www.Mohandesyar.com

فصل 3 مشخصه‌های ذاتی و فرکانس‌های طبیعی مدار

مقدمه

اگر از من بپرسند که مفهومی‌ترین مبحث درس مدار کدام است، بنده بدون مکث جواب می‌دهم: مبحث مشخصه‌های ذاتی و فرکانس‌های طبیعی. نگاه ما به مدار در این فصل فوق‌العاده عمیق است، به رفتار مدار توجه خاصی داریم؛ اینکه مدار از چه مرتبه‌ای است و اینکه فرکانس‌های طبیعی، حقیقی موهومی و مختلط هر یک چه معنایی دارند و... راستش را بخواهید در سایر رشته‌های مهندسی و غیر مهندسی و حتی علوم انسانی هم فرکانس‌های طبیعی از اهمیت خاصی برخوردارند. اینکه یک صدف دریایی دارای چه فرکانس‌های طبیعی است و اینکه چرا آن نسیم ملایم، آن پل عظیم را خراب کرد؟ اصلاً مکانیزم کار گوش ما چگونه است و در چه فرکانس‌هایی کار می‌کند؟ اینکه چرا شما احساس می‌کنید که «ذات»تان با آن دیگری این‌قدر منطبق است؟ و چرا این‌قدر فرکانس‌های طبیعی‌تان مثل هم است؟ و اینکه اصلاً «هم‌نوایی» دو آدم یعنی همین یکسان بودن مشخصه‌های ذاتی و فرکانس‌های طبیعی و...

۳ـ۱ فرکانس‌های طبیعی

از عنوان این تیتر پیداست که به **ذات مدار** بستگی دارد؛ یعنی به ورودی بستگی ندارد. تابع گراف مدار، نوع عناصر و مقادیرشان و **شرایط اولیه** است؛ یعنی فرکانس‌های طبیعی به ورودی و روش تحلیل بستگی ندارند، اما به شرایط اولیه وابسته‌اند.

مگر شرایط اولیه از مختصات ذات مدار است؟

بله، حالا خواهید دید که چطور شرایط اولیه روی ذات مدار یعنی فرکانس‌های طبیعی مؤثر است.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

خُب برویم سراغ کارمان:

معادلهٔ دیفرانسیل مینی‌مال شبکه، معادله دیفرانسیل همگن با کمترین درجه است که تمام پاسخ‌های ورودی صفر متناظر با هر حالت اولیه را پیش‌بینی می‌کند، یعنی:

$$Q(D).X=0 \qquad (۱_۳)$$

و در آن X یک متغیر شبکه و Q (D) یک چندجمله‌ای به شکل معادله دیفرانسیل است که در آن:

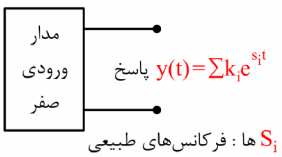
$$D=\frac{\partial}{\partial t} \qquad (۲_۳)$$

حالا فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، ریشه‌های معادله مشخصه مینی‌مال متغیر مربوط هستند، به طوری که:

$$Q(D).X=0 \;\rightarrow\; Q(s)=0 \;\Rightarrow\; S_i = \text{فرکانس‌های طبیعی} \qquad (۳_۳)$$

این فرکانس‌های طبیعی یا مُدهای طبیعی در پاسخ ورودی صفر ظاهر می‌شوند. آیا مفهوم شکل (3_1) را متوجه می‌شوید؟



شکل (۳_۱) مدار با ورودی صفر به همراه یک پاسخ از آن

یعنی آنکه اگر مدار هیچ ورودی نداشته باشد و تنها در اثر شرایط اولیه تحریک شود، در خروجی فلان متغیر شبکه، آن فرکانس‌های طبیعی S_i به صورت $k_i e^{S_i t}$ ظاهر می‌شوند. حال اگر S_iها حقیقی منفی باشند، یعنی آن خروجی، میرای شدید (یا بحرانی) است و اگر S_iها مختلط با مقدار حقیقی منفی باشند، یعنی پاسخ، میرای ضعیف است و اگر S_iها موهومی محض باشند، پاسخ، به صورت نوسانی است و بالاخره چنانچه جزء حقیقی S_iها مثبت باشند، خروجی، ناپایدار است.

حالا **فرکانس‌های طبیعی یک شبکه** را تعریف می‌کنیم؛ اجتماع یا مجموعهٔ همهٔ فرکانس‌های طبیعی تمامی متغیرهای شبکه را فرکانس‌های طبیعی می‌گوییم. به عبارت دیگر فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، زیرمجموعه‌ای از فرکانس‌های طبیعی شبکه هستند.

لطفاً یک لحظه صبر بفرمایید، یعنی ممکن است بعضی از فرکانس‌های طبیعی یک شبکه در برخی از متغیرهای شبکه ظاهر نشوند؟

دقیقاً !

به عبارت دیگر، یعنی می‌فرمایید که ممکن است جنس پاسخ یکی از متغیرهای شبکه مثلاً در یک مدار مرتبهٔ 2 ، از جنس $k e^{s_1 t}$ (یعنی مرتبهٔ اول) باشد؟

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

باز هم می‌گویم، **دقیقاً** !

پس بحث خیلی جالب شد؛ اگر ممکن است در این‌باره کمی بیشتر توضیح بدهید.

این چند نکته را لطفاً خوب بفهمید:

ریشه‌های غیرصفر هر دترمینان ماتریس شبکه مانند Z_m ، Z_I ، Y_n ، Y_q یا حتی $(SI-A)$، برابر فرکانس‌های طبیعی شبکه هستند.

و این خود یک روش ساده و مفید برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی یک شبکه است. یعنی در قدم اول به مدار نگاه می‌کنیم؛ اگر دوحلقه‌ای بود Z_m را به‌راحتی به دست می‌آوریم و اگر دوگره‌ای بود، Y_n را مثل آب خوردن پیدا می‌کنیم و بعد ریشه‌های دترمینان را که پیدا کردیم کارمان تمام است. اگر هم تعداد گره‌ها یا حلقه‌ها بیشتر از 2 بود، باز دوباره Z_m یا Y_n را پیدا می‌کنیم (درحقیقت اونی که مرتبه کمتری است) و دوباره ریشه‌های دترمینان و...
راستی دلیل تأکیدم را روی مدارهای دوگره‌ای و دوحلقه‌ای در فصل دوقطبی‌ها متوجه خواهید شد.

و اگر در مسئله‌ای به‌جای فرکانس‌های طبیعی کل شبکه، فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه را می‌خواستند، این روش مفید است؟

نه دیگر نشد! این همه گفتیم که ممکن است بعضی فرکانس‌های طبیعی شبکه در برخی از متغیرها ظاهر نشوند، یعنی همین دیگر؛ پس برای فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، باید معادله دیفرانسیل آن متغیر را نوشت و از ریشه‌های معادلهٔ مشخصه، به فرکانس‌های طبیعی آن متغیر دست یافت. البته یک روش دیگر هم هست و آن اینکه ابتدا عینک لاپلاسی زده و بعد به کمک KCL و KVL ، معادله مشخصهٔ متناظر آن متغیر را پیدا کنیم و...

هر قطب تابع شبکه هر متغیر مدار، یک فرکانس طبیعی متغیر مربوطه است:

$$H(s)=\sum_i \frac{K_i}{(S-P_i)^n} \quad \Rightarrow \quad \text{فرکانس طبیعی مرتبه n ام} = P_i \qquad (۴\text{-}۳)$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

راستی یک مطلب ساده و مهم:

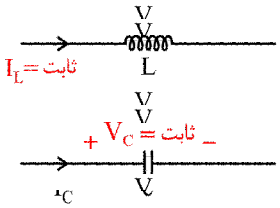
در حوزهٔ زمان در فرم $k_i e^{s_i t}$، S_i فرکانس طبیعی ساده (مرتبه اول) و در حالت $k_i t e^{s_i t}$، S_i فرکانس طبیعی مضاعف (مرتبه دوم) بوده و به طور کلی در فرم $k_i t^n e^{s_i t}$، S_i فرکانس طبیعی مرتبهٔ $n+1$ ام است، ولی در حوزهٔ فرکانس قطب مرتبهٔ n ام، فرکانس طبیعی مرتبهٔ n ام است. روشن است دیگر؛ نه؟

اگر $S_i \neq 0$ فرکانس طبیعی ولتاژ یک شاخه باشد، فرکانس طبیعی جریان شاخه نیز است و برعکس. در مورد بار و شار نیز همین‌طور است.

چرا $S_i \neq 0$ ؟ مگر مخالف صفر بودن مهم است؟

بله، ممکن است ولتاژ یک شاخه، فرکانس صفر (مقدار DC) داشته باشد، اما جریان شاخه دارای فرکانس صفر نباشد و برعکس؛ پس باید در فرکانس صفر یا مقدار DC دقت بیشتری کرد.

مثلاً به شکل (2ـ3) دقت کنید:



$$V_L = L\frac{dI_L}{dt} = 0$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt} = 0$$

شکل (۳ـ۲) دقت در فرکانس صفر (DC) در سلف و خازن

دیدیم که در سلف ممکن است جریان دارای فرکانس صفر باشد (DC یا ثابت = I_L) ولی ولتاژ صفر شود $(V_L = 0)$، یعنی اصلاً دارای مؤلفه‌ای در $S = 0$ نباشد و اتفاق مشابه برای خازن ...

حالا یک نکتهٔ بسیار موشکافانه:

چون فرکانس‌های طبیعی مربوط به حالت ورودی صفر هستند، هنگام بررسی تابع تبدیل:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{تبدیل لاپلاس خروجی}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}} \qquad (۳ـ۵)$$

و در نظر گرفتن قطب‌های آن به عنوان فرکانس‌های طبیعی شبکه، مدار متناظر شبکه‌ای است که منبع از آن خارج شده باشد[1].

1ـ منبع جریان ← O.C. و منبع ولتاژ ← S.C.

www.Mohandesyar.com

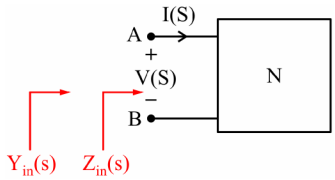
www.Mohandesyar.com

پس منبع یا ورودی مستقل تنها یک واسطه است برای به دست آوردن تابع تبدیل و درنتیجه فرکانس‌های طبیعی شبکه، آن هم شبکه‌ای که منبع در آن صفر شده باشد. به عبارت دیگر تابع تبدیل، مستقل از «مقدار ورودی» است ولی به «جنس ورودی» بستگی دارد؛ یعنی اینکه ورودی، منبع ولتاژ باشد یا منبع جریان در گراف شبکهٔ مورد بررسی متفاوت است.

من که درست منظورتان را نفهمیدم. تا امروز ما فکر می‌کردیم که تابع تبدیل هیچ ربطی به ورودی ندارد، ولی شما می‌فرمایید که به «جنس ورودی» بستگی دارد.

پس تمرین 1 را n بار مرور کنید، چون در فهم این مطلب خیلی مؤثر و مفید است.

1ـ در شبکهٔ شکل (3ـ3) در مورد قطب‌های امپدانس ورودی و ادمیتانس ورودی بحث کنید.



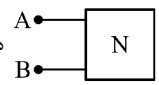
شکل (۳ـ۳) **شبکهٔ تمرین 1**

ببینید $Z_{in}(s)$ اصلاً یعنی چه؟

$$Z_{in}(s)=\frac{V(s)}{I(s)} \qquad (۶ـ۳)$$

یعنی یک نوع تابع تبدیل است که در آن **ورودی** از جنس **منبع جریان** است.

پس قطب‌های امپدانس ورودی $(Z_{in}(s))$، برابر فرکانس‌های طبیعی شبکه است وقتی منبع در آن صفر شده باشد؛ یعنی دو سر AB مدار باز باشد. به طور خلاصه:

«قطب‌های $Z_{in}(s)$ فرکانس‌های طبیعی  هستند.»

حالا اگر دوست دارید خودتان در مورد ادمیتانس بحث کنید:

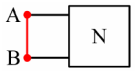
امیدوارم دقیق باشد. سعی می‌کنم دوگان عبارت‌های شما را بگویم؛ اولاً می‌گوییم تعریف ادمیتانس این‌گونه است:

$$Y_{in}(S)=\frac{I(s)}{V(s)} \qquad (۷ـ۳)$$

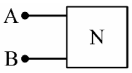
www.Mohandesyar.com

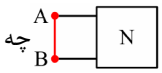
www.Mohandesyar.com

یعنی یک نوع تابع تبدیل است که در آن، **ورودی** از جنس **منبع ولتاژ** است. پس قطب‌های ادمیتانس ورودی $(Y_{in}(S))$، برابر فرکانس‌های طبیعی شبکه است وقتی منبع در آن صفر شده باشد؛ یعنی دو سر AB اتصال کوتاه باشد، به طور خلاصه:

«قطب‌های $Y_{in}(s)$ فرکانس‌های طبیعی شبکه 

هستند.»

کاملاً درست است. حال می‌پرسم، آیا می‌دانید بین فرکانس‌های طبیعی شبکه 

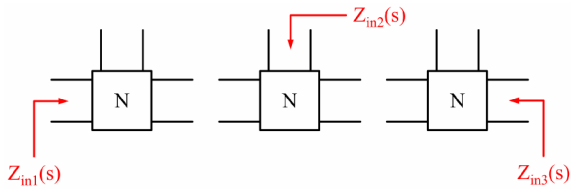
و 

چه شباهتی هست؟

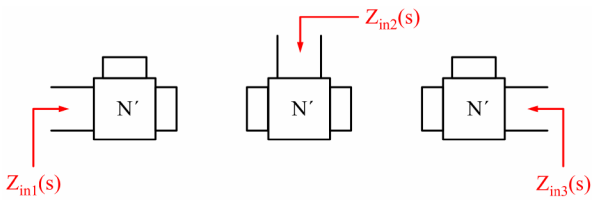
الف ب پ ت ث ج چ ح خ د ذ ر ز ژ س ش ص ض ط ظ ع غ ف ق ک گ ل م ن و هـ ی[1]

نخیر درست نیست، بین آن دو شبکه **هیچ** ارتباطی وجود ندارد.

2ـ در هریک از دو شبکهٔ زیر چه ارتباطی میان $Z_{in_1}(s)$ و $Z_{in_2}(s)$ و $Z_{in_3}(s)$ وجود دارد؟



(الف)



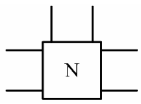
(ب)

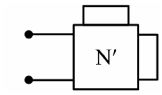
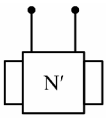
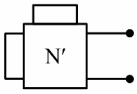
شکل (۳ـ۴) شبکه‌های مورد نظر برای تمرین 2

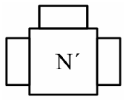
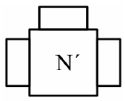
1ـ جناب در پاسخ به این سؤال حرف‌هایی زد که به جهت نگرانی از آنکه ذهن شما را پراکنده کند، از بازگو کردن آن‌ها پرهیز می‌کنم! فقط یک خاطره واقعی می‌گویم؛ در دوران معلمی دو تا شاگرد دو قلو داشتم که از هرچه فکرش را بکنید، به هم شبیه‌تر بودند. خیلی وقت‌ها در تشخیص اینکه کدام‌یک علیرضاست و کدام‌یک امیررضا مشکل اساسی داشتم؛ یکی‌شان ابروهایش از هم جدا بود (یعنی همان O.C. خودمان!) و دیگری ابروهایش به هم پیوسته بود. (یا همان S.C. خودمان!) ولی این دو به شدت از لحاظ ظاهری به هم شبیه بودند، جالب آنکه این دو نفر از لحاظ مشخصه‌های ذاتی و فرکانس‌های طبیعی فوق‌العاده با هم متفاوت بودند! حالا نتیجه‌گیری با خودتان!

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

طبق گفته‌های تمرین 1 در قسمت (الف) می‌توان گفت که قطب‌های $Z_{in_1}(s)$ و $Z_{in_2}(s)$ و $Z_{in_3}(s)$، فرکانس‌های طبیعی شبکهٔ  هستند؛ یعنی با هم برابرند.[1]

اما در مورد قسمت (ب) نمی‌دانم؛ چون قطب‌های $Z_{in_1}(s)$، فرکانس‌های طبیعی  هستند؛ قطب‌های $Z_{in_2}(s)$، فرکانس‌های طبیعی  و قطب‌های $Z_{in_3}(s)$، فرکانس‌های  هستند و این سه شبکه به قول شما **هیچ** ربطی به هم ندارند؛ به قول شما مثل همان دوقلوهای به ظاهر شبیه و در باطن بسی متفاوت‌اند.

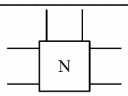
اولاً این 3 تا، دوقلو نیستند، بلکه سه‌قلویند! اما خُب اشکالی ندارد، سراغ ادمیتانس‌ها می‌رویم. قطب‌های $Y_{in_1}(s)$، $Y_{in_2}(s)$ و $Y_{in_3}(s)$ فرکانس‌های طبیعی  هستند؛ یعنی ادمیتانس‌ها دارای قطب‌های یکسانی‌اند؛ به عبارت دیگر در پاسخ به این پرسش می‌گوییم، صفرهای $Y_{in_1}(s)$ و $Y_{in_2}(s)$ و $Y_{in_3}(s)$ با هم یکسان بوده و برابر فرکانس‌های طبیعی شبکه  هستند.

خیلی خوب شد، برویم سراغ داستان بعدی...

حذف فرکانس‌های طبیعی برای یک متغیر شبکه:

- گاهی می‌توان شرایط اولیه را طوری تعیین کرد که یکی از فرکانس‌های طبیعی حذف شود (به کمک تبدیل لاپلاس تابع شبکه).
- گاهی می‌توان ورودی از **جنس توابع ضربه** را طوری تعیین کرد که یکی از فرکانس‌های طبیعی حذف شود.

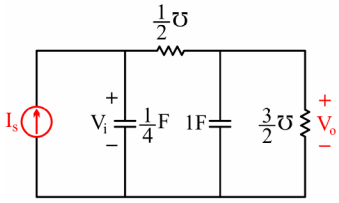
برای درک بهتر این جملاتِ پربار لازم است که یک مثال جانانه با هم حل کنیم تا خیلی خوب مفهوم این دو گزاره آخر را درک کنیم.

1ـ به عبارت دقیق‌تر، قطب‌های آن‌ها، همگی زیرمجموعهٔ فرکانس‌های طبیعی شبکهٔ  هستند.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

3ـ ابتدا فرکانس‌های طبیعی شبکه را به دست آورید. سپس در حالت ورودی صفر، شرایط اولیه را طوری تعیین کنید که خروجی V_o فقط شامل فرکانس -1 باشد و درنهایت در شرایط حالت صفر، ورودی (از جنس توابع ضربه) را طوری پیدا کنید که باز خروجی V_o فقط شامل فرکانس -1 باشد.



شکل (۳ـ۵) مدار تمرین 3

ابتدا عینک لاپلاسی زده و سپس با حل مدار به روش منظم گره، داریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{s}{4}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & s+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_i \\ V_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} i_s \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ورودی}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{4}V_i(0) \\ V_0(0) \end{pmatrix}}_{\text{شرایط اولیه}}$$

با حل این معادلات به روش کرامر چنین داریم:

$$V_0 = \frac{2}{(s+1)(s+3)}I(s) + \frac{(s+2)V_0(0)+\frac{1}{2}V_i(0)}{(s+1)(s+3)}$$

و برای فرکانس‌های طبیعی:

$$\det Y_n = 0 \quad \rightarrow \quad s=-1,-3$$

در حالت ورودی صفر برای حذف فرکانس طبیعی $s=-3$، باید صورت ضریبی از $(s+3)$ شود؛ یعنی باید چنین داشته باشیم:

$$(s+2)\,V_0(0)+\frac{1}{2}V_i(0)=K(s+3)$$

$$K=V_0(0)$$

$$3V_0(0)=2V_0(0)+\frac{1}{2}V_i(0) \quad \Rightarrow \quad V_i(0)=2V_0(0)$$

بسیار عالی شد؛ یعنی هرگاه ولتاژ اولیهٔ خازن سمت چپی دو برابر ولتاژ اولیه خازن سمت راستی باشد، در خروجی $V_0(t)$ عبارت e^{-3t} ظاهر نمی‌شود و فقط شامل e^{-t} است. (خیلی جالب است‌ها[1]!)

1ـ سال‌ها در درس کنترل می‌خواندید که می‌توان یک قطب را به وسیلهٔ یک صفر حذف کرد، اما مفهوم فیزیکی آن را خوب درک نمی‌کردید؛ یکی از خوبی‌های این مثال آخر این است که به صورت فیزیکی، مفهوم حذف قطب با اضافه کردن صفر را درک می‌کنید.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

و درنهایت برای قسمت آخر:

$$I(s)=K(s+3)$$
$$i_s(t)=k\delta'(t)+3k\delta(t)$$

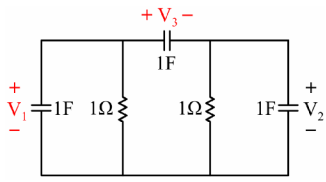
و همان‌طور که انتظار می‌رفت، از جنس توابع ضربه شد.

حالا یک مسئله برای ممارست بیشتر:

4ـ الف) مرتبهٔ مدار را به دست آورید.

ب) فرکانس‌های طبیعی متغیرهای V_1 و V_3 را بیابید.

ج) شرایط اولیه را طوری تعیین کنید تا فقط فرکانس $-\frac{1}{3}$ ظاهر شود.



شکل (۳ـ۶) **مدار تمرین 4**

برای مرتبهٔ مدار، تعداد فرکانس‌های طبیعی شبکه لازم است. مثلاً با روش منظم ماتریس ادمیتانس گره داریم:

$$Y_n=\begin{pmatrix}2s+1 & -S\\ -S & 2s+1\end{pmatrix}$$

$$4s^2+4s+1-s^2=0 \quad\Rightarrow\quad S_{1,2}=-1,-\frac{1}{3}$$

جالب شد! مدار سه تا خازن دارد، ولی مرتبهٔ دوم شد.

دوستان، در این مورد به زودی با هم بحث خیلی ساده‌ای خواهیم داشت که در آن برای یافتن مرتبهٔ مدار، دیگر نیازی به و برای تحلیل و محاسبات نیست، بلکه تنها یک تیزبین لازم است!

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

ادامه می‌دهم:

$$\text{KCL}\quad \begin{cases} V_1' + V_1 + V_3' = 0 \\ V_2' + V_2 - V_3' = 0 \end{cases}$$

با تفاضل این دو معادله و توجه به:

$$V_3 = V_1 - V_2$$

چنین داریم:

$$3V_3' + V_3 = 0$$

$$3s+1=0 \quad \rightarrow \quad s=-\frac{1}{3}$$

چقدر جالب‌تر! پس به خودی خود در متغیر $V_3(t)$، فقط فرکانس $-\frac{1}{3}$ ظاهر می‌شود.

در قسمت (ج) مسئله، از ما خواسته شده که در متغیر V_1 هم فقط $-\frac{1}{3}$ ظاهر شود. با لاپلاس‌گیری از روابط و استفاده از روش آقای کرامر داریم:

$$\begin{cases} (2s+1)V_1 - sV_2 = 2V_{01} - V_{02} \\ -sV_1 + (2s+1)V_2 = -V_{01} + 2V_{02} \end{cases}$$

$$V_1(s) = \frac{(3s+2)V_{01} - V_{02}}{(3s+1)(s+1)}$$

حالا برای حذف $s=-1$ داریم:

$$(3s+2)\,V_{01} - V_{02} = K\,(s+1)$$

$$V_{01} = -V_{02}$$

یعنی اگر ولتاژ اولیه دو خازن چپی و راستی قرینه باشند، به خواسته‌مان می‌رسیم.

۳ـ۲ مرتبهٔ مدار یا تعداد فرکانس‌های طبیعی یک شبکه

قبل از شروع این مبحث، یک تست nگزینه‌ای مطرح می‌کنم:

مرتبهٔ مدار برابر کدام‌یک از عبارت‌های زیر است؟

1) تعداد خازن‌ها و سلف‌های مدار!

2) تعداد فرکانس‌های غیر صفر و شبکه!

3) تعداد متغیرهای حالت مدار

4) تعداد فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه!

5) تعداد قطب‌های تابع تبدیل یک متغیر شبکه!

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

من فکر می‌کنم گزینه 3 درست است.

درست است ولی اگر چنین فرض کنیم، گزینه‌های 1 و 2 و 4 و 5 هم درست می‌شوند:

= مستقل، = صفر و = حداکثر

حالا برویم سراغ اصل بحث خودمان:

مرتبهٔ مدار برابر است با تعداد عناصر **مستقل** ذخیره‌کنندهٔ انرژی یا به عبارت دیگر مجموع تعداد سلف‌ها و خازن‌های مستقل.

در قدم صفرم[1]، به‌جای هر تعداد سلف یا خازن سری و یا موازی، یک المان (یک سلف یا یک خازن) قرار می‌دهیم (معادل با کل آن‌ها). حال در قدم اول، با اطلاعات پیش‌دبستانی، تعداد سلف‌ها و خازن‌ها را می‌شمریم. در قدم دوم، به ازای هریک از شرایط زیر در مدار، یک واحد از مرتبه مدار کم می‌کنیم:

الف) اگر در مدار، **حلقهٔ خازنی** (و احیاناً همراه منابع ولتاژ) موجود بود.

ب) اگر در مدار، **کات‌ست سلفی** (و احیاناً همراه منابع جریان) موجود بود.

ج) اگر ولتاژ دو سر خازن یا جریان عبوری از سلف از طریقی (مثلاً **یک منبع وابسته**)، به یک یا تعدادی از سایر متغیرهای حالت وابسته بود.

آیا ممکن است، علت بندهای (الف)، (ب) و (ج) را به طور مختصر بگویید؟

حتماً؛ ببینید، هرگونه وابستگی در مدار بینِ متغیرهای حالت، یک واحد از فرکانس‌های طبیعی کم می‌کند.

مثلاً به شکل (3ـ6) نگاه کنید، آیا موافقید که:

$$V_3 = V_1 - V_2$$

معنی این حرف می‌دانید چیست؟

یعنی با داشتن V_1 و V_2، مقدار V_3 دیگر معلوم است؛ یعنی بیچاره خازن C_3 از خودش اختیاری ندارد، یعنی مستقل نیست، یعنی وابسته است. حالا اگر در آن حلقه یک منبع ولتاژ هم اضافه شود، رابطهٔ اخیر مثلاً این‌جوری می‌شود:

$$V_3 = V_1 - V_2 + 5$$

و این حرف‌ها باز هم صادق است.

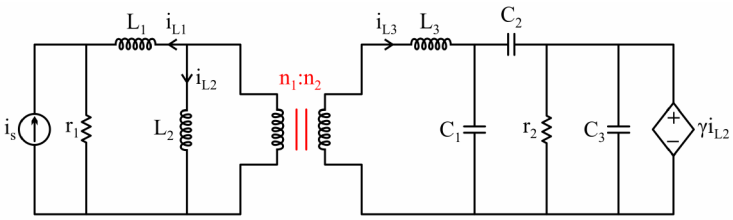
توضیح بندهای (ب) و (ج) نیز عیناً همین‌گونه است، اما در یک عبارت هوشمندانه می‌توان عبارت‌های (الف) و (ب) و (ج) را در یک جمله خلاصه کرد: «به ازای هرگونه ترکیب خطی بین متغیرهای حالت (V_Cها و I_Lها) و مقادیر معلوم (مثل منابع)، یک واحد از مرتبه مدار کم می‌شود.» فکر کنم تاکنون علتش را خوب فهمیده‌اید که به خاطر وابستگی این متغیرها به یکدیگر است.

1ـ یعنی قبل از هر اقدامی

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

5ـ تعداد متغیرهای حالت را در مدار شکل زیر تعیین کنید.



شکل (۳ـ۷) **مدار تمرین 5**

در اینجا قدم صفرم مفهومی ندارد. مجموع تعداد سلف‌ها و خازن‌ها برابر $3 + 3 = 6$ است و در قدم دوم یک کات‌ست سلفی داریم و یک حلقهٔ خازنی و یک وابستگی؛ پس:

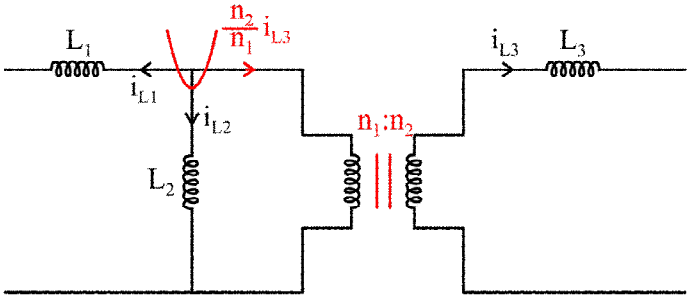
$$\text{مرتبهٔ مدار} = 6 - \underset{\text{حلقه خازنی}}{1} - \overset{\text{کات‌ست سلفی}}{1} - \underset{\text{اثر وابستگی}}{1} = 3$$

مگر منظور از کات‌ست سلفی، کات‌ستی فقط شامل سلف‌ها نیست؟

چرا و منظور از حلقهٔ خازنی، حلقه‌ای شامل فقط خازن‌هاست.

پس اینجا کات‌ست سلفی خالص نداریم که؟

خودم عرض می‌کنم؛ به شکل (3ـ8) نگاه کنید:



شکل (۳ـ۸) **توضیح دقیق‌تر کات‌ست سلفی**

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

با یک KCL ساده داریم:

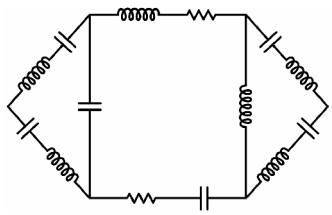
$$i_{L_1} + i_{L_2} + \frac{n_2}{n_1} i_{L_3} = 0$$

خُب این یعنی وابستگی دیگر؛ مثلاً با معلوم بودن i_{L_1} و i_{L_2}، i_{L_3} دیگر نامش می‌شود جریان بی‌اختیار یا همان وابسته خودمان!

اصلاً استاد اجازه بدهید من یکی از کشفیات اخیرم را بازگو کنم؛ من در اثر حل مسایل متعدد فهمیده‌ام که ترانسفورماتور در مقدار فرکانس‌های طبیعی مؤثر است، اما در تعداد فرکانس‌های طبیعی یا همان مرتبه مدار هیچ نقشی ندارد.

جناب کاشف، اجازه بده من به راحتی کشف شما را اثبات کنم! در فصل هفتم دیدیم که می‌توان اجزای مدار را از ترانسفورماتور انتقال داد. با این انتقال مقدار عناصر عوض می‌شود ولی شکل گراف مدار تغییری نمی‌کند؛ پس مقادیر فرکانس‌های طبیعی تغییر می‌کنند اما تعداد آن‌ها نه. پس خواهشاً اسم مرا هم در این اکتشافات طلایی!! ثبت کن!

6ـ در مدار شکل زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر مدار چندتاست؟



شکل (۳ـ۹) **مدار تمرین 6**

قبل از حل این مسئله قدری درباره فرکانس‌های طبیعی صفر حرف بزنیم.

در هر شبکه تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر برابر است با تعداد حلقه‌های سلفی به علاوهٔ تعداد کات‌ست‌های خازنی؛ چراکه هریک از این‌ها یک سیگنال DC ایجاد می‌کنند.)

مثلاً یک حلقه سلفی در نظر بگیرید (حلقه‌ای فقط شامل سلف). یک جریان DC برای هریک از سلف‌ها فرض کنید. حالا با این فرض یک KVL در تان بزنید؛ حاصل چنین است:

$$0+0+0+0+\mathbf{L}=0$$

چراکه وقتی جریان سلف DC (ثابت) باشد، ولتاژش صفر است. حالا می‌پرسم که آیا این KVL صادق است؟ شما هم با لبخندی ملیح می‌گویید معلوم است که صادق است؛ پس فرض جریان DC و به عبارت دیگر «فرکانس صفر» برای حلقهٔ سلفی درست است و به طور مشابه برای کات‌ست خازنی.

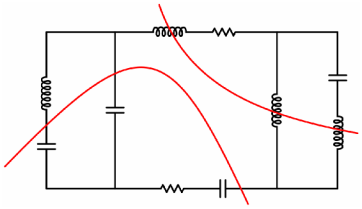
پس تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر معلوم است دیگر؛ تعداد کل فرکانس‌های طبیعی یا مرتبهٔ مدار منهای تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

حالا برویم سراغ حل تمرین 6 :

قدم صفرم در این مسئله خیلی مهم است؛ در طرفین مدار به‌جای خازن‌های سری و سلف‌های سری یک دانه از هر کدام می‌گذاریم و به شکل (3ـ10) می‌رسیم:



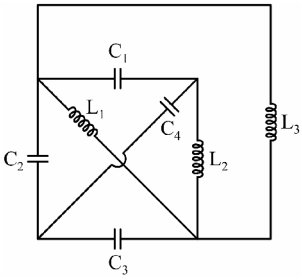
شکل (۳ـ۱۰) مدار ساده‌شده در تمرین 6 و کات‌ست‌ها

پس دیگر مسئله حل است و چنین می‌گوییم:

$$\text{تعداد فرکانس‌های غیرصفر} = \underset{\text{تعداد سلف}}{4} + \overset{\text{تعداد خازن}}{4} - \underset{\text{کات‌ست سلفی}}{1} - \overset{\text{کات‌ست خازنی}}{1} = 6$$

7ـ کدام عبارت درباره مدار شکل زیر درست است؟

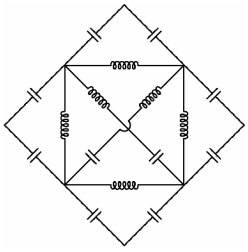
1) سه فرکانس طبیعی صفر دارد.
2) یک فرکانس طبیعی صفر دارد.
3) فرکانس طبیعی صفر ندارد.
4) هیچ‌کدام



شکل (۳ـ۱۱) مدار تمرین 7

قدم صفرم آن است که به‌جای دو سلف موازی L_1 و L_3، یک سلف بگذاریم. پس L_1 را حذف می‌کنیم و حالا فقط یک کات‌ست خازنی داریم و حلقهٔ سلفی موجود نیست؛ یعنی گزینه 2 درست است.

8ـ تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار زیر چند تاست؟



شکل (۳ـ۱۲) مدار تمرین 8

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

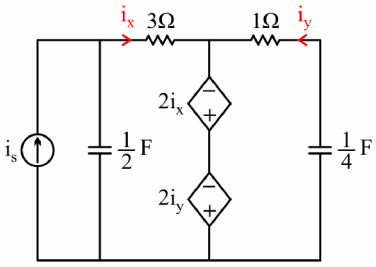
باز قدم صفرم؛ به‌جای هر یک از جفت خازن‌های چهار طرف، یک خازن می‌گذاریم و سپس داریم:

تعداد حلقه‌های خازنی ـ تعداد کات‌ست‌های سلفی ـ جمع خازن‌ها + جمع سلف‌ها = مرتبهٔ مدار

مرتبهٔ مدار $= 6+6-0-1=11$

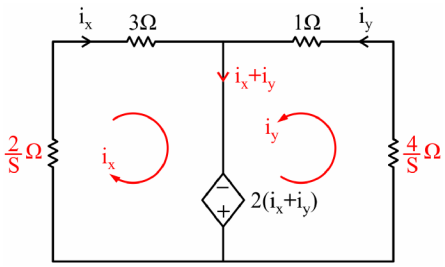
و آن یک حلقهٔ خازنی هم، حلقهٔ بیرونی است.

9ـ فرکانس‌های طبیعی مدار شکل زیر کدام است؟



شکل (۳ـ۱۳) مدارتمرین 9

ازآنجاکه استاد گفتند منابع مستقل، تأثیری در فرکانس طبیعی ندارند، برای سادگی آن را حذف می‌کنیم و پس از حذف، شکل مدار این‌گونه می‌شود:



شکل (۳ـ۱۴) مدار ساده‌شده و با عینک لاپلاس تمرین 9

حالا از روش منظم مش می‌رویم:

$$Z_m I = E_s$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{s}+3-2 & 0-2 \\ 0-2 & \frac{4}{s}+1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cancelto{0}{i_x}+2\cancelto{0}{i_y} \\ 2\cancelto{0}{i_x}+2\cancelto{0}{i_y} \end{pmatrix}$$

$$Z_m = \begin{pmatrix} \frac{2}{s}+1 & -2 \\ -2 & \frac{4}{s}-1 \end{pmatrix}$$

و برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی، ریشه‌های دترمینان Z_m را پیدا می‌کنیم:

$$\det Z_m = 0$$

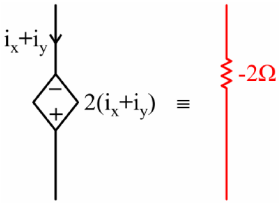
$$5s^2-2s-8=0$$

$$S_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{41}}{5}$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

من عرض مختصری دارم. به وسط شکل (3ـ14) نگاه کنید؛ آیا با حرفِ شکل (3ـ15) موافقید؟



شکل (۳ـ۱۵) ساده کردن مدار تمرین 9

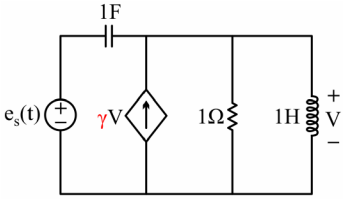
به نظرم ادامه‌اش معلوم است دیگر...

آفرین بر هر دو دوست بزرگوارم! جالب اینکه من می‌خواستم در جلسه بعدی درس یک نکتهٔ جالب به شما بگویم، ولی حالا می‌بینم که خودتان به طور فطری آن را بلدید! ان‌شاءا... همان موقع به آن اشاره خواهم کرد.

آخه استاد این‌جوری که دل توی دلمون نمی‌مونه! حالا که گفتید، تمامش کنید لطفاً، واِلّا تا هفتهٔ آینده فکر و ذکر و دل و... ما مشغول همین قصه می‌شود!

امان از فکر و ذکر و دل و... شما! فقط اشاره می‌کنم؛ وقتی یک مدار دوگره‌ای است، بهترین کار برای شروع تحلیل آن، نوشتن ماتریس ادمیتانس گره است (چراکه 2×2 می‌شود) و زمانی‌که مدار دوحلقه‌ای است، عاقلانه‌ترین کار برای شروع تحلیل، به دست آوردن ماتریس امپدانس حلقه است (چراکه 2×2 می‌شود) و شما خوب‌تر از من می‌دانید که کار کردن با ماتریس 2×2، چقدر لذیذتر و ساده‌تر از کار کردن با ماتریس 3×3 و یا مرتبهٔ بالاتر است! اما اصل داستان بماند برای جلسهٔ بعد.

10ـ در مدار شکل زیر، مقدار γ چقدر باشد تا تمام فرکانس‌های طبیعی مدار، روی محور موهومی قرار بگیرند؟



شکل (۳ـ۱۶) مدار تمرین 10

حالا که استاد این نکته را در مورد مدارهای پرکاربرد دوگره‌ای و دو حلقه‌ای فرمودند، من هم یک قصه در مورد مدارهای یک‌گره‌ای و تک‌حلقه‌ای بگویم و آن هم اینکه کلید حل مدارهای یک‌گره‌ای، KCL در آن گره و رمز تحلیل مدارهای یک‌حلقه‌ای، KVL در آن تک‌حلقه است. می‌دانم که در دلتان می‌گویید چه نکتهٔ ساده‌ای؛ بنده هم عرض می‌کنم که خُب فرق من و استاد همین است دیگر!

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

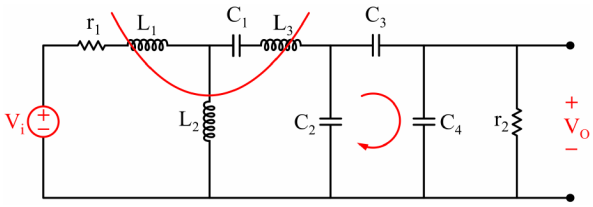
حالا بگذریم و برویم سراغ حل این مسئله تک‌گره‌ای:

در گرهٔ بالایی مدار، KCL می‌زنیم، منبع ولتاژ مستقل را هم صفر می‌کنیم؛ چنین می‌شود:

$$\text{KCL} \quad : \quad \left(s+\frac{1}{s}+1-\gamma\right)V=0 \quad \Rightarrow \quad s^2+(1-\gamma)s+1=0$$

ریشه‌ها موهومی محض‌اند $\Rightarrow \quad 1-\gamma=0 \quad \Rightarrow \quad \gamma=1$

11ـ تابع تبدیل $H(s)=\dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$ حداکثر چند قطب دارد؟



شکل (۳ـ۱۷) مدار تمرین 11

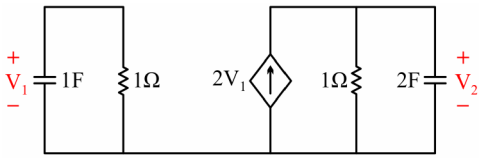
این مسئله کمی دشوار است؛ چراکه باید تعداد قطب‌های یک متغیر شبکه یعنی V_o را پیدا کنیم، پس از آن شروع کنیم به یافتن تابع تبدیل $\dfrac{V_o}{V_i}$.

دوست خوبم، یک‌بار دیگر صورت مسئله را خوبِ خوب بخوان[1]. چند لحظه همه صبر می‌کنیم تا خود شما کلید را پیدا کنید...

آهان فهمیدم! کلمه **«حداکثر»** را می‌گویید. حداکثر تعداد قطب‌های هر متغیر شبکه، برابر همان مرتبهٔ مدار است؛ پس ساده شد دیگر:

$$\text{مرتبهٔ مدار} = 7-1-1=5$$

12ـ برای مدار شکل زیر، معادلات فضای حالت را بنویسید.



شکل (۳ـ۱۸) مدار تمرین 12

1ـ چقدر خوب خواندنِ صورت مسئله مهم است؛ آدمِ موفق، یک صورت مسئله خوب‌خوان است! نه فقط مسئله‌های مدار، بلکه همهٔ مسئله‌های زندگی!

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

ببخشید، جسارته ها! ولی موضوع تمرین 12 چه ارتباط خاصی با بحث مشخصه‌های ذاتی دارد؟

حالا که جواب ندادید، خودم حل می‌کنم؛ 2 تا KCL چنین می‌دهد:

$$\dot{V}_1 = -V_1$$

$$2\dot{V}_2 = 2V_1 - V_2$$

پس ماتریس ضرایب حالت برابر می‌شود با:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

13ـ در مدار تمرین قبلی، فرکانس‌های طبیعی کدام‌اند؟

1) -1 و $\frac{-1}{2}$ 2) -2 و -1 3) -4 و -1 4) -3 و -1

تازه ام اُفتاد! می‌خواستید کاربرد یک نکتهٔ جالب را در حین حل مسئله بفهمیم و آن اینکه «مقادیر ویژه ماتریس A»، همان «فرکانس‌های طبیعی شبکه» هستند. این موضوع را در درس کنترل هم خوانده بودیم. این ماتریس ضرایب حالت A ، چه اطلاعاتی که درون خود ندارد! پس می‌رویم و ریشه‌های دترمینان $SI - A$ را به دست می‌آوریم:

$$\det(SI - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+0.5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -0.5 \ , \ -1$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

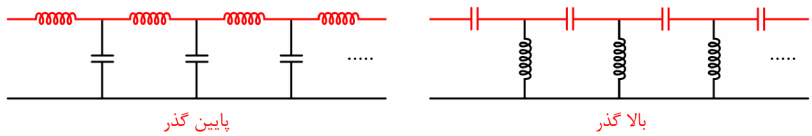
۳ـ۳ نگاه فیلتری به شبکه‌ها

اگر به یک مدار به چشم یک فیلتر نگاه کنیم، چیزهای جالبی عایدمان می‌شود؛ مثل این‌ها:

واضح است که اگر در شاخه‌های سری (یا افقی!) مدار باز (یا .O.C) ایجاد شود و یا در شاخه‌های موازی (یا عمودی!) اتصال کوتاه (یا .S.C) قرار بگیرد، سیگنالی از ورودی به خروجی نمی‌رسد؛ پس در تابع تبدیل یک صفر ایجاد می‌شود. به طور مشابه چنانچه در شاخه‌های سری (یا افقی!) اتصال کوتاه (یا .S.C) ایجاد شود و یا در شاخه‌های موازی (یا عمودی!) مدار باز (یا .O.C) واقع شود، ماکزیمم سیگنال از ورودی به خروجی می‌رسد؛ پس در تابع تبدیل یک قطب ایجاد می‌کند. به این گزاره‌های خبری خوب توجه کنید:

شبکه‌های نردبانی شامل سلف‌های سری و خازن‌های موازی، مانند یک فیلتر پایین‌گذر عمل می‌کنند.

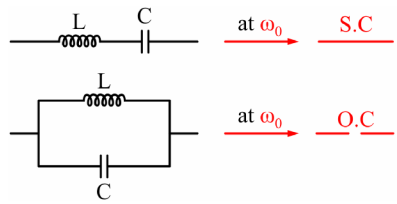
شبکه‌های نردبانی شامل سلف‌های موازی و خازن‌های سری، مانند یک فیلتر بالاگذر عمل می‌کنند.



شکل (۳ـ۱۹) شبکه‌های نردبانی بالاگذر و پایین‌گذر

باز چند جملهٔ دیگر:

آیا یادتان هست که گفتیم مدارهای تشدید LC سری در فرکانس تشدید، در حکم اتصال کوتاه بوده و مدارهای تشدید LC موازی در فرکانس تشدید، در حکم مدار بازند؟



شکل (۳ـ۲۰) مدارهای تشدید LC سری و موازی در فرکانس تشدید

حال با توجه به عبارت‌های شکل (3ـ20) دو نکته می‌گوییم:

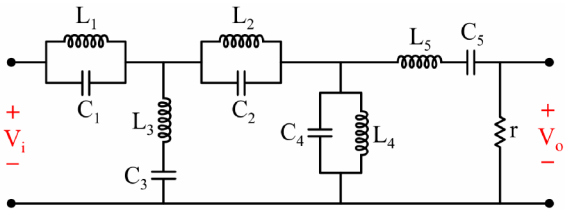
در توابع شبکه، صفرهای پایان‌دار در اثر مدارهای تشدید سری در شاخه‌های عمودی و یا مدارهای تشدید موازی در شاخه‌های افقی، به وجود می‌آید (در فرکانس تشدید).

در توابع شبکه، قطب‌های پایان‌دار در اثر مدارهای تشدید سری در شاخه‌های افقی و یا مدارهای تشدید موازی در شاخه‌های عمودی، به وجود می‌آید (در فرکانس تشدید).

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

14ـ در مدار شکل زیر، کدام‌یک از مقادیر، صفرها و قطب‌های تابع تبدیل $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ می‌تواند باشد؟



شکل (۳ـ۲۱) مدار تمرین 14

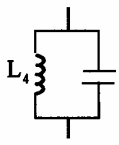
1) $\frac{1}{\sqrt{L_4 C_4}}$ یک قطب پایان‌دار است.

2) $\frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ یک قطب پایان‌دار است.

3) $\frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}}$ یک قطب پایان‌دار است.

4) $\frac{1}{\sqrt{L_5 C_5}}$ یک صفر پایان‌دار است.

با توجه به آنچه گفته شد، دیگر نیازی به حل نیست؛ واضح است که گزینهٔ (1) درست است. با توجه به نکتهٔ (4) یعنی مدار



در شاخهٔ عمودی در فرکانس تشدید $\left(\frac{1}{\sqrt{L_4 C_4}}\right)$ قطب پایان‌دار می‌سازد.

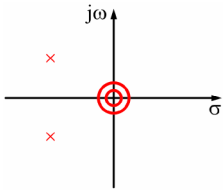
قبل از خداحافظی از این بحث، عرض کنم که گاه‌گاهی در درس مدار، سؤال‌های درس کنترل[1] هم می‌آید؛ پس یکی دو تا سؤال از درس کنترل خطی در اینجا می‌آوریم تا به قول بازاری‌ها، جنسمان جور باشد!

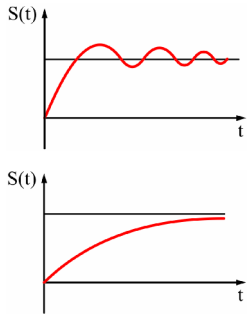
1ـ البته از یک نظر می‌توان به درس مدار، نگاه شبکه‌ای و کنترلی هم داشت؛ برای همین باید اصول کلی درس کنترل خطی را خوب بلد باشید.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

15ـ اگر نمودار قطب و صفر شکل زیر مربوط به تابع تبدیل یک سیستم باشد، پاسخ پله شبیه کدام‌یک از گزینه‌هاست؟





(1 (2 (3 (4

شکل (۳ـ۲۲) نمودار صفر و قطب تمرین 15

من کنترلم خوبه! پس اجازه بدهید من بگویم؛ با توجه به شکل صفر و قطب‌ها، تابع تبدیل این‌گونه است:

$$H(s)=K\frac{s^2}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}$$

پس پاسخ پله بدین صورت است:

$$S(s)=\frac{1}{s}\times H(s)=K\frac{s}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}$$

حالا با قضیهٔ مقدار اولیه و نهایی در مورد پاسخ پله داریم:

$$\lim_{t\to 0} s(t)=\lim_{s\to\infty} sS(s)=K$$

یعنی $s(t)$ از یک عدد (غیر صفر و غیر بی‌نهایت) شروع می‌شود؛ یعنی گزینه 4 درست است.

البته در بعضی مسایل ممکن است مقدار نهایی کمک کند:

$$\lim_{t\to\infty} s(t)=\lim_{s\to 0} sS(s)=0$$

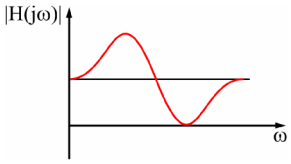
یعنی $s(t)$ به صفر ختم می‌شود.

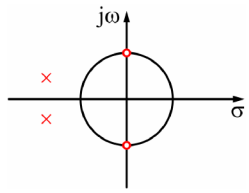
چقدر کامل و قشنگ گفتید! حیف که اینجا کلاس کنترل نیست والّا یک عالمه حرف داشتم برای گفتن!

www.Mohandesyar.com

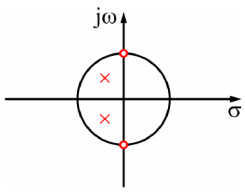
www.Mohandesyar.com

16ـ اگر تابع $|H(j\omega)|$ به صورت شکل زیر باشد، آرایش صفر و قطب تابع تبدیل شبکه به کدام صورت است؟

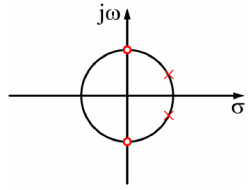




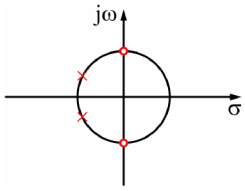
(2



(1



(4



(3

شکل (۳ـ۲۳) منحنی $|H(j\omega)|$ در تمرین 16

باز بنده عرض می‌کنم؛ از روی شکل معلوم است که:

$$H(s)=K\frac{(s^2+a^2)}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}$$

مطابق شکل (3ـ23)، مقدار اولیه و نهایی $|H(j\omega)|$ یکسان است؛ پس:

$$\lim_{\omega\to 0}|H(j\omega)|=\lim_{\omega\to\infty}|H(j\omega)|$$

$$\cancel{K}\frac{a^2}{\alpha^2+\omega_d^2}=\cancel{K}\quad\Rightarrow\quad \alpha^2+\omega_d^2=a^2$$

رابطهٔ اخیر معادلهٔ یک دایره است، پس یا گزینه 3 درست است یا گزینهٔ 4 که واضح است گزینهٔ 4 به علت ناپایداری غلط است؛ درنتیجه گزینهٔ 3 درست است.

به نظرم برای کلاس درس، همین مقدار چاشنی «کنترل» کافی است ولی حتماً تمرینات آخر فصل را به دقت حل کنید؛ آنجا سؤالات قشنگی از ترکیب درس‌های مدار و کنترل خطی مشاهده می‌کنید...

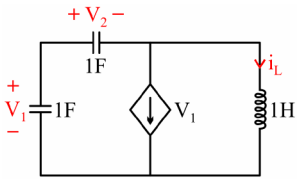
خیلی خوب بود! خسته نباشید؛ برای این جلسه کافی است.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

مسایل تکمیلی فصل سوم

1ـ در مدار زیر شرایط اولیه $\left(V_1(0), V_2(0), i_L(0)\right)$ را به نحوی تعیین کنید که هیچ متغیر شبکه تحریک نشود؟ (مهندسی برق 82)



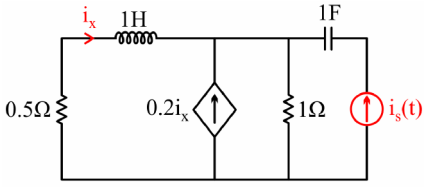
1) $(1,1,-1)$
2) $(1,0,-1)$
3) $(1,-1,1)$
4) $(1,0,0)$

2ـ ماتریس ادمیتانس یک شبکه LTI به صورت زیر داده شده است. اگر گره‌های 2 , 3 به یکدیگر اتصال کوتاه شوند، فرکانس‌های طبیعی سیستم جدید چقدر خواهند بود؟ (مهندسی برق 82)

$$Y_n = \begin{bmatrix} S+1 & 0 & 0 \\ 0 & S+3 & -1 \\ 0 & -1 & S+4 \end{bmatrix}$$

1) $-1, -2.5$
2) $\frac{-7+\sqrt{5}}{2}, \frac{-7-\sqrt{5}}{2}$
3) $-1, -3$
4) $3, -2.5$

3ـ فرکانس‌های طبیعی مدار شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق 82)

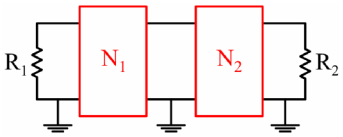


1) -0.5
2) -1.5
3) -1.7 و صفر
4) $+j, -j$

www.Mohandesyar.com

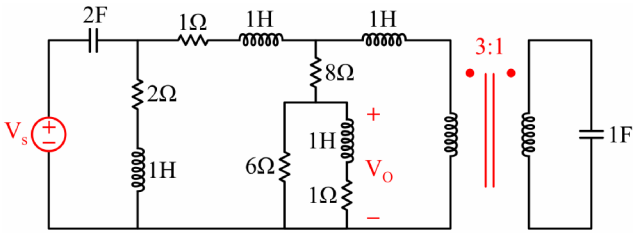
www.Mohandesyar.com

4ـ در شکل زیر، N_1 منحصراً از خازن‌های مثبت و N_2 منحصراً از سلف‌های مثبت خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل یافته‌اند. حداکثر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر شبکه چند است؟ (مهندسی برق 80)



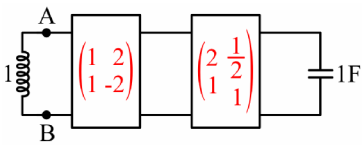
1) 2
2) 4
3) 6
4) 5

5ـ صفرهای انتقال تابع شبکه $H(S)=\frac{V_o}{V_s}$ کدام است؟



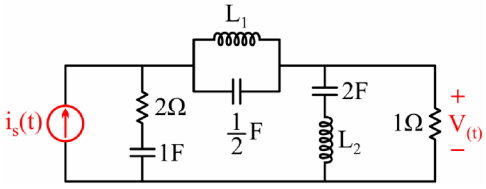
1) $0, -1, -7, \pm j$
2) $0, -1, -2, \pm j$
3) $0, -1, -7, \pm 3j$
4) $0, -1, -2, \pm 3j$

6ـ در مدار شکل زیر، دوقطبی‌ها با پارامترهای انتقال توصیف شده‌اند. فرکانس‌های طبیعی کل شبکه کدام است؟ (مهندسی برق 80)



1) $-1, 2$
2) $-\frac{5}{3}, 2$
3) $1, -2$
4) $\frac{5}{3}, -2$

7ـ در مدار شکل زیر، L_1 و L_2 را چنان انتخاب کنید که برای ورودی $i_s(t)=2\sin t+3\cos 2t$، ولتاژ خروجی $V(t)$، جمله سینوسی با فرکانس 1 یا 2 نداشته باشد. (مهندسی برق 79)

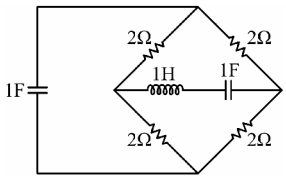


1) $L_1=\frac{1}{2}, L_2=\frac{1}{4}$
2) $L_1=\frac{1}{2}, L_2=\frac{1}{2}$
3) $L_1=\frac{1}{4}, L_2=\frac{1}{2}$
4) $L_1=\frac{1}{4}, L_2=\frac{1}{4}$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

8ـ فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟ (مهندسی برق 79)



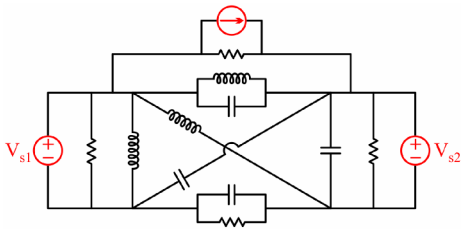
1) $-1, -1$

2) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

3) $-2, -1, -1$

4) $-\frac{1}{2}, -1, -1$

9ـ فرکانس‌های طبیعی غیر صفر شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان شکل زیر کدام‌اند؟ (تمامی مقادیر عناصر برابر واحدند) (مهندسی برق 77)



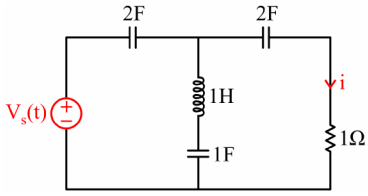
1) $-\frac{1}{3}\left(1 \pm j\sqrt{5}\right)$

2) $\left(-1 \pm j\sqrt{5}\right), \pm j$

3) $\left(-1 \pm j\sqrt{5}\right), -1$

4) $-\frac{1}{3}\left(1 \pm j\sqrt{5}\right), \pm j, -1$

10ـ در تابع شبکه $H(S)=\frac{I(S)}{V_s(S)}$ مدار شکل زیر، تعداد قطب‌های تابع شبکه ..... (مهندسی برق 76)



1) 3 است که یکی از آن ها صفر است.

2) 4 است و هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نیست.

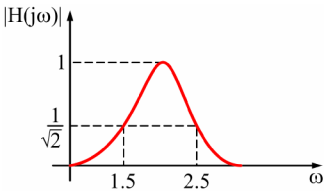
3) 3 است و هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نیست.

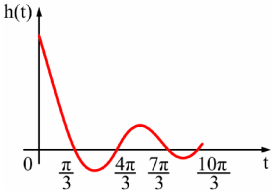
4) 4 است که یکی از آن‌ها صفر است.

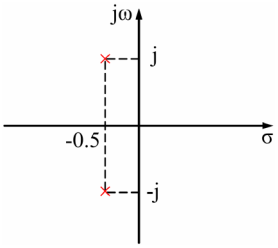
www.Mohandesyar.com

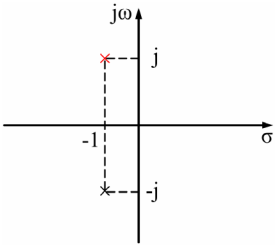
www.Mohandesyar.com

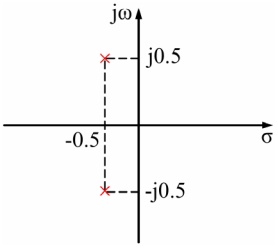
11ـ منحنی اندازه تابع شبکه و پاسخ ضربه یک مدار، در شکل زیر نشان داده شده است. نمایش صفرها و قطب‌های تابع شبکه این مدار کدام است؟

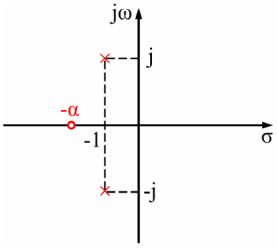




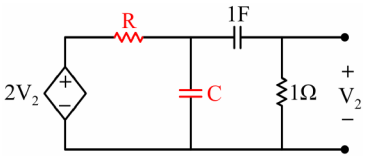
(1


(2


(3


(4


12ـ در شبکه زیر، مقادیر R و C چقدر باشد تا شبکه با فرکانس $\omega=10\frac{rad}{sec}$ نوسان کند؟



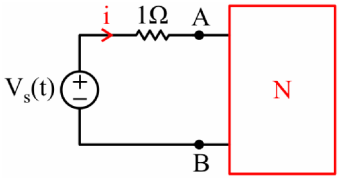
1) $\frac{1}{100}F\ ,\ \frac{9}{10}\Omega$

2) $\frac{1}{100}F\ ,\ \frac{99}{100}\Omega$

3) $\frac{1}{99}F\ ,\ \frac{9}{10}\Omega$

4) $\frac{1}{99}F\ ,\ \frac{99}{100}\Omega$

13ـ شبکه N ، خطی و تغییرناپذیر با زمان است. نتیجه حاصل از آزمایش زیر به صورت $i(t)=\left(2-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$ است. در مورد پایداری شبکه N چه می‌توانید بگویید؟



1) به هر دو صورت اتصال کوتاه و مدار باز پایدار است.

2) به هر دو صورت اتصال کوتاه و مدار باز ناپایدار است.

3) به صورت اتصال کوتاه، پایدار و به صورت مدار باز ناپایدار است.

4) به صورت مدار باز، پایدار و به صورت اتصال کوتاه، ناپایدار است.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

14ـ اگر پاسخ ضربه واحد یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر باشد:

$$h(t)=\left(2e^{-2t}-e^{-t}\right)u(t)$$

و معادلات حالت این مدار به صورت $\dot{x}=Ax+Bw$ باشد، ماتریس A کدام‌یک از صورت‌های زیر می‌تواند باشد؟

(مهندسی برق 84)

1) $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$

15ـ ماتریس امپدانس مش یک مدار LTI متشکل از عناصر RLC و منابع مستقل در حالت دایمی سینوسی به صورت $Z_{in}=\begin{pmatrix}1+j & -1\\ -1 & 2-j\end{pmatrix}$ است. کدام‌یک از ماتریس‌های زیر نمی‌تواند ماتریس ادمیتانس گره این مدار باشد؟

(مهندسی برق 84)

1) $\begin{pmatrix}2-j & -1\\ -1 & 1+j\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}2-j & j\\ j & 1\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}1 & -j\\ -j & 1+j\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}2-j & -1+j\\ -1+j & 1\end{pmatrix}$

16ـ معادلات حالت یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر داده شده است. پاسخ ضربه واحد $V_C(t)$ کدام است؟

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}v_C\\ i_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e(t)$$

$e(t)$ ورودی مدار است و v_C و i_L متغیرهای حالت مدار هستند. (مهندسی برق 86)

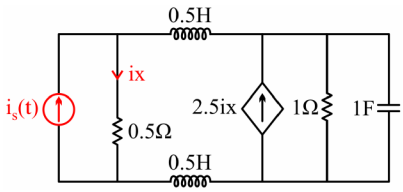
1) $v_C(t)=(k_1+k_2t)e^{-\frac{t}{2}}u(t)$

2) $v_C(t)=ke^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta\right)u(t)$

3) $v_C(t)=\left(k_te^{-\frac{t}{2}}+k_2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right)u(t)$

4) $v_C(t)=kt\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\theta\right)u(t)$

17ـ فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟ (مهندسی برق 83)



1) $-0.5, 2$

2) $0.5, -2$

3) $-0.75+j, -0.75-j$

4) $-1.5+2j, -1.5-j2$

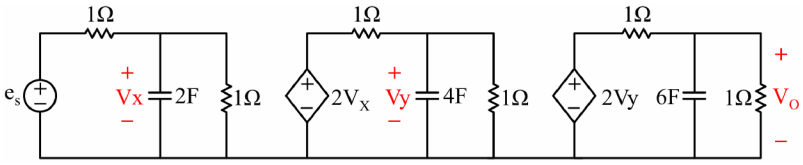
www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

18ـ فرکانس‌های طبیعی کل یک مدار عبارت است از فرکانس‌های طبیعی: (مهندسی برق 84)

1) جریان‌های مستقل مدار
2) ولتاژهای مستقل مدار
3) ولتاژها و جریان‌های مستقل مدار
4) موارد 1 و 2 درست است.

19ـ فرکانس‌های طبیعی مدار شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق 87 و85)



1) $-3,-2,-1$
2) $-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},-1$
3) $-3,-\frac{1}{2},-1$
4) -1 مکرر مرت

20ـ معادلات حالت دایمی سینوسی یک مدار به صورت زیر است (ω فرکانس منبع)، (I_1 فازور i_1 و I_2 فازور i_2):

$$\begin{cases}\left(j\omega-j\frac{2}{\omega}\right)I_1+\left(1-j\frac{1}{\omega}\right)I_2=0\\ \left(-j\omega+j\frac{2}{\omega}\right)I_1+\left(1+j\omega-j\frac{3}{\omega}\right)I_2=1\end{cases}$$

این مدار: (مهندسی برق 86)

1) $\omega=\sqrt{2}$ حالت دایمی سینوسی دارد.
2) با $\omega\neq\sqrt{2}$ حالت دایمی سینوسی با فرکانس ω دارد.
3) با $\omega\neq\sqrt{2}$ حالت دایمی سینوسی با فرکانس‌های $\sqrt{2}$ و ω دارد.
4) به ازای هر ω حالت دایمی سینوسی دارد.

21ـ در یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، تابع تبدیل $H(s)=\frac{V_o}{I_s}$، قطب‌های $s=\pm j2$ را دارد. تمام فرکانس‌های طبیعی مدار به‌جز $\pm j2$ در نیمه چپ صفحه مختلط است. کدام بیان در این مدار درست است؟ (مهندسی برق 85)

1) مدار به ازای هیچ ورودی، پاسخ حالت دایمی سینوسی ندارد.
2) مدار به ازای i_s با فرکانس‌های $\omega=2$، پاسخ حالت دایمی سینوسی دارد.
3) مدار به ازای $i_s=\cos t$ به شرط $H(\pm j)=0$، پاسخ حالت دایمی سینوسی با فرکانس $\omega=2$ دارد.
4) مدار به ازای $i_s=\cos t$ به شرط $H(\pm j)=0$، پاسخ حالت دایمی سینوسی با فرکانس $\omega=1$ دارد.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

22ـ در مداری از مرتبه 6 (یعنی با شش فرکانس طبیعی) توابع انتقال $H_1(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ و $H_2(s)=\frac{s^2}{(s+1)^2(s+3)}$ و پاسخ ورودی صفر $v=Ae^{-\frac{1}{2}t}$ معلوم است. کدام دسته از اعداد زیر فرکانس‌های طبیعی معلوم مدار را نشان می‌دهند؟ (مهندسی برق 86)

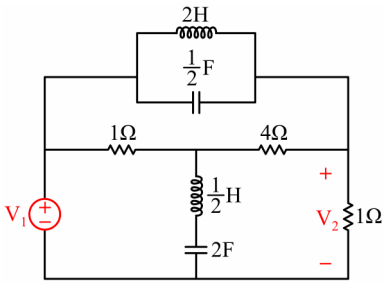
1) $-1,-1,-1,-3,-2,-\frac{1}{2}$

2) $-1,-1,-3,-2,-\frac{1}{2}$

3) $-1,-3,-2,-\frac{1}{2}$

4) موارد 1 یا 2

23ـ در مدار شکل زیر تابع تبدیل ورودی ـ خروجی $H(s)=\frac{V_2}{V_1}$ کدام است؟ (مهندسی برق 87)



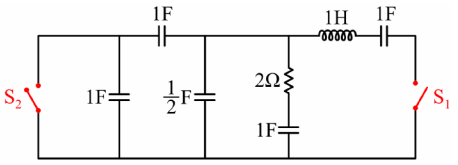
1) $2\frac{s^2+1}{(s+1)^2}$

2) $\frac{s^2+1}{(s+2)^2}$

3) $\frac{s^2+1}{s^2+s+1}$

4) $\frac{s^2+1}{(s+1)^2}$

24ـ در مدار شکل زیر دو حالت باز بودن کلیدها و بسته بودن کلیدها را در نظر بگیرید. کدام ادعا درست است؟ (مهندسی برق 87)



1) تعداد فرکانس‌های طبیعی در هر دو حالت 5 است.

2) تنها فرکانس طبیعی غیر صفر در یک حالت برابر -1 است.

3) تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر در یک حالت برابر تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر در حالت دیگر است.

4) موارد 2 و 3 درست است.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

حل تشریحی

1. **گزینه 1 درست است.**

به نظر من، اگر قرار باشد این متغیرها در شبکه تحریک نشوند، باید مقادیر اولیه خود را حفظ کنند و بدون تغییر باقی بمانند؛ چون هرگونه تغییری به معنای تحریک شدن در شبکه است.

استدلال جالبی بود، آفرین! ادامه بدید.

خب اگر قرار است مقدارشان تغییر نکند، مشتقشان صفر می‌شود؛ پس داریم:

$$\frac{di_L}{dt} = 0 = V_L(t) = -V_2 + V_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2$$

که رابطهٔ بالا تنها در گزینه 1 صدق می‌کند.

و اگر بخواهیم خیالمان راحت شود، می‌توانیم حل را ادامه بدهیم:

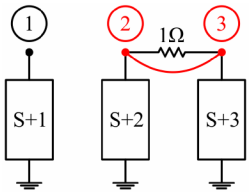
$$\frac{dV_1}{dt} = 0 = i_C(t) \quad \Rightarrow \quad V_1 = -i_L$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

2. گزینه 1 درست است.

ماتریس Y به صورت 2×2 درمی‌آید و ادمیتانس‌های موجود در دو گرهٔ اتصال کوتاه‌شده با هم جمع می‌شوند، البته به استثنای ادمیتانس مشترک بین آن دو که اتصال کوتاه می‌شود و از بین می‌رود. پس:



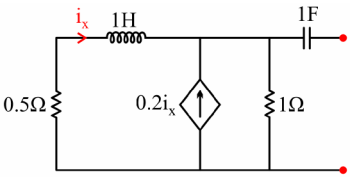
$$Y_n=\begin{bmatrix} S+1 & 0 \\ 0 & 2S+5 \end{bmatrix}$$

و با محاسبهٔ ریشه‌های دترمینان ماتریس Y جدید، فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آید:

$$\Delta(S)=(S+1)(2S+5)=0 \quad \Rightarrow \quad S=-1\,,\,S=-2.5$$

3. گزینه 3 درست است.

اول باید منابع مستقل را صفر کنیم:



و حالا می‌توانیم برای متغیر i_x یک معادله بنویسیم که یک KVL ساده در حلقه است:

$$(0.5+S)i_x+1.2i_x=(S+1.7)i_x=0$$

و چون ورودی را صفر کرده‌ایم، پرانتزی که در این خروجی ضرب شده است، درواقع مخرج تابع تبدیل یا همان معادلهٔ مشخصه بوده و ریشه‌هایش فرکانس‌های طبیعی این خروجی را می‌دهد.

$$S+1.7=0 \quad \Rightarrow \quad S=-1.7$$

پس گزینه 3 درست است، ولی چرا فرکانس طبیعی صفر را به دست نیاوردیم؟

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

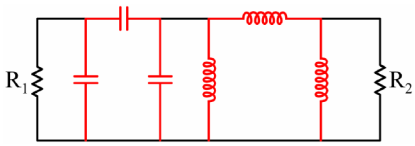
فرکانس طبیعی صفر مربوط به ولتاژ خازن است و اگر از روشی که دوستتان سؤال را حل کردند خواستید استفاده کنید، حواستان به فرکانس‌های طبیعی صفر هم که سلف‌ها و خازن‌ها تولید می‌کنند باشد.

$$\frac{V_C(S)}{I_S(S)} = \frac{1}{CS} \quad \Rightarrow \quad S = 0$$

4. گزینه 2 درست است.

چون شبکه‌ها، زمین‌های مشترک دارند، به‌جای دوقطبی‌ها می‌توانیم معادل T یا π آن‌ها را جایگزین کنیم.

پس به صورت زیر می‌شود:



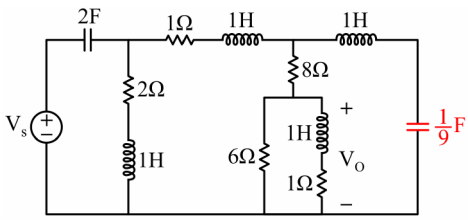
6 عنصر ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد و به علت وجود یک حلقه خازنی، باید یکی از این تعداد کم کنیم که مدار درجهٔ 5 می‌شود؛ بنابراین 5 فرکانس طبیعی داریم.

و به علت وجود یک حلقهٔ سلفی، یک فرکانس طبیعی صفر هم وجود دارد؛ پس 4 فرکانس طبیعی غیر صفر داریم.

بله و بسته به اینکه برای هر کدام از شبکه‌ها از چه مدار معادلی استفاده کرده باشید، ممکن است درجه مدار و تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر عوض شود، ولی تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر ثابت می‌ماند.

5. گزینه 4 درست است.

اول خازن 1 فاراد را منتقل کنیم:



www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

شاخه عمودی سلف 1 H و خازن $\frac{1}{9}F$ سری، یک صفر در $S=\pm j3$ می‌دهد که 3 فرکانس تشدید این LC موجب اتصال کوتاه شدنش است و شاخه سری سلف 1 H و مقاومت 1Ω ، یک صفر در $S=-1$ و شاخه سری سلف 1 H و مقاومت 2Ω ، یک صفر در $S=-2$ و خازن 2F سری با منبع هم یک صفر در $S=0$ تشکیل می‌دهند؛ پس صفرهای انتقال عبارت‌اند از:

$$S=0,-1,-2,\pm j3$$

6. گزینه 4 درست است.

دوقطبی‌ها به دنبال یکدیگر بسته شده‌اند؛ پس برای تابع انتقال کل داریم:

$$T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & \frac{5}{2}\\ -3 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

و می‌دانیم اگر $T=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ باشد، آن‌گاه $Z_{in}=\frac{AZ_L+B}{CZ_L+D}$؛ پس اگر خازن 1F را Z_L در نظر بگیریم:

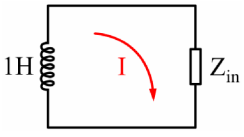
$$Z_{in}=\frac{\frac{5}{S}+\frac{5}{2}}{-\frac{3}{S}-\frac{3}{2}}=\frac{5S+10}{-3S-6}$$

آفرین! پس مدار به صورت زیر درمی‌آید:

$$KVL: SI+Z_{in}I=0 \quad\Rightarrow\quad S+Z_{in}=0$$

$$\Rightarrow\quad S+\frac{5S+10}{-3S-6}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-3S^2-S+10}{-3S-6}=0$$

$$\Rightarrow\quad -3S^2-S+10=0 \quad\Rightarrow\quad S=-2,+\frac{5}{3}$$



7. گزینه 2 درست است.

برای اینکه فرکانس‌های مورد نظر که فرکانس ورودی مدار هم هستند، در خروجی نباشند، این فرکانس‌ها باید صفرهای تابع انتقال این خروجی باشند. صفرهای این خروجی یکی فرکانس تشدید شاخه LC موازی است که آن را مدار باز

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

می‌کند و دیگری فرکانس تشدید شاخه LC سری است که آن را اتصال کوتاه می‌کند؛ پس:

$$1=\frac{1}{\sqrt{L_1\frac{1}{2}}} \quad \Rightarrow \quad L_1=2$$

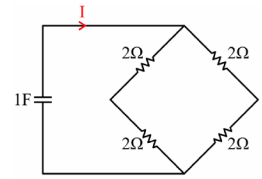
که در گزینه‌ها وجود ندارد، پس:

$$2=\frac{1}{\sqrt{L_1\frac{1}{2}}} \quad \Rightarrow \quad L_1=\frac{1}{2}$$

$$1=\frac{1}{\sqrt{2L_2}} \quad \Rightarrow \quad L_2=\frac{1}{2}$$

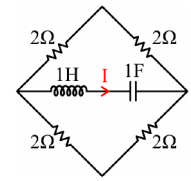
8. گزینه 4 درست است.

پل وتستون است؛ پس می‌توانیم برای جریان خازن، شاخهٔ وسطی را که LC سری است، حذف کنیم:



$$\left(\frac{1}{S}+R\right)I=0 \quad \Rightarrow \quad S=-\frac{1}{R}=-\frac{1}{2}$$

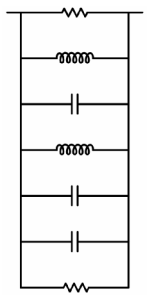
و این بار خروجی را جریان شاخه LC می‌گیریم و به دلیل وجود پل وتستون خازن 1F را حذف می‌کنیم و مطابق شکل یک RLC سری خواهیم داشت:

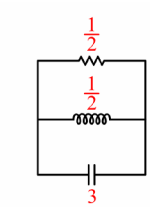


$$2\alpha=\frac{R}{L}=\frac{2}{1}=2 \qquad \omega_0^2=\frac{1}{LC}=\frac{1}{1}=1 \quad \Rightarrow \quad S^2+2\alpha S+\omega_0^2=0 \qquad S^2+2S+1=0 \qquad S=-1,-1$$

9. گزینه 1 درست است.

چون فرکانس‌های طبیعی غیر صفر شبکه خواسته شده است، می‌توانیم با خیال راحت منابع را صفر کنیم:





www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

و برای مدار RLC موازی داریم:

$$2\alpha=\frac{1}{RC}=\frac{2}{3} \qquad \omega_0^2=\frac{1}{LC}=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad S^2+2\alpha S+\omega_0^2=0 \qquad S^2+\frac{2}{3}S+\frac{2}{3}=0 \qquad S=-\frac{1}{3}\left(1\pm j\sqrt{5}\right)$$

که همان فرکانس‌های طبیعی مدار است.

البته نیازی نبود مقدار فرکانس‌ها را به دست بیاوریم؛ چون RLC موازی، یک مدار درجه دوم است و تنها گزینه 1 است که دو فرکانس طبیعی را نشان می‌دهد.

10. گزینه 3 درست است.

مدار، 4 سلف و خازن مستقل دارد و به دلیل وجود کات‌ست خازنی، یکی از آن‌ها صفر است.

ولی در فرکانس 0 ، خازن‌ها مدار باز هستند و I برابر صفر می‌شود؛ پس این فرکانس، صفرِ این متغیر است نه قطب آن. ازاین رو درنهایت 3 فرکانس داریم که هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نیست.

11. گزینه 1 درست است.

پاسخ ضربه به صورت نوسانی میراشونده است، بنابراین قطب‌های تابع شبکه به صورت $S=-\alpha\pm j\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$ هستند که $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$، فرکانس پاسخ ضربه است. بخش حقیقی منفی سبب میرایی و بخش موهومی نوسان را در پاسخ به وجود می‌آورند.

پس چون دوره تناوب ضربه 2π است، داریم:

$$\omega_d=\frac{2\pi}{T}=1$$

یعنی فاصله ریشه‌ها تا محور حقیقی برابر 1 است.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

α هم از پهنای باند 3dB به دست می‌آید:

$$\text{پهنای باند 3dB} = 2\alpha = 2.5 - 1.5 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.5$$

12.گزینه 4 درست است.

یکی از ماتریس‌ها و سپس دترمینانش را به دست می‌آوریم و برابر صفر قرار می‌دهیم. در معادلات مش با I_1 , I_2 ساعتگرد داریم:

$$\begin{bmatrix} R+\frac{1}{jC\omega} & -\frac{1}{jC\omega} \\ -\frac{1}{jC\omega} & \frac{1}{jC\omega}+\frac{1}{j\omega}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2V_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و $V_2 = I_2$ پس:

$$\begin{bmatrix} R+\frac{1}{jC\omega} & -\frac{1}{j\omega C}-2 \\ -\frac{1}{jC\omega} & \frac{1}{jC\omega}+\frac{1}{j\omega}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\omega=10} \Delta = \left(R+\frac{1}{j10C}\right)\left(\frac{1}{j10C}+\frac{1}{j10}+1\right) - \left(\frac{1}{j10C}+2\right)\left(\frac{1}{j10C}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta = \left[R - \frac{1}{100C}\right] - j\left[\frac{R}{10}+\frac{R}{10C}-\frac{1}{10C}\right] = 0$$

حالا قسمت موهومی و حقیقی را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} R - \frac{1}{100C} = 0 \\ R\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10C}\right) - \frac{1}{10C} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{99}{100}\Omega \,,\; C = \frac{1}{99}F$$

13. گزینه 4 درست است.

Z_{in} مدار را می‌توانیم به دست آوریم:

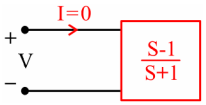
$$Z(S) = \frac{V(S)}{I(S)} = \frac{\frac{1}{S}}{\frac{2}{S} - \frac{3}{2}\frac{1}{S+\frac{1}{2}}} = \frac{2S+1}{S+2}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{in}(S) = \frac{2S+1}{S+2} - 1 = \frac{S-1}{S+2}$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

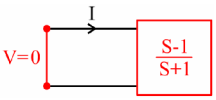
پس برای مدار باز داریم:



$$I=\frac{V}{Z}=V\frac{S+2}{S-1}=0$$
$$\Rightarrow\quad S+2=0\quad\Rightarrow\quad S=-2$$

که سمت چپ محور $j\omega$ است و پایدار است.

و برای اتصال کوتاه:



$$V=ZI=\frac{S-1}{S+2}I=0$$
$$\Rightarrow\quad S-1=0\quad\Rightarrow\quad S=1$$

که این فرکانس طبیعی سمت راست محور $j\omega$ است و ناپایدار است.

14. گزینه 2 درست است.

از پاسخ ضربه مشخص است که مدار دارای فرکانس‌های طبیعی -1 و -2 است و ریشه‌های $|SI-A|=0$ فرکانس‌های طبیعی را می‌دهد. گزینه‌های 1 و3 که واضح است اشتباه هستند؛ پس گزینه‌های 2 و4 را چک کنیم.

من گزینه 2 را چک می‌کنم:

$$|SI-A|=\begin{vmatrix}S & -1\\ 2 & S+3\end{vmatrix}=S^2+3S+2=0$$
$$(S+2)(S+1)=0\quad\Rightarrow\quad S=-1\,,\,-2$$

پس گزینه 2 درست است.

15. گزینه 2 درست است.

می‌توانیم از روی ماتریس امپدانس مش، شکل مدار را رسم کنیم و از روی آن، ماتریس ادمیتانس گره را بنویسیم.

بله و بسته به اینکه زمین را کجا در نظر می‌گیریم، ماتریس‌های مختلفی به دست می‌آوریم. البته یک راه دیگر هم وجود دارد؛ دترمینان ماتریس امپدانس مش و ماتریس ادمیتانس گره، هر دو معادله مشخصه مدار را می‌دهند؛ پس دترمینان این دو ماتریس باید با هم برابر باشد، بنابراین داریم:

$$|Z_m|=\begin{vmatrix}1+j & -1\\ -1 & 2-j\end{vmatrix}=2+j$$

و تنها دترمینان ماتریس گزینه 2 برابر این مقدار نیست.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

16. گزینه 2 درست است.

از فرمول $|SI-A|=0$ معادله مشخصه سیستم را به دست می‌آوریم:

$$|SI-A|=\begin{vmatrix} S & -1 \\ 1 & S+1 \end{vmatrix}=S^2+S+1=0 \quad \Rightarrow \quad S=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بخش حقیقی فرکانس طبیعی، پاسخ نمایی $e^{-\frac{1}{2}t}$ و بخش موهومی، پاسخ سینوسی با فرکانس $\frac{\sqrt{3}}{2}$ می‌دهد که این نوع پاسخ در گزینهٔ 2 دیده می‌شود.

17. گزینه 2 درست است.

منبع مستقل را صفر می‌کنیم و برای i_X یک معادله می‌نویسیم:

$$KVL:(0.5+0.5)SI_x+0.5I_x=\frac{\frac{1}{S}}{1+\frac{1}{S}}1.5I_x \quad \Rightarrow \quad \left(S+0.5-\frac{1.5}{S+1}\right)I_x=0$$

و این پرانتز فرکانس‌های طبیعی مربوط به I_x را می‌دهد:

$$S^2+1.5S-1=0 \quad \Rightarrow \quad S=\frac{-1.5\pm\sqrt{(1.5)^2+4}}{2}=\frac{-1.5\pm 2.5}{2}=-2\ ,\ 0.5$$

18. گزینه 3 درست است.

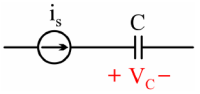
من که قاطی کردم. اولاً مگر فرق می‌کند متغیری که در نظر می‌گیریم ولتاژ باشد یا جریان؟ ثانیاً گزینه 3 و 4 که یکسان‌اند.

جواب اولاً را نمی‌دانم، ولی سؤال دومی که پرسیدید به دستور زبان فارسی مربوط می‌شود، نه مدار الکتریکی! گزینه 3 می‌گوید که ولتاژها و جریان‌های مستقل هر دو برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی مدار باید در نظر گرفته شوند، ولی گزینه 4 می‌گوید که گزینه 1 و 2 هر دو درست‌اند؛ یعنی می‌توانیم فقط جریان‌های مستقل یا فقط ولتاژهای مستقل را در نظر بگیریم. به هر حال من هم با اولاً شما موافقم و به نظرم جریان و ولتاژ تفاوتی ندارند؛ بنابراین گزینه‌های 1 و 2 درست نیستند. حالا دو گزینه دیگر باقی می‌ماند.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

حق دارید، انتخاب مشکل است. این سؤال به یکی از موارد استثنا در فرکانس‌های طبیعی اشاره دارد که البته قبلاً در حین درس هم به آن اشاره کرده بودم. حالا به این مثال ساده نگاه کنید:



$$\frac{V_C}{I_S}=\frac{1}{CS}$$

V_C دارای فرکانس طبیعی صفر است، ولی I_C این فرکانس را نداشت؛ بنابراین برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی صفر و درنتیجه کل فرکانس‌های طبیعی مدار، باید جریان‌ها و ولتاژهای مستقل مدار هر دو در نظر گرفته شوند.

19.گزینه 2 درست است.

چون منبع ولتاژ داریم، خیلی راحت با سه تا KCL در سه مدار می‌توانیم به سه فرکانس طبیعی برسیم:

$$V_x(2+2S)=E_S \quad\Rightarrow\quad \frac{V_x}{E_x}=\frac{1}{2(S+1)} \quad\Rightarrow\quad S=-1$$

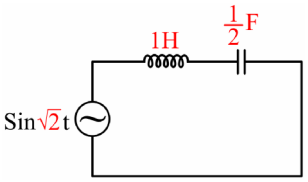
$$V_y(2+4S)=2V_x \quad\Rightarrow\quad \frac{V_y}{V_x}=\frac{1}{(1+2S)} \quad\Rightarrow\quad S=-\frac{1}{2}$$

$$V_o(2+6S)=2V_y \quad\Rightarrow\quad \frac{V_o}{V_y}=\frac{1}{(1+3S)} \quad\Rightarrow\quad S=-\frac{1}{3}$$

20. گزینه 3 درست است.

ضریب ماتریس I را می‌توانیم ماتریس Z در نظر بگیریم و $|Z|=0$ فرکانس‌های طبیعی سیستم را می‌دهد و $\omega=\sqrt{2}$ که در گزینه‌ها ذکر شده، در این معادله صدق می‌کند.

سؤال مفهومی و قشنگی است. بیایید در یک مدار ساده شرایط مشابهی را برقرار کنیم، مثلاً:



فرکانس طبیعی مدار $\omega=\sqrt{2}$ و فرکانس ورودی مدار هم $\omega=\sqrt{2}$ است. حالا ببینیم چه اتفاقی می‌افتد؟

$$V_L(S)=\frac{S}{S+\frac{2}{S}}\times\frac{\sqrt{2}}{S^2+2}=\frac{S^2\sqrt{2}}{\left(S^2+2\right)^2}$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

فهمیدم، عکس لاپلاس تابع با مخرج $\left(S^2+2\right)^2$ باعث می‌شود در حوزه زمان $t\cos\sqrt{2}\,t$ داشته باشیم که ناپایدار است.

پس گزینه 2 درست خواهد بود.

نشد دیگه، همین معادله‌ای که استاد نوشتند را نگاه کنید؛ اگر فرکانس ورودی غیر از $\sqrt{2}$ (مثلاً 2) باشد، در مخرج $V_L(S)$، $\left(S^2+2\right)$ و $\left(S^2+4\right)$ هر دو دیده می‌شوند؛ یعنی فرکانس طبیعی مدار و فرکانس ورودی، که باید مخالف آن باشد، هر دو در خروجی دیده می‌شوند.

21.گزینه 3 درست است.

مدار دارای فرکانس تشدید $\omega=2$ است؛ بنابراین اگر فرکانس ورودی مدار هم 2 باشد، پاسخ حالت دایمی سینوسی وجود نخواهد داشت و پاسخ ناپایدار خواهد شد. پس گزینه 2 نادرست است، ولی مدار با باقی فرکانس‌ها مشکلی ندارد؛ بنابراین گزینه 1 هم نادرست است.

موافقم، برویم سراغ گزینه 3. خب فرکانس ورودی مدار برابر یک است و این فرکانس صفر تابع تبدیل هم بوده است؛ پس مطمئناً در خروجی ظاهر نمی‌شود و فقط $\omega=2$ که فرکانس طبیعی مدار است در خروجی وجود خواهد داشت و گزینه 3 کاملاً درست است.

گزینه 4 هم مزاح کرده است! از یک طرف می‌گوید $\omega=1$ «صفر تابع تبدیل» است و از طرف دیگر می‌گوید $\omega=1$ در پاسخ وجود دارد.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

22.گزینه 2 درست است.

سؤال سختی نباید باشد. از قطب‌های توابع انتقال و فرم خروجی می‌توانیم فرکانس‌های طبیعی را به دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{lll} H_1(s) & \rightarrow & s=-1,-2 \\ H_2(s) & \rightarrow & s=-1,-1,-3 \\ V(t) & \rightarrow & s=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad s=-1,-1,-1,-2,-3,-\frac{1}{2}$$

پس گزینه 1 درست است.

به یک مطلب که صورت سؤال هم به آن اشاره کرده بود، دقت نکردید؛ فرکانس‌های طبیعی «معلوم» مدار کدام‌اند؟

یعنی مطمئن باشیم که جزء فرکانس‌های طبیعی است ولی شما از کجا مطمئن‌اید که $s=-1$ که در $H_1(s)$ وجود دارد، جدا از $s=-1,-1$ است که در $H_2(s)$ وجود دارد، شاید قطب موجود در $H_1(s)$ یکی از دو قطب مضاعف $H_2(s)$ باشد؛ پس با اطمینان گزینه 2 را انتخاب می‌کنیم و فرکانس ششم این مدار مرتبه 6 معلوم نیست.

23.گزینه 4 درست است.

به ازای $s=0$ که سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها مدار بازند، $V_1=V_2$ است و درنتیجه گزینه 3 یا 4 درست است که هر دو به ازای $s\rightarrow\infty$ برابر 1 هستند.

صورتشان هم یکی است، مگر مخرج را به دست آوریم. برای به دست آوردن معادله مشخصه که مخرج تابع تبدیل می‌شود، ورودی V_1 را می‌توانیم صفر کنیم و گره پایین را زمین بگیریم؛ در این صورت دو گره باقی می‌ماند که می‌توانیم ماتریس گره را بنویسیم و از مساوی صفر قرار دادن دترمینانش معادله مشخصه به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{1}{2}s+\frac{1}{2s}} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+1+\frac{1}{2s}+\frac{1}{2}s \end{vmatrix}=0$$

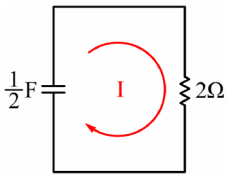
اگر ریشه مخرج گزینه 4 را که $s=-1$ است در ماتریس قرار دهیم، به‌راحتی مشخص است که دترمینانش صفر می‌شود؛ پس گزینه 4 درست است.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

24.گزینه 4 درست است.

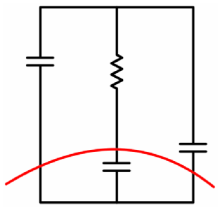
وقتی کلیدها بازند، بعد از سری و موازی کردن خازن‌ها داریم:



پس گزینه 1 غلط است. اینجا یک فرکانس طبیعی داریم که آن هم غیر صفر است.
حالا این فرکانس را به دست بیاوریم، شاید -1 شد و گزینه 2 درست بود.

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}s}+2\right)I=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{s}+2=0 \quad\Rightarrow\quad s=-1$$

پس گزینه 2 که درست است، برای بررسی گزینه 3 هم باید تعداد فرکانس‌های صفر در حالت بسته بودن کلیدها را به دست آوریم که پس از ساده کردن، یک کات‌ست خازنی داریم؛ پس یک فرکانس طبیعی صفر وجود دارد و گزینه 3 هم درست است.



بنابراین گزینه 4 درست خواهد بود.

www.Mohandesyar.com

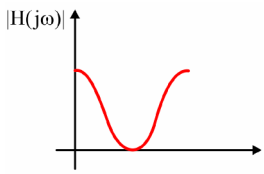
www.Mohandesyar.com

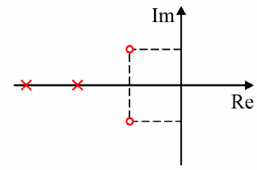
www.Mohandesyar.com

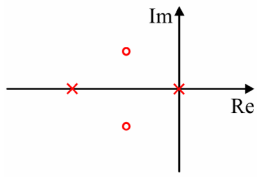
www.Mohandesyar.com

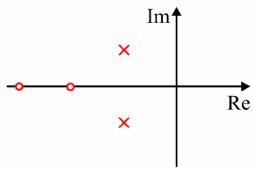
خودآزمایی فصل سوم

1. با توجه به $|H(j\omega)|$ زیر کدام‌یک از مکان‌های صفر و قطب می‌توانند مربوط به این سیستم باشند؟



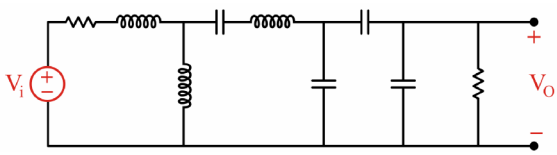
1) 

2) 

3) 

4) هیچکدام

2. در تابع تبدیل $\frac{V_o(S)}{V_i(S)}$ در مدار زیر حداکثر چند قطب وجود دارد؟

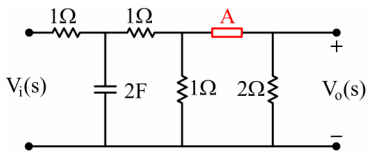


1) 4
2) 5
3) 7
4) 6

www.Mohandesyar.com

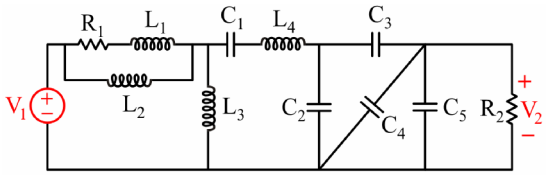
www.Mohandesyar.com

3. در صورتی‌که تابع تبدیل مدار داده شده، یک صفر مزدوج روی محور موهومی داشته باشد، در این صوت عنصر A:



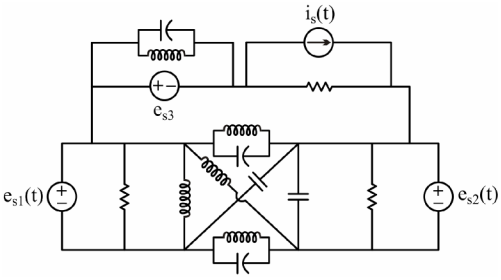
1) یک خازن است.
2) یک سلف است.
3) یک مقاومت است.
4) هر سه گزینه و هر ترکیبی از آن‌ها می‌تواند صحیح باشد. چرا که به مکان بقیه صفرها و قطبها اشاره نشده است.

4. در تابع تبدیل $\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ در مدار داده شده حداکثر چند قطب وجود دارد؟



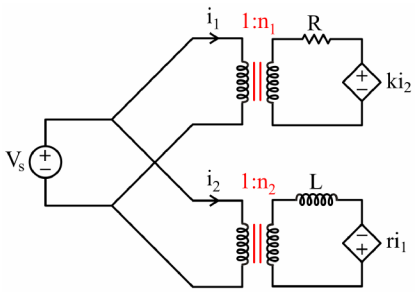
1) 5
2) 7
3) 9
4) 6

5. در مدار شکل زیر، تحت چه شرایطی فرکانس‌های طبیعی غیر صفر این مدار با $S=\frac{-1\pm j2}{2}$ برابر می‌شود؟
(تمامی L_i ها برابر با L و تمامی C_i ها برابر با **C** و تمامی R_i ها برابر با **R** می‌باشند)



1) $L=4\ ,\ R=\frac{5}{3}\ ,\ C=0.2$
2) $C=4\ ,\ L=0.2\ ,\ R=\frac{5}{3}$
3) $R=\frac{5}{3},\ C=5, L=0.25$
4) $R=\frac{5}{3}\ ,\ C=0.25\ ,\ L=5$

6. فرکانس طبیعی شبکه کدام است؟

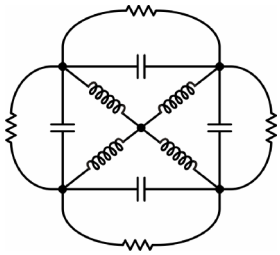


1) $\frac{-r\ Ln_1n_2}{kR}$
2) $\frac{-RLn_1n_2}{kr}$
3) $\frac{-krn_1}{RLn_2}$
4) $\frac{-krn_1n_2}{RL}$

www.Mohandesyar.com

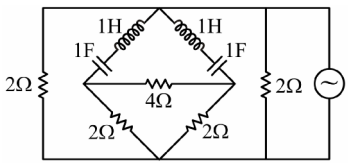
www.Mohandesyar.com

7. مدار داده شده را در نظر بگیرید. در این حالت فرکانسهای طبیعی غیر صفر مدار را A می‌نامیم. چنانچه تمام خازنها به سلف و تمام سلفها به خازن تبدیل شود، فرکانسها طبیعی غیر صفر مدار برابر با B در نظر گرفته می‌شود. حاصل $|A-B|$ کدام است؟



1) 0
2) 1
3) 2
4) 3

8. کدام گزینه فرکانس‌های طبیعی مدار داده شده را به درستی نشان می‌دهد؟



1) $s_{1,2}=-1,-1$
2) $s_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$
3) گزینه‌های 2 و 1
4) هیچ‌کدام

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com