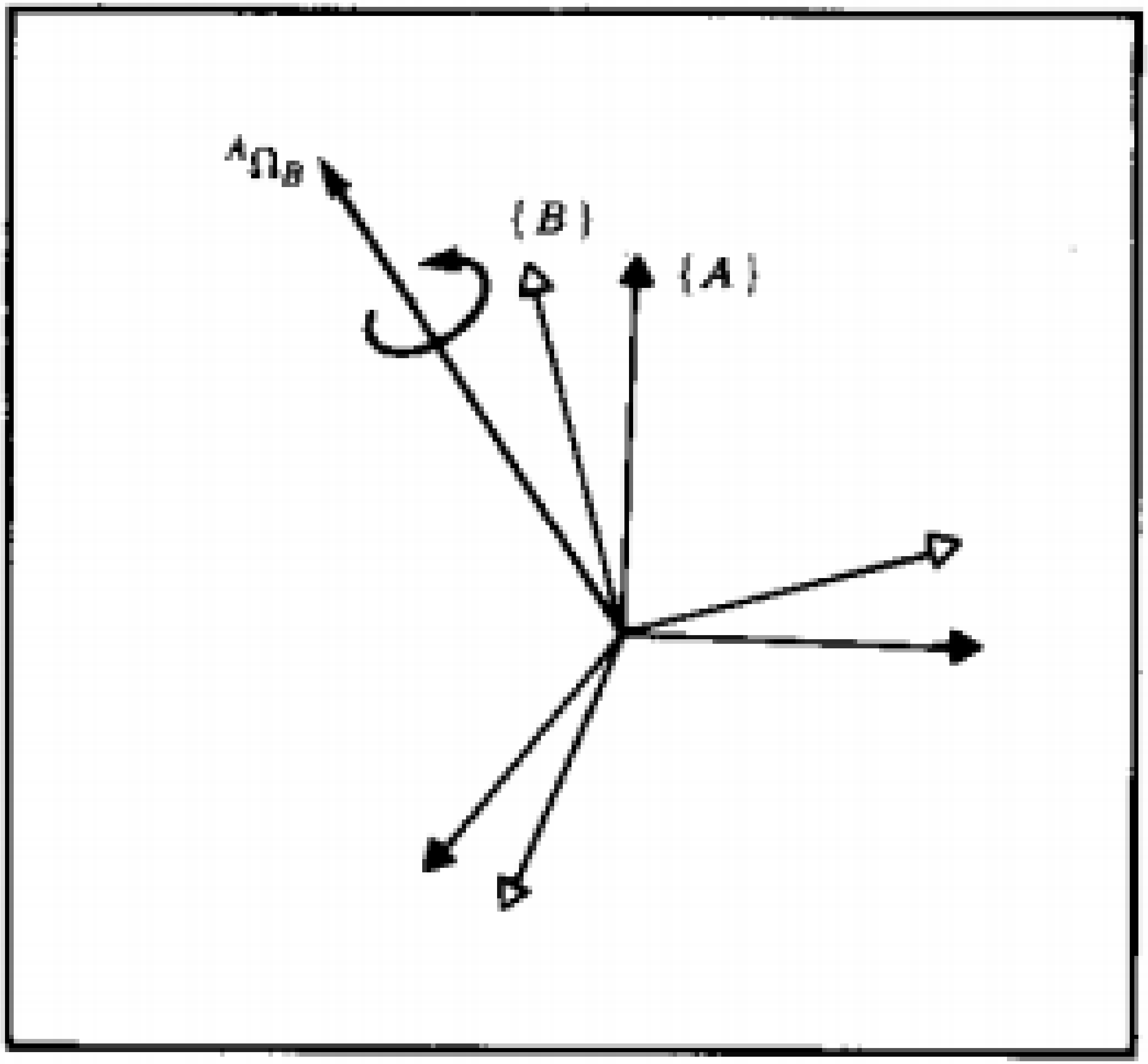
۲. ${}^C({}^U V_{TORG}) = {}^C v_T = {}^C_U R v_T = {}^C_U R(۱۰۰\hat{X}) = {}^U_C R^{-۱}\, ۱۰۰\hat{X}$

۳. ${}^C({}^T V_{CORG}) = {}^C_T R\, {}^T V_{CORG} = -{}^U_C R^{-۱}\, {}^U_T R\, ۷۰\hat{X}$

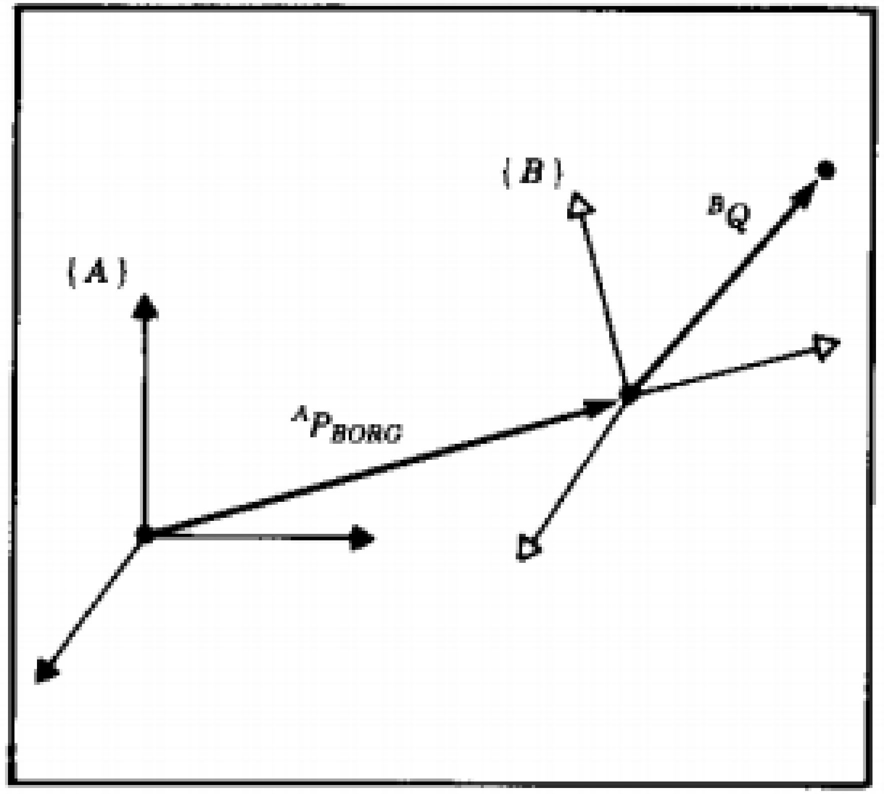
واحد مایل بر ساعت (Mi/h)

مایل بر ساعت (Mi/h) یکی دیگر از واحدهای سنجش سرعت است.این واحد سرعت بیشتر درکشورهای انگلیس و آمریکا رایج میباشد.همانگونه که ازنام این واحد سرعت بر می آید درآن واحد طول به مایل و یکای زمان با واحد ساعت بیان شده است. هر یک مایل 1606.34 متر میباشد.هر ساعت 3600 ثانیه است.برای تبدیل واحد سرعت از مایل بر ساعت به متر بر ثانیه مقدار سرعت برحسب واحد مایل بر ساعت به عدد 2.237 تقسیم میشود.برای تبدیل واحد سرعت از مایل بر ساعت به واحد کیلو متر بر ساعت کافیست مقدار سرعت به مایل بر ساعت درعدد 1.609 ضرب شود.

بردار سرعت زاویه‌ای

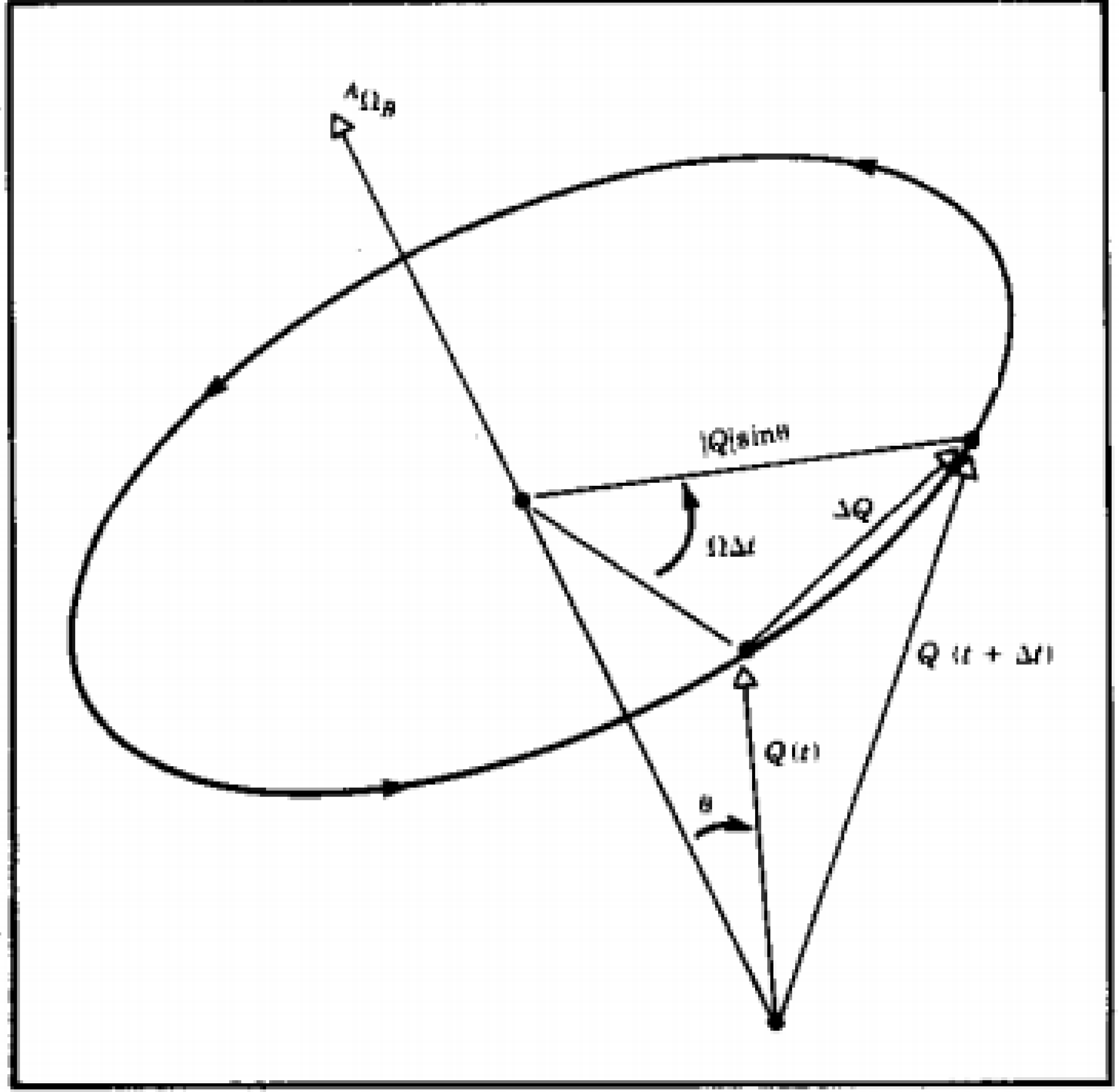


۵-۳ سرعت خطی و دورانی اجسام صلب



چهارچوب $\{B\}$ با سرعت $^AV_{BORG}$، نسبت به چهارچوب $\{A\}$ انتقال می‌یابد.

$$^AV_Q = {}^AV_{BORG} + {}^A_BR\,{}^BV_Q$$



شکل۵-۵ سرعت یک نقطه، ناشی از وجود سرعت زاویه‌ای.

$$|\Delta Q| = (|^{A}Q|\sin\theta)\ (|^{A}\Omega_{B}|\Delta t)$$

$$^{A}V_{Q} = {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}Q$$

$$^{A}V_{Q} = {}^{A}({}^{B}V_{Q}) + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}Q$$

$$^{A}V_{Q} = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q$$

سرعت خطی و زاویه‌ای همزمان

$$^{A}V_{Q} = {}^{A}V_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q$$

۴-۵ مطالبی بیشتر دربارهٔ سرعت زاویه‌ای

ویژگی مشتق یک ماتریس یکامتعامد

$$RR^T = I_n$$

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0_n$$

$$\dot{R}R^T + (\dot{R}R^T)^T = 0_n$$

$$S = \dot{R}R^T$$

$$S + S^T = 0_n$$

$$S = \dot{R}R^{-1}$$

سرعت یک نقطه بر اثر دوران چهارچوب مرجع

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P$$

مشتق ${}^{A}_{B}\dot{R}$ صفر نباشد

$$^{A}\dot{P} = {}^{A}_{B}\dot{R}\,{}^{B}P$$

$$^{A}V_{P} = {}^{A}_{B}\dot{R}\,{}^{B}P$$

$${}^{A}V_{P} = {}^{A}_{B}\dot{R}\;{}^{A}_{B}R^{-1}\;{}^{A}P$$

$${}^{A}V_{P} = {}^{A}_{B}S\;{}^{A}P$$

ماتریسهای پاد متقارن و ضرب برداری

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

$$SP = \Omega \times P$$

$$^{A}V_{P} = {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}P$$

مفهوم فیزیکی بردار سرعت زاویه‌ای

$$\dot{R} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t}$$

$$R(t+\Delta t) = R_K(\Delta\theta)R(t)$$

$$\dot{R} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{R_K(\Delta\theta) - I_3}{\Delta t}R(t)\right)$$

$$R_K(\Delta\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -k_z\Delta\theta & k_y\Delta\theta \\ k_z\Delta\theta & 1 & -k_x\Delta\theta \\ -k_y\Delta\theta & k_x\Delta\theta & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{R} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\begin{bmatrix} 0 & -k_z \Delta\theta & k_y \Delta\theta \\ k_z \Delta\theta & 0 & -k_x \Delta\theta \\ -k_y \Delta\theta & k_x \Delta\theta & 0 \end{bmatrix}}{\Delta t} \right) R(t)$$

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z \dot{\theta} & k_y \dot{\theta} \\ k_z \dot{\theta} & 0 & -k_x \dot{\theta} \\ -k_y \dot{\theta} & k_x \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} R(t)$$

$$\dot{R} R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

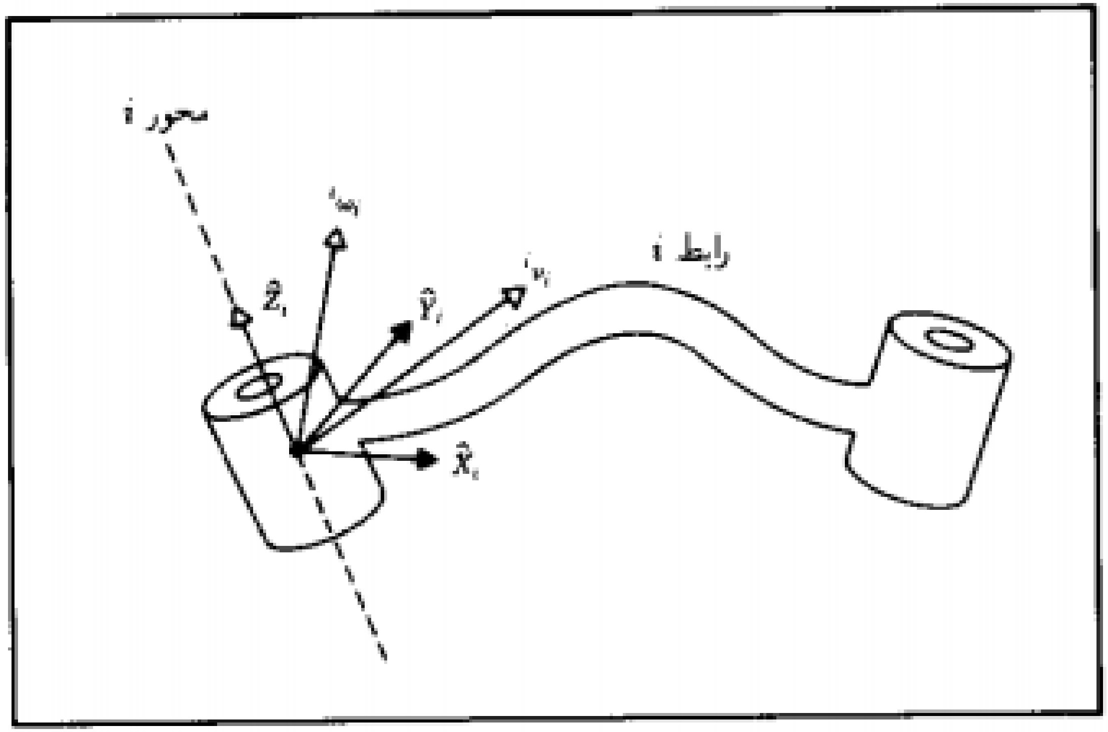
$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x \dot{\theta} \\ k_y \dot{\theta} \\ k_z \dot{\theta} \end{bmatrix} = \dot{\theta} \hat{K}$$

حرکت رابطهای روبات

v_i

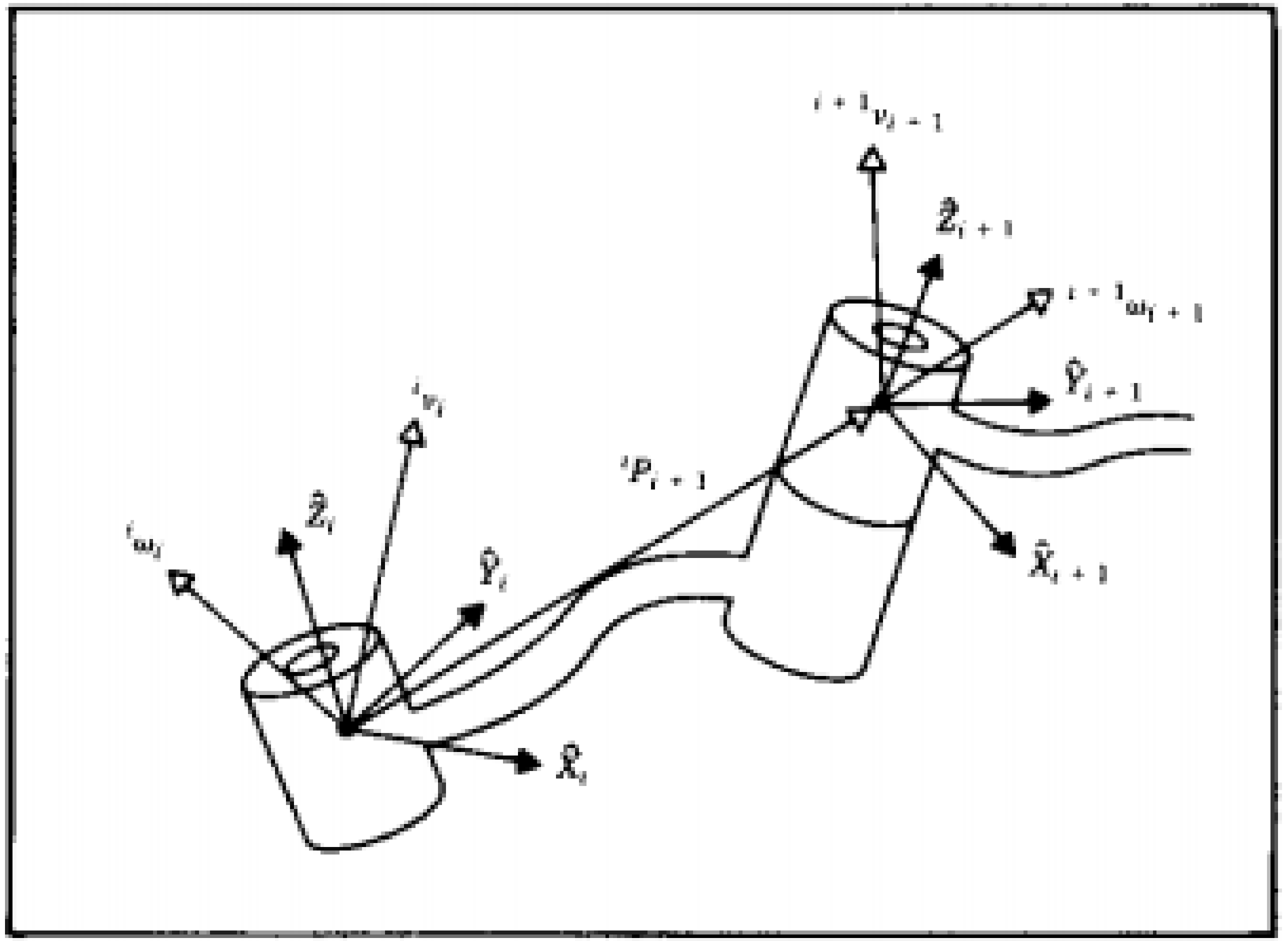
ω_i

۶-۵ چگونگی «اشاعهٔ» سرعت از رابطی به رابط دیگر



شکل ۵-۶ سرعت رابط i با بردارهای v_i و ω_i، که می‌توانند در هر چهارچوب دلخواه، حتی چهارچوب $\{i\}$، نوشته شوند، داده می‌شود.

۱. به‌خاطر آورید که سرعت خطی برای نقطه، و سرعت زاویه‌ای برای جسم تعریف می‌شود. پس اصطلاح «سرعت رابط» در اینجا برابند سرعت خطی مبدأ چهارچوب رابط، و سرعت زاویه‌ای آن رابط است.



شکل۵-۷ بردارهای سرعت رابطهای مجاور.

$$ {}^{i}\omega_{i+1} = {}^{i}\omega_{i} + {}^{i}_{i+1}R \;\; \dot{\theta}_{i+1} \;\; {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} $$

$$ \dot{\theta}_{i+1} \;\; {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = {}^{i+1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix} $$

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \; {}^{i}\omega_{i} + \dot{\theta}_{i+1} \; {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

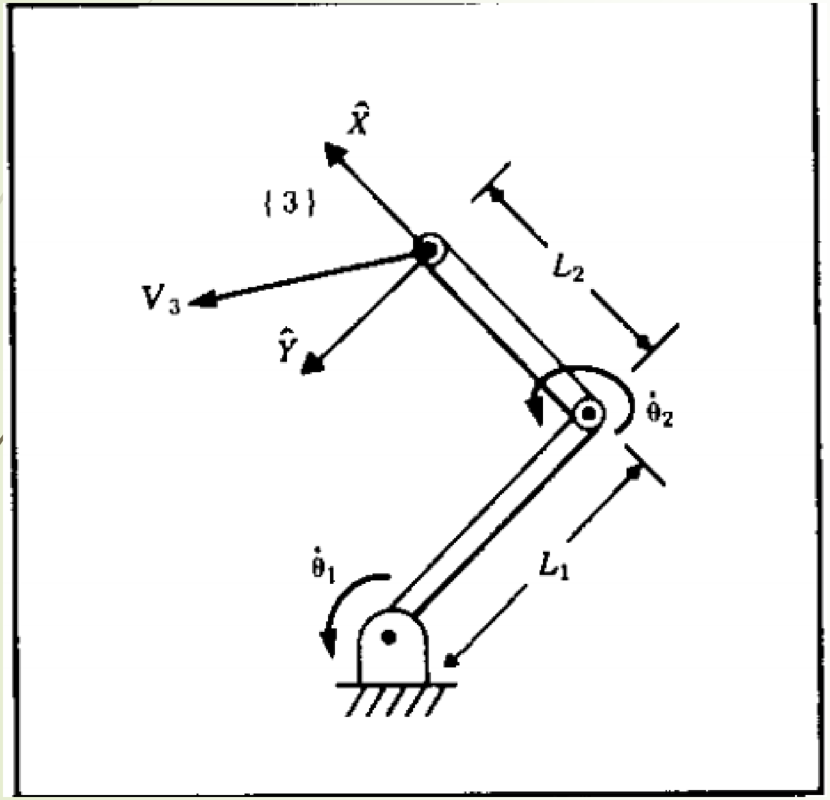
$$^{i}v_{i+1} = {}^{i}v_{i} + {}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}$$

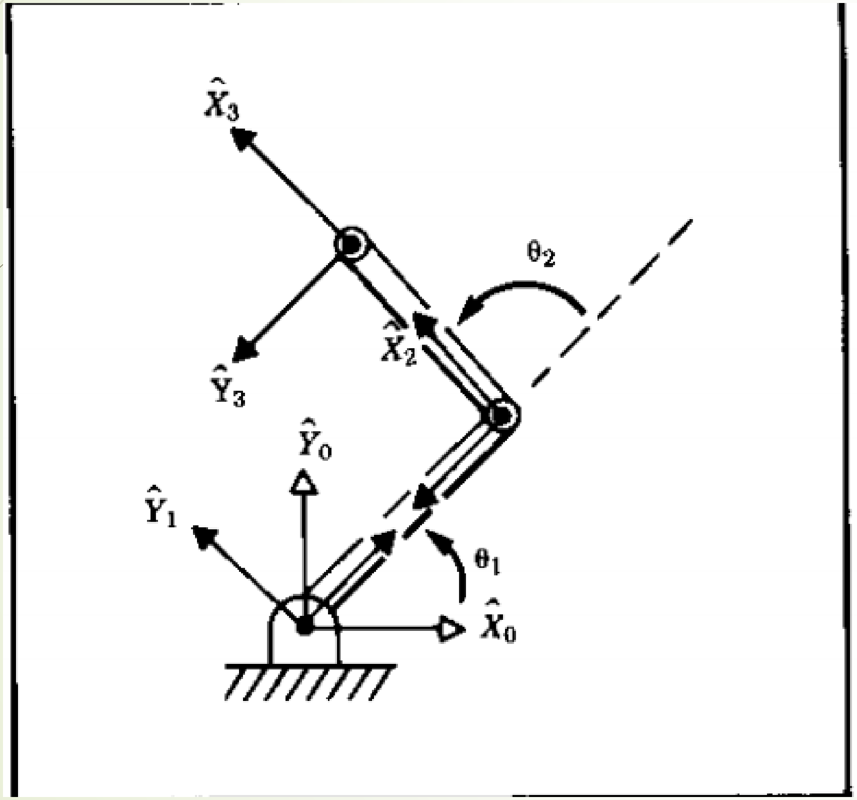
$$^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}v_{i} + {}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1})$$

مفصل کشویی

$$
\begin{aligned}
{}^{i+1}\omega_{i+1} &= {}^{i+1}_{\;\;i}R\,{}^{i}\omega_i \\
{}^{i+1}v_{i+1} &= {}^{i+1}_{\;\;i}R({}^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + \dot{d}_{i+1}\;{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
\end{aligned}
$$

مثال





$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) $$

$$ {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \; {}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \; {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} $$

$$ {}^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{3}\omega_3 = {}^{2}\omega_2 $$

$$ {}^{3}v_3 = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}v_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{2}R = {}^{0}_{1}R \; {}^{1}_{2}R \; {}^{2}_{2}R = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

بەدست می‌دهد

$$ {}^{0}v_{2} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + l_2 c_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} $$

۷-۵ ژاکوبیها

ژاکوبی، صورتی چند بعدی از مشتق است. مثلاً شش تابع را در نظر بگیرید که هرکدام تابعی از شش متغیر مستقل است

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

.

$$y_6 = f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$\delta y_{۱} = \frac{\partial f_{۱}}{\partial x_{۱}}\delta x_{۱} + \frac{\partial f_{۱}}{\partial x_{۲}}\delta x_{۲} + \cdots + \frac{\partial f_{۱}}{\partial x_{۶}}\delta x_{۶}$$

$$\delta y_{۲} = \frac{\partial f_{۲}}{\partial x_{۱}}\delta x_{۱} + \frac{\partial f_{۲}}{\partial x_{۲}}\delta x_{۲} + \cdots + \frac{\partial f_{۲}}{\partial x_{۶}}\delta x_{۶}$$

$$\vdots$$

$$\delta y_{۶} = \frac{\partial f_{۶}}{\partial x_{۱}}\delta x_{۱} + \frac{\partial f_{۶}}{\partial x_{۲}}\delta x_{۲} + \cdots + \frac{\partial f_{۶}}{\partial x_{۶}}\delta x_{۶}$$

$$\delta Y = \frac{\partial F}{\partial X}\delta X$$

$$\delta Y = J(X)\,\delta X$$

$$\dot{Y} = J(X)\,\dot{X}$$

مثال:

$${}^{2}v_{2} = \begin{bmatrix} c_{2} & s_{2} & 0 \\ -s_{2} & c_{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_{1}\dot{\theta}_{1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1}s_{2}\dot{\theta}_{1} \\ l_{1}c_{2}\dot{\theta}_{1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^{2}J(\Theta) = \begin{bmatrix} l_{1}s_{2} & 0 \\ l_{1}c_{2} + l_{2} & l_{2} \end{bmatrix}$$

$${}^{0}v_{2} = \begin{bmatrix} -l_{1}s_{1}\dot{\theta}_{1} - l_{2}s_{12}(\dot{\theta}_{1} + \dot{\theta}_{2}) \\ l_{1}c_{1}\dot{\theta}_{1} + l_{2}c_{12}(\dot{\theta}_{1} + \dot{\theta}_{2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^{0}J(\Theta) = \begin{bmatrix} -l_{1}s_{1} - l_{2}s_{12} & -l_{2}s_{12} \\ l_{1}c_{1} + l_{2}c_{12} & l_{2}c_{12} \end{bmatrix}$$

تغییر چهارچوب مرجع ژاکوبی

$$\begin{bmatrix} {}^{A}v \\ {}^{A}\omega \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} {}^{A}_{B}R & 0 \\ \hdashline 0 & {}^{A}_{B}R \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^{B}v \\ {}^{B}\omega \end{bmatrix}$$

$${}^{A}J(\Theta) = \left[\begin{array}{c:c} {}^{A}_{B}R & 0 \\ \hdashline 0 & {}^{A}_{B}R \end{array}\right] {}^{B}J(\Theta)$$

حالتهای تکین

۱. **حالتهای تکین در مرز فضای کاری**، حالتهایی هستند که در هنگام کشیدگی کامل بازو یا خم شدن کامل بازو بر روی خود، به‌طوری که مجری نهایی تقریباً یا دقیقاً در مرز فضای کاری قرار گیرد، روی می‌دهند.

۲. حالتهای تکین درداخل فضای کاری، حالتهایی هستند که دور از مرز فضای کاری، و در حالت کلی هنگامی که دو یا چند محور مفصلی در یک راستا قرار می‌گیرند، روی می‌دهند.

$$DET[J(\Theta)] = \begin{vmatrix} l_{۱}s_{۲} & ۰ \\ l_{۱}c_{۲} + l_{۲} & l_{۲} \end{vmatrix} = l_{۱}l_{۲}s_{۲} = ۰$$


امام علی علیه‌السلام:
در غفلت آدمی همین بس که عمر خود را در راه چیزهایی که او را نجات نمی‌دهد هدر دهد
غررالحکم
حدیث ۷۰۷۵