www.Mohandesyar.com

فصل ۱ روش‌های منظم تحلیل مدار ـ روش فضای حالت

مقدمه

از امروز می‌رویم سراغ درس مدارهای الکتریکی۲ و با فهم کامل این درس، در مدارهای الکتریکی صاحب سبک می‌شویم و هر مداری که سر راهمان ببینیم، به سرعت تجزیه و تحلیل می‌کنیم؛ دیگر هیچ مداری از دست ما جان سالم به در نمی‌برد و این یعنی همان مرزهای دانایی و توانایی. . . .

در این فصل به بررسی روش‌های منظم تحلیل مدار می‌پردازیم. در اینجا دیگر خبری از KCL بازی و KVL بازی و...ها نیست.

هدف اصلی این روش‌ها در درس مدارهای الکتریکی۲، تحلیل الگوریتمیک و به عبارتی تحلیل کامپیوتری مدار است[1]، اما قسمتی از روابط به صورت ذهنی نیز قابل تعمیم است که به دقت به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

دقت کنید؛ می‌خواهیم با داشتن (۱) گراف مدار (۲) معادلات شاخه‌ها (۳) شرایط اولیه و بالاخره (۴) ورودی‌ها، مدار را تحلیل کنیم. برای این کار چهار روش وجود دارد که به بررسی آن‌ها می‌پردازیم:

۱ـ۱ روش منظم

ابتدا به بررسی روش منظم گره می‌پردازیم. یادتان باشد وقتی شخصیت کم‌هوشی مثل کامپیوتر!! می‌خواهد یک مدار را تحلیل کند، از همین روش کمک می‌گیرد. نرم‌افزار «اسپایس» را که می‌شناسید، کارش همین است. یک مثال ساده می‌زنم تا قدر خودتان را بیشتر بدانید. شما در کمتر از یک ثانیه به کمک چشم‌هایتان گراف مدار را می‌بینید، ولی کامپیوتر که چشم ندارد؛ پس باید به‌گونه‌ای گراف مدار را در قدم اول به آن معرفی کرد، به همین منظور ابتدا **ماتریس تلاقی** A را معرفی می‌کنیم؛ اگر n

---

۱ـ که بحث کامپیوتری آن از موضوع کنکور کارشناسی ارشد خارج است.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

تعداد گره‌های مستقل مدار (منهای گره زمین) و b تعداد شاخه‌های مدار باشد، ماتریس تلاقی مختصرشده A از مرتبه $n \times b$ خواهد بود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \text{شماره گره‌ها}\downarrow \overset{\text{شماره شاخه‌ها}\longrightarrow}{\begin{pmatrix} & a_{ij} & \end{pmatrix}_{n\times b}} \qquad (۱\text{ـ}۱)$$

تکرار می‌کنم: n ، تعداد گره‌های مستقل (یعنی تعداد کل گره‌ها منهای یک[۱]) و b ، تعداد کل شاخه‌های مدار است.

به طوری‌که:

اگر شاخه j ام به گره i ام وصل نباشد، $a_{ij} = 0$

اگر شاخه j ام به گره i ام وصل باشد و جریانش از گره خارج شود، $a_{ij} = +1$

اگر شاخه j ام به گره i ام وصل باشد و جریانش به گره وارد شود، $a_{ij} = -1$

در اینجا **معادلات اساسی ماتریسی** به صورت روابط زیر هستند:

$$A\,J = 0 \qquad (۲\text{ـ}۱)$$

این رابطه، همان KCL است.

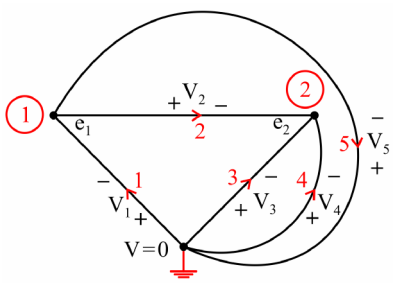
$$V = A' \times e \qquad (۳\text{ـ}۱)$$

و این یکی همان KVL است.

در این روابط، $J_{b\times 1}$ = بردار جریان شاخه‌ها، $V_{b\times 1}$ = بردار ولتاژ شاخه‌ها، $e_{n\times 1}$ = بردار ولتاژ گره‌ها و $A'_{b\times n}$ = ترانهاده ماتریس تلاقی هستند.

منظورتان این است که وقتی کامپیوتر می‌خواهد KCL و یا KVL بزند، هیچ‌یک از ابتکارهای **ما را نمی‌فهمد**؛ اما این شخصیت کم‌هوش! ضرب ماتریسی را خوب می‌فهمد! پس به‌جای KCL ، رابطه (۱ـ۲) و به‌جای KVL ، رابطه (۱ـ۳) را به کار می‌گیرد.

۱ـ در گراف شکل زیر ماتریس تلاقی A را معین کنید.



شکل (۱ـ۱) گراف تمرین ۱

۱ـ به دلیل گره مبنا یا زمین

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

با توجه به رابطه (۱ـ۱) و با در نظر گرفتن این نکته که این گراف دارای 2 گره مستقل و 5 شاخه است، داریم:

$$A = \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

یک نفر لطف کند و رابطه (۱ـ۲) را در اینجا چک کند.

چک کردن آن هم با خودم:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{pmatrix} = 0$$

و اگر مثلاً سطر اول را بسط دهیم:

$$-J_1 + J_2 + J_5 = 0$$

آفرین! این رابطه، همان KCL در گره ① است که برای گره ② هم قابل تعمیم است و به همین ترتیب برای رابطه (۱ـ۳)...

حالا که گرم شدم، ادامه می‌دهم:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

و باز به عنوان نمونه با بسط سطرهای اول و دوم داریم:

$$V_1 = -e_1$$
$$V_2 = e_1 - e_2$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

که باز به وضوح، بر KVL در گراف شکل (۱ـ۱)منطبق است. به هر حال رابطه نهایی در روش گره به این صورت است؛

البته بگذارید قبل از اینکه به سراغ رابطه نهایی برویم، بگویم که پس از یک سری محاسبات در روش منظم گره به رابطه‌ای می‌رسیم که از آن رابطه، ولتاژ گره‌ها به دست می‌آید. حالا به این رابطه خوب نگاه کنید:

$$Y_n \times e = I_s \qquad (۴ـ۱)$$

در این رابطه: Y_n = ماتریس ادمیتانس گره $(n \times n)$، e = بردار ولتاژ گره‌ها $(n \times 1)$ و I_s = بردار منابع جریان گره‌ها $(n \times 1)$ است.

در روش ذهنی یا دستی، وصول به درایه‌های Y_n و I_s کار ساده‌ای است؛ کاری که اگر کامپیوتر بخواهد انجام دهد، برایش بسیار دشوار است.

y_{ii} = عناصر قطری = مجموع ادمیتانس‌های وصل‌شده به گره i ام

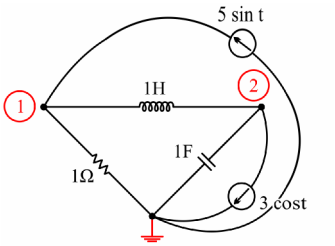
y_{ij} = عناصر غیر قطری = منفی مجموع ادمیتانس‌های مشترک بین دو گره i ام و j ام

و عنصر k ام از بردار منابع جریان گره‌ها، به صورت زیر به سادگی تعریف می‌شود:

I_{sk} = جمع جبری منبع جریان‌های **ورودی** به گره k ام

یعنی منبع جریان‌های ورودی با علامت مثبت و منابع جریان خروجی با علامت منفی منظور می‌شوند.

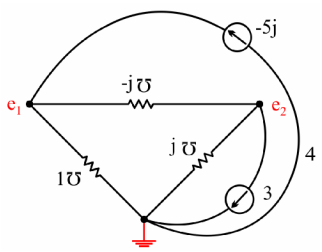
۲ـ معادلات ماتریسی گره را در مدار شکل زیر در حالت دایمی سینوسی بنویسید.



شکل (۱ـ۲) مدار تمرین ۲

خُب، مدار را با عینک نگاه می‌کنیم و مقادیر مقاومت‌ها را برحسب مهو ℧ می‌نویسیم، چون این‌طور که پیداست

در این روش به ادمیتانس‌ها علاقه‌مندتریم تا امپدانس؛ پس برو که رفتیم!



شکل (۱ـ۳) مدار تمرین ۲ با عینک

حال با توجه به رابطه (۱ـ۴) و توضیحات آن:

$$\begin{pmatrix} 1-j & j \\ j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5j \\ -3 \end{pmatrix}$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

که حل آن هم مثل نوشیدن آب (از نوع گوارا) است. مثلاً:

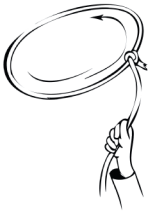
$$je_1+0e_2=-3 \quad\Rightarrow\quad e_1=3j \quad\Rightarrow\quad e_1=3\cos\left(t+90^\circ\right)=-3\sin t$$

و یا:

$$(1-j)\times 3j+je_2=-5j$$
$$3j+3+je_2=-5j \quad\Rightarrow\quad e_2=-8+3j$$
$$e_2=\sqrt{73}\cos\left(t+\pi-\tan^{-1}\frac{3}{8}\right)$$

قبول دارید که خیلی جالب و البته ساده است؟

راستی قبل از آنکه سراغ روش بعدی برویم، باید عرض کنم که در این روش هرگاه منبع ولتاژی موجود بود، آن را به منبع جریان تبدیل می‌کنیم. (مدار معادل نورتن)؛ چراکه در این روش اصلاً منبع ولتاژ معنی ندارد.
حالا به کمک شما روش دوم را که دوگان روش اول است، به سرعت مرور می‌کنیم.



۱ـ۲ روش منظم

مشابه روش قبل که ماتریس تلاقی A داشتیم، اینجا ماتریس مش M داریم. اگر گفتید چطور[۱] ؟

حتماً این‌جوری دیگر: در اینجا ماتریس مش از مرتبه $\ell\times b$ است، به طوری‌که:

$$M=\ \text{شماره مش‌ها}\ \downarrow\ \overset{\text{شماره شاخه‌ها}\ \longrightarrow}{\begin{pmatrix} & m_{ij} & \end{pmatrix}_{\ell\times b}} \qquad (۵ـ۱)$$

۱ـ قبل از شنیدن (و یا خواندنِ !) پاسخ دوستتان، شما هم حتماً یک‌بار به طور کامل جواب بدهید.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

که ℓ تعداد مش‌های مستقل و b باز هم تعداد شاخه‌هاست، به طوری‌که:

اگر شاخه j ام اصلاً در مش i ام نباشد، $m_{ij} = 0$

اگر شاخه j ام در مش i ام بوده و با آن هم‌جهت باشد، $m_{ij} = +1$

اگر شاخه j ام در مش i ام بوده ولی خلاف جهت آن باشد، $m_{ij} = -1$

معادلات اساسی ماتریسی در اینجا بدین گونه است:

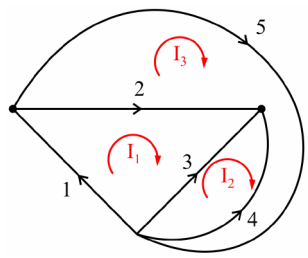
$$M V = 0 \qquad (۶\text{ـ}۱)$$

که این رابطه همان KVL است. و این یکی نقش KCL را بازی می‌کند:

$$J = M' \times I \qquad (۷\text{ـ}۱)$$

که $M'_{b\times\ell}$ = ترانهاده ماتریس مش و I = بردار جریان مش‌هاست؛ پس I از مرتبه $\ell\times 1$ است.

۳ـ برای گراف شکل (۱ـ۱)، ماتریس اساسی مش M را بنویسید.



شکل (۱ـ۴) گراف تمرین ۳

این ماتریس 5 * 3 است و به راحتی مشخص می‌شود:

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

و اگر باز معادلات (۱ـ۶) و (۱ـ۷) را بنویسیم، به راحتی KVL و KCL مشاهده می‌شود.[۱]

ادامه می‌دهم؛ در این روش رابطه نهایی این‌گونه است:

$$Z_m \times I = E_s \qquad (۸\text{ـ}۱)$$

که در آن:

Z_m = ماتریس امپدانس مش $(\ell\times\ell)$، I = بردار جریان مش‌ها $(\ell\times 1)$ و E_S = بردار منابع ولتاژ مش‌ها $(\ell\times 1)$ است.

حدس شما به کمک دوگانی از مقادیر آن‌ها به روش دستی یا ذهنی چیست؟

z_{ii} = عناصر قطری = مجموع امپدانس‌های موجود در مش i ام

z_{ij} = عناصر غیر قطری = منفی مجموع امپدانس‌های مشترک بین دو مش i ام و j ام

و E_{sk} = جمع جبری منابع ولتاژ موجود در مش i ام.

جمع جبری به این صورت که:

اگر جریان مش از سر منفی ولتاژ وارد شد، آن را با علامت مثبت و اگر از سر مثبت منبع ولتاژ وارد شد، با علامت منفی منظور می‌کنیم.

۱ـ به دلیل سادگی بیش از حد، از این کار پرهیز می‌کنیم.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

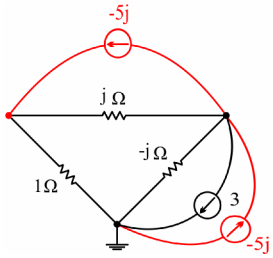
آفرین، عالی است! راستی در مورد حرف آخرتان؛ آیا خودتان دقت داشتید که علامت منبع ولتاژ دقیقاً قرینه آن چیزی است که در ابتدای درس در روش مش گفتیم؟

بله دیگر، علتش هم واضح است؛ چون این عبارات به طرف دیگر تساوی (=) رفته‌اند، پس علامتشان قرینه می‌شود.

باز هم آفرین! ضمناً در اینجا هر منبع جریانی را به منبع ولتاژ می‌تبدیلیم!

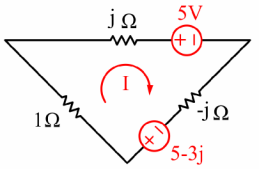
۴ـ برای مدار شکل (۱ـ۲) روابط ماتریسی مش را بنویسید.

باید منابع جریان را به منابع ولتاژ تبدیل کنیم:



شکل (۱ـ۵) مدار حل تمرین ۴

و باز به صورت ساده‌تر:



شکل (۱ـ۶) مرحله بعدی حل تمرین ۴

با یک KVL ساده داریم:

$$\left(1+\cancel{j}-\cancel{j}\right)I=\cancel{5}-3j-\cancel{5}$$

$$I=-3j \quad \Rightarrow \quad i(t)=3\sin t$$

آفرین! از همبستگی روابط گره و مش لذت ببرید:

$$e_1=-1\times I=-3\sin t$$

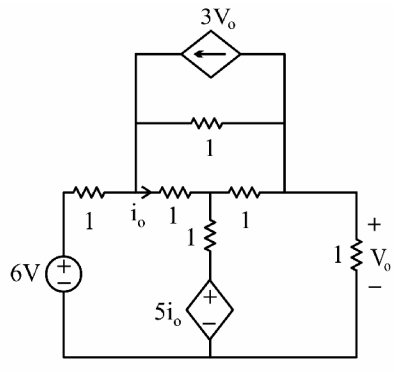
www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

حالا اگر مدارمان منابع وابسته داشت چه کنیم؟

باز هم یک سؤال اساسی پرسیدی؛ همین درست است دیگر... و من به خاطر سؤالِ مناسب شما، یک جواب خیلی روان و خوب می‌دهم: ببینید اگر منبع وابسته داشتید، ابتدا هایتان آستیگمات شود؛ یعنی را ببینید و معادلات را عین قبل بنویسید، سپس متغیرهای منبع وابسته را برحسب ولتاژ گره‌ها یا جریان مش‌ها بنویسید و در آخر مقادیر مربوط را به سمت چپ ببرید. (یادتان باشد که فقط مربوط به همان سطر متناظرش است؛ فقط با تغییر علامت.) لطفاً این حرف‌های آخر را یک‌بار دیگر بجوید؛ هضمش راحت‌تر می‌شود!

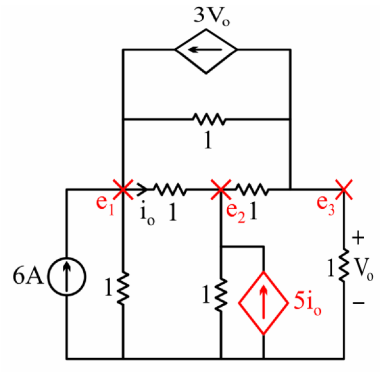
۵ـ برای مدار شکل زیر معادلات منظم مش و گره را بنویسید.



شکل (۱ـ۷) مدار تمرین ۵

ابتدا روش گره:

در این روش از منبع ولتاژ خوشمان نمی‌آید، پس آن را به منبع جریان تبدیل می‌کنیم:



شکل (۱ـ۸) مدار تمرین ۵ برای روش گره

ازطرفی حالا می‌دانیم:

$$V_0 = e_3$$
$$i_0 = e_1 - e_2$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

و به کمک داستان‌های روش ذهنی:

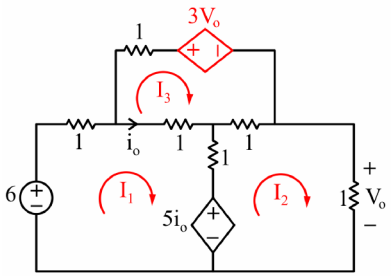
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3V_0 \\ 5i_0 \\ -3V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3e_3 \\ 5e_1-5e_2 \\ -3e_3 \end{pmatrix}$$

و پس از ساده کردن، یعنی بردن بعضی چیزها! (e_i ها) از راست به چپ، چنین به دست می‌آوریم:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -6 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

اکنون روش مش:

و برای روش مش، منابع را به صورت منبع ولتاژ قرار می‌دهیم:



شکل (۱ـ۹) مدار تمرین ۵ برای روش مش

و می‌دانیم:

$$V_0 = i_2$$
$$i_0 = i_1 - i_3$$

و با روش ذهنی مش:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5(i_1-i_3) \\ 5(i_1-i_3) \\ -3i_2 \end{pmatrix}$$

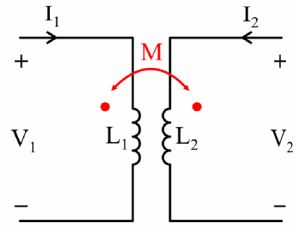
$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -6 \\ -6 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حالا اگر مدار شامل سلف‌های تزویج‌دار بود، چه باید بکنیم؟

www.Mohandesyar.com

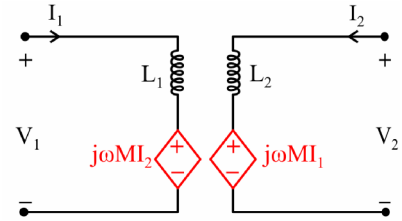
www.Mohandesyar.com

به نظرم در قدم اول باید مدار معادل‌های سلف تزویج را به دست آوریم و سپس همان حرف‌های قبلی در مورد منابع وابسته و...

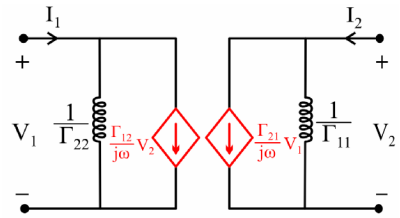


شکل (۱ـ۱۰) سلف‌های دارای تزویج

و حالا مدار معادل‌های آن را به دست می‌آوریم؛ یعنی هرجا خواستیم مسئله‌ای را از روش منظم تحلیل کنیم و در آن مدار، سلف‌ها دارای تزویج بود، بسته به نوع روش از مدل‌های زیر کمک می‌گیریم:



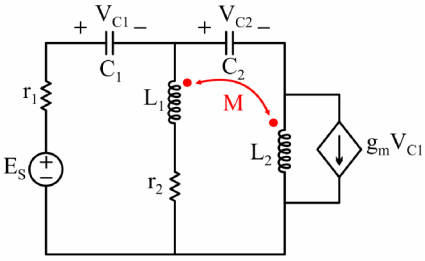
شکل (۱ـ۱۱) مدار معادل سلف‌های تزویج مفید در روش مش



شکل (۱ـ۱۲) مدار معادل سلف‌های تزویج مفید در روش گره

آفرین ! ضمناً به خاطر داشته باشید که به طور کلی منابع وابسته، تقارن ماتریس Y و Z را به هم می‌زنند ولی سلف‌های تزویج نه. در فصل آخر، داستان مفصلّی در این باب خواهیم داشت؛ نام آن داستان، قضیه «هم‌پاسخی» است که به موقع سراغش می‌رویم و... .

۶ـ معادلات ماتریسی مش را بنویسید.

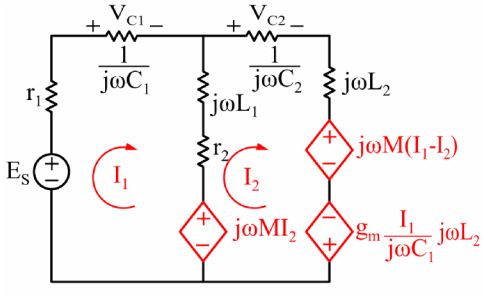


شکل (۱ـ۱۳) مدار تمرین ۶

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

اجازه بدهید خود من با روشی که عرض کردم، توضیح بدهم:



شکل (۱ـ۱۴) مدار حل تمرین ۶

یعنی به کمک روش منظم، مش معادلات ماتریس 2×2 را می‌نویسیم:

$$\begin{pmatrix} r_1+r_2+j\omega L_1+\frac{1}{j\omega c_1} & -r_2-j\omega L_1 \\ -r_2-j\omega L_1 & j\omega\left(L_1+L_2\right)+r_2+\frac{1}{j\omega c_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_s-\cancel{j\omega MI_2}^{\,0} \\ 2\,\cancel{j\omega MI_2}^{\,0}-\cancel{j\omega MI_1}^{\,0}+\frac{\cancel{g_mL_2}^{\,0}}{c_1}\,I_1 \end{pmatrix}$$

و به عبارتی پس از انتقال جملاتِ دارای I_1 و I_2 به سطرهای متناظر سمت راست، چنین به دست می‌آید:

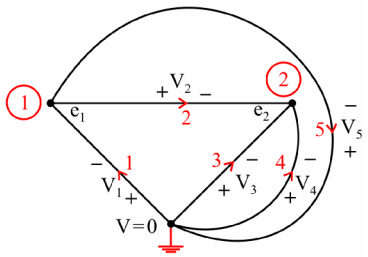
$$\begin{pmatrix} r_1+r_2+j\omega L_1+\frac{1}{j\omega c_1} & -r_2-j\omega L_1+j\omega M \\ -r_2-j\omega L_1+j\omega M-\frac{g_mL_2}{c_1} & j\omega\left(L_1+L_2\right)+r_2+\frac{1}{j\omega c_2}-2j\omega M \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

۱ـ۳ درخت ـ کات‌ست ـ حلقه

حال کمی به درس گسسته مراجعه می‌کنیم؛ در این بخش بیشتر با قیافه مدار (یا همان گراف) کار داریم.

به عنوان شروع، در مورد یک گراف، مثلاً شکل (۱ـ۱) کمی گپ می‌زنیم.

۷ـ این گراف دارای چندگره مستقل، چند مش، چند حلقه، چند کات‌ست و چند شاخه است؟



شکل (۱ـ۱۵) گراف تمرین ۷

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

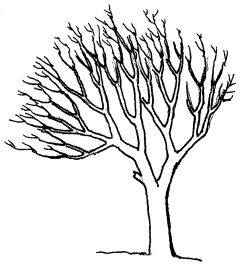
معلوم است دیگر؛ از شکل پیداست که 5 شاخه $(b=5)$، دو گره مستقل $(n=2)$ و سه مش $(\ell=3)$ دارد. تعداد کات‌ست‌های مستقل و حلقه‌های مستقل را نمی‌دانم، ولی جالب شد که:

$$b=\ell+n \qquad (۹_۱)$$

آیا همیشه همین‌طور است یا اینجا این‌طوری شد؟

سؤال خوبی پرسیدی! جالب است بدانی که همیشه همین‌طور است. جمع تعداد گره‌های مستقل و تعداد مش‌ها برابر تعداد شاخه‌هاست و مجموع تعداد کات‌ست‌های مستقل و حلقه‌های مستقل هم برابر تعداد شاخه‌هاست. اصلاً تعداد کات‌ست‌های اساسی، برابر است با تعداد گره‌های مستقل (n) و تعداد حلقه‌های اساسی، برابر است با تعداد مش‌ها (ℓ). لطفاً یک کاغذ پیش‌نویس بردارید، چند گراف بکشید و این قضیه را در مورد آن گراف‌ها چک کنید و لذت ببرید!

۱ـ۳ـ۱ درخت



ببینید؛ هر گرافی تعداد زیادی زیرگراف دارد. از بین این زیرگراف‌ها، زیرگرافی را که دارای سه شرط زیر باشد، می‌توانیم یک درخت در نظر بگیریم:

شاخه‌هایش به هم متصل باشد.

تمام گره‌های گراف اصلی را در بر بگیرد.

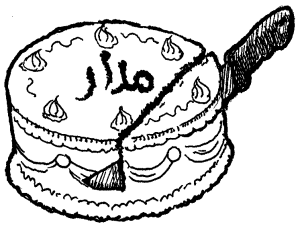
هیچ حلقه‌ای نداشته باشد. (به عبارت دیگر به هر گره‌ای فقط یک‌بار سر بزند.)

جالب شد، پس واضح است که تعداد شاخه درخت‌ها در هر گراف، برابر است با تعداد گره‌های مستقل یا n و تعداد لینک‌ها (یعنی شاخه‌هایی از مدار که شاخه درخت نیستند)، برابر است با تعداد مش‌ها یا ℓ. راستی درست گفتم دیگر؟ به شاخه‌های یک گراف که در درخت باشند، «شاخه درخت» می‌گوییم و به آن‌هایی که در درخت نباشند، «لینک» می‌گوییم.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۱ـ۳ـ۲ کات‌ست و حلقه



هر برش از مدار را کات‌ست می‌گویند که معنایش از اسمش هم پیداست. در کات‌ست‌ها ما مجاز به KCL هستیم و حلقه، هر مسیر بسته در مدار است که در آن علاقه‌مند به KVL باشیم.

لطفاً ببینید من درست می‌گویم؟ مثلاً در گراف شکل (۱ـ۱۵)، ۱۳۴۵ یک کات‌ست و ۱۲۴ یک حلقه است.

آفرین! البته چیز ساده‌ای است دیگر. حالا این دو جمله را خوب گوش کنید؛ می‌خواهیم حلقه اساسی و کات‌ست اساسی را تعریف کنیم؛ می‌دانیم هر گرافی، تعداد زیادی کات‌ست و حلقه دارد؛ اما همه آن‌ها که اساسی نیستند. به عبارت باکلاس علمی! KCL در n کات‌ست اساسی، n معادله مستقل به ما می‌دهد که از حل آن‌ها، n ولتاژ مستقل کات‌ست‌ها معلوم می‌شود و به همین ترتیب KVL در ℓ حلقه اساسی، ℓ معادله مستقل به ما می‌دهد که از حل آن‌ها، ℓ جریان مستقل حلقه‌ها به دست می‌آید.

لطفاً زیر لب با من تکرار کنید:

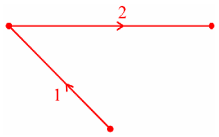
هر **یک لینک**، به همراه تعدادی شاخه درخت، تشکیل یک حلقه اساسی می‌دهد و جهت هر **حلقه اساسی**، همان جهت لینک متناظرش است.

هر **یک شاخه درخت**، به همراه تعدادی لینک، یک **کات‌ست اساسی** می‌سازد و جهت هر **کات‌ست اساسی**، همان جهت شاخه درخت متناظرش است.

راستی **یک لِم ساده:** برای یافتن کات‌ست اساسی (که گاهی مواقع کمی سخت است)، آن شاخه درخت مورد نظر را پاک می‌کنیم (در ذهنمان) و سپس تمام لینک‌هایی را که دو قسمت جداشده درخت را به هم وصل می‌کنند، لحاظ می‌کنیم.

۸ـ برای گراف شکل (۱ـ۱۵)، درخت بکشید و آن‌گاه کات‌ست‌های اساسی و حلقه‌های اساسی را مشخص کنید.

من می‌گویم؛ درخت به صورت شکل (۱ـ۱۶) می‌شود:

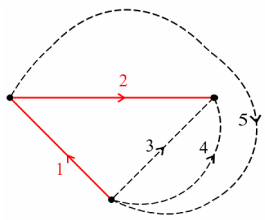


شکل (۱ـ۱۶) درخت متناظر با گراف تمرین ۸

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

پس اگر لینک‌ها را هم با نقطه‌چین نشان دهیم، این‌گونه می‌شود:



شکل (۱ـ۱۷) گراف تمرین ۸

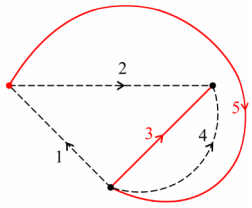
و حالا ۲ کات‌ست اساسی داریم و ۳ حلقه اساسی (که جمعشان می‌شود ۵ ؛ یعنی تعداد شاخه‌ها). این هم از چیزهای اساسی:

حلقه‌های اساسی: ۱۵ و ۱۲۳ و ۱۲۴

کات‌ست‌های اساسی: ۱۳۴۵ و ۲۳۴

پس این مسئله هم تمام شد.

نه، اشتباه نکنید، بیایید من هم یک‌بار جواب می‌دهم؛ درخت که یکتا نیست، به درخت جدید من و درنتیجه لینک‌ها و حلقه‌های اساسی و کات‌ست‌های اساسی نگاه کنید:



شکل (۱ـ۱۸) نگاهی دیگر به گراف تمرین ۸

حلقه‌های اساسی: ۱۵ و ۲۳۵ و ۴۳

کات‌ست‌های اساسی: ۱۲۵ و ۲۳۴

باز هم درست است. باید بدانید برای هر گراف با ماتریس تلاقی A که قبلاً حرفش را زدیم، به اندازه $\det(AA')$ درخت مستقل داریم که اثبات این قضیه، خود داستانی مفصّل در درس گسسته است و از حوصله بحث ما خارج است.

۱ـ۴ روش منظم کات‌ست

درحقیقت روش منظم کات‌ست، یه‌جورایی تعمیم روش منظم گره است؛ پس پُرحرفی نکنیم و قدم به قدم همان مراحل را تکرار کنیم:

ابتدا معرفی ماتریس کات‌ست اساسی Q :

$$Q = \begin{array}{c} \text{شماره} \\ \text{کات‌ست‌های اساسی} \end{array} \downarrow \overset{\text{شماره شاخه‌ها}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} & q_{ij} & \end{pmatrix}_{n\times b} \qquad (۱ـ۱۰)$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

n تعداد کات‌ست‌های اساسی و b تعداد شاخه‌هاست؛ به طوری‌که:

اگر شاخه j ام در کات‌ست i ام نباشد، $q_{ij}=0$

اگر شاخه j ام در کات‌ست i ام بوده و با آن هم‌جهت باشد، $q_{ij}=+1$

اگر شاخه j ام در کات‌ست i ام بوده و خلاف جهت آن باشد، $q_{ij}=-1$

و حالا معادلات اساسی:

$$QJ=0 \qquad (۱۱\text{ـ}۱)$$

این رابطه همان KCL است.

$$V=Q'\times E \qquad (۱۲\text{ـ}۱)$$

و این یکی همان KVL است.

که در آن E بردار ولتاژ کات‌ست‌هاست و بقیه عین قبل است.

شکل نهایی معادلات به صورت زیر است:

$$Y_q\times E=I_s \qquad (۱۳\text{ـ}۱)$$

Y_q = ماتریس ادمیتانس کات‌ست $(n\times n)$، E = بردار ولتاژ کات‌ست‌ها $(n\times 1)$ و I_S = بردار منابع جریان کات‌ست‌ها $(n\times 1)$ است.

باز هم در روش ذهنی یا دستی، رسیدن به Y_q و I_S ساده است. به این جملات خوب کنید:

y_{ii} = عناصر قطری = مجموع ادمیتانس‌های موجود در کات‌ست i ام

y_{ij} = عناصر غیر قطری = جمع جبری ادمیتانس‌های مشترک بین کات‌ست‌های i ام و j ام

جمع جبری یعنی چه؟

یعنی اگر در آن شاخه، جهت کات‌ست‌ها یکسان بود، آن ادمیتانس با علامت مثبت و اگر جهت کات‌ست‌ها متفاوت بود، آن ادمیتانس با علامت منفی منظور می‌شود.

و بالاخره عنصر k ام از بردار منابع جریان کات‌ست به صورت زیر تعریف می‌شود:

I_{sk} = جمع جبری جریان‌های عبوری از کات‌ست k ام

لطفاً نپرسید جبری یعنی چه ! خودم می‌گویم:

اگر جهت منبع جریان خلاف جهت کات‌ست بود، با علامت مثبت و اگر هم‌جهت با کات‌ست بود، با علامت منفی منظور می‌شود.

۹ـ یکی از دوستان با درخت خودش! ماتریس Q گراف شکل (۱ـ۱) را مشخص کند.

شکل (۱ـ۱۷) نگاه کنید، چنین داریم:

$$Q=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{pmatrix}1&0&1&1&-1\\0&1&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

و بالاخره روش آخر:

۱ـ۵ روش منظم حلقه

این روش نیز تعمیمی برای روش مش است. در روش مش تأکید داشتیم که نباید هیچ شاخه‌ای درون یک مش باشد، ولی در مورد حلقه اصلاً چنین شرطی نیست؛ یعنی یک مورچه را در یک نقطه از مدار بگذارید و به او بگویید که هر جایی که دوست داری برو و برگرد به همین نقطه اول؛ اسم جای پای آن مورچه، یک حلقه است. برویم سراغ کارمان:

اول معرفی ماتریس حلقه اساسی B :

$$B = \begin{array}{c} \text{شماره} \\ \text{حلقه‌های اساسی} \end{array} \downarrow \overset{\text{شماره شاخه‌ها}}{\overrightarrow{\quad\quad\quad}} \begin{pmatrix} & & \\ & b_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}_{\ell\times b} \qquad (۱۴ـ۱)$$

که ℓ تعداد حلقه‌های اساسی و b تعداد شاخه‌هاست.

به طوری‌که:

اگر شاخه j ام در حلقه i ام نباشد، $b_{ij}=0$

اگر شاخه j ام در حلقه i ام بوده و با آن هم‌جهت باشد، $b_{ij}=+1$

اگر شاخه j ام در حلقه i ام بوده و خلاف جهت آن باشد، $b_{ij}=-1$

و معادلات اساسی:

$$\begin{cases} B.V=0 & (۱۵ـ۱) \\ J=B'\times I & (۱۶ـ۱) \end{cases}$$

که این روابط هم، همان KVL و KCL هستند.

همه فاکتورها مانند روابط قبلی است، فقط I بردار جریان حلقه‌های اساسی است. شکل نهایی معادلات به این فرم درمی‌آید:

$$Z_\ell \times I = E_s \qquad (۱۷ـ۱)$$

که Z_ℓ= ماتریس امپدانس حلقه $(\ell\times\ell)$، I= بردار جریان حلقه‌ها $(\ell\times 1)$ و E_s = بردار منابع ولتاژ حلقه‌ها $(\ell\times 1)$ است.

و به روش ذهنی یا دستی این درایه‌ها چنین‌اند:

Z_{ii} = عناصر قطری = مجموع امپدانس‌های موجود در حلقه i ام

Z_{ij} = عناصر غیر قطری = جمع جبری امپدانس‌های مشترک میان حلقه‌های i ام و j ام

این بار به‌جای سؤال، خودم می‌گویم:

جمع جبری یعنی اگر در آن شاخه، جهت هر دو حلقه همسایه یکسان بود، آن امپدانس با علامت مثبت و اگر نه، با علامت منفی لحاظ می‌شود.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

و بالاخره E_{sk} یعنی عنصر k ام از بردار منابع ولتاژ حلقه اساسی؛ به طوری‌که:

E_{sk} = جمع جبری منابع ولتاژ موجود در حلقه اساسی i ام

و تا شما سؤال نکرده‌اید یا جواب نداده‌اید (که البته هر دو کار بسیار خوبی هم هست!) بگویم در اینجا علامت عیناً مشابه علامت E_{sk} در روش مش است.

۱۰ـ همان صورت تمرین ۹ ولی برای ماتریس B :

به شکل (۱ـ۱۸) نگاه کنید و مثل آب خوردن بنویسید:

$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

۱۱ـ و حالا به عنوان آخرین تمرین از این بخش برای مدار شکل (۱ـ۲) و درخت شکل (۱ـ۱۸)، معادلات منظم کات‌ست را بنویسید.

به شکل (۱ـ۳) و (۱ـ۱۸) که نگاه کنیم، داریم:

$$Y_q \times E = I_S$$

$$\begin{pmatrix} 1-j & +j \\ +j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5j \\ -3 \end{pmatrix}$$

از بحث روش‌های منظم تجزیه و تحلیل مدار تا همین‌جا کافی است. سؤالاتی هم که از این بخش در کنکور کارشناسی ارشد می‌آید، سؤالاتی بسیار روان است که شما با دو سه مرتبه خواندن این بخش از کتابی که هم‌اکنون پیش روی شماست، به راحتی از عهده آن بر خواهید آمد.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۱ـ۶ روش فضای حالت

توصیه می‌کنم این مبحث را خیلی عمیق بخوانید؛ چون بحث بسیار عمیق و قشنگی است. . . .

یکی از مفیدترین و مرسوم‌ترین روش‌های تحلیل سیستم‌ها، مخصوصاً سیستم‌های غیر خطی، روش فضای حالت است که در دروس تخصصی کنترل کاملاً مورد بررسی قرار می‌گیرد. ما در اینجا، کلیاتی از این بحث را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

هدف: نوشتن معادلات مدار به صورت زیر است:

$$\dot{X} = AX + BW \qquad (۱ـ۱۸)$$

آیا اجزای این رابطه را خوب می‌شناسید؟

X ، همان بردار حالت است که شامل عناصر مستقل ذخیره‌کننده انرژی می‌شود، مثلاً:

$$X = \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix} \qquad (۱ـ۱۹)$$

پس طبیعتاً $\dot{X}$ هم مشتق زمانی این بردار است؛ یعنی:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dfrac{dV_C}{dt} \\ \dfrac{dI_L}{dt} \end{bmatrix} \qquad (۱ـ۲۰)$$

A را ماتریس ضرایب حالت می‌گوییم، W بردار منابع (شامل ورودی‌ها) بوده و B را ماتریس ضرایب ورودی‌ها می‌نامیم.

آفرین! و در حالت ورودی صفر معادلات حالت به صورت رابطه زیر می‌شود:

$$\dot{X} = AX \qquad (۱ـ۲۱)$$

که پاسخ آن این‌گونه می‌شود:

$$X(t) = e^{At} \times X_0 \qquad (۱ـ۲۲)$$

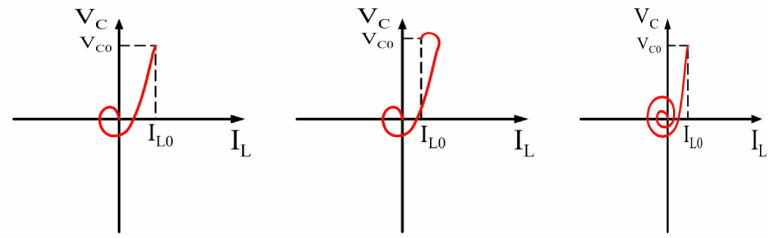
در رابطه اخیر، X_0 بردار حالت **اولیه** است و e^{At} را **ماتریس** انتقال حالت می‌نامیم.

خیلی جالب است ها! یعنی با داشتن ماتریس ضرایب حالت A و درنتیجه معلوم بودن ماتریس انتقال حالت e^{At}، می‌توانیم از هر حالت اولیه‌ای « X_0 »، به بردار حالت در زمان t برسیم؛ یعنی پاسخ مدار معلوم می‌شود.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

بله؛ بسیار زیباست. اصولاً روش فضای حالت، بسیار کارآمد است، مثلاً به نمودارهای شکل (۱ ـ۱۹) توجه کنید:

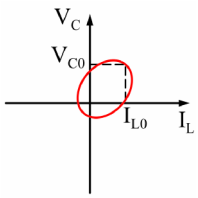


شکل (۱ـ۱۹) نمودار فضای حالت در حالات مختلف

به نظر شما هر کدام بیانگر چه حالتی است؟

معلوم است دیگر؛ شکل (الف) حالت میرای شدید $\left(Q<\frac{1}{2}\right)$، شکل (ب) حالت میرای بحرانی $\left(Q=\frac{1}{2}\right)$ و شکل (ج) حالت میرای نوسانی $\left(Q>\frac{1}{2}\right)$.

و البته در حالت بدون تلف یا نوسانی $(Q\to\infty)$، به صورت شکل (۱ـ۲۰) درمی‌آید:



شکل (۱ـ۲۰) فضای حالت در مدار نوسانی

راستی می‌دانید به منحنی‌های شکل‌های (۱ـ۱۹) و (۱ـ۲۰) چه می‌گویند؟

از سکوت شما پیداست که نمی‌دانید! بنده عرض می‌کنم؛ به آن‌ها **«مسیر حالت»** می‌گویند. مسیر حالت، بیانگر رابطه‌ای بین متغیرهای حالت (I_L, V_C) است به قسمی که در آن رابطه خبری از زمان t نباشد. برای رسیدن به مسیر حالت بین V_C و I_L رابطه‌ای باید پیدا شود؛ مثلاً اگر چنین داشته باشیم:

$$V_C = 5\cos 2t \quad , \quad I_L = 3\sin 2t - 1$$

آن‌گاه معادله مسیر حالت این‌گونه می‌شود:

$$\left(\frac{V_C}{5}\right)^2 + \left(\frac{I_L+1}{3}\right)^2 = 1$$

که نشان‌دهنده یک مسیر بیضوی است. در آخر فصل تمریناتی از این جنس حل خواهیم کرد.

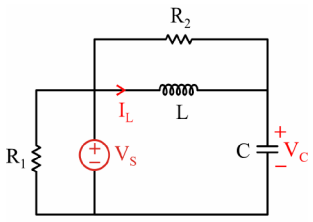
www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

حالا برویم سراغ اصل مطلب؛ در این روش هدف رسیدن به معادلات به فرم (۱ـ۱۸) است؛ برای این کار چه خوب است که با KCL و KVL به معادلاتی برسیم که در آن‌ها فقط مشتق اول یکی از متغیرهای حالت است و حضور یا عدم حضور سایر متغیرهای حالت یا ورودی‌ها اهمیتی ندارد. به این عبارت **کلیدی** توجه کنید:

برای این منظور، خوب است که برای سلف‌ها در مش‌ها یا حلقه‌ها، KVL بزنیم تا i_L ظاهر شود و برای **خازن‌ها** در گره‌ها یا کات‌ست‌ها KCL بزنیم تا سروکله $\dot{V}_C$ پیدا شود.

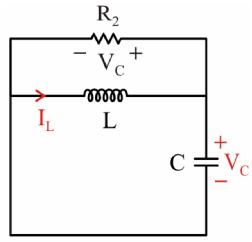
و البته در مدارهای **غیرخطی**، استفاده از متغیرهای **شار سلف** (φ) و **بار خازن** (q) به‌جای I_L و V_C کار را بسیار ساده می‌کند. بگذارید این داستان‌ها را در دل چند مثال، بهتر درک کنیم.



شکل (۱ـ۲۱) مدار تمرین ۱۲

۱۲ـ در مدار شکل (۱ـ۲۱) اگر معادلات حالت را به فرم $\dot{X} = AX + BW$ بنویسیم که در آن $X = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}$ و W ورودی اسکالر باشد، ماتریس A کدام است؟

اولاً چون فقط A را خواسته (یعنی به B کاری ندارد)، می‌توانیم برای سادگی، $W = 0$ یعنی ورودی‌ها را صفر کنیم؛ پس مدار این‌طور می‌شود:



شکل (۱ـ۲۲) مدار تمرین ۱۲ در حالت ورودی صفر

حالا برای خازن، KCL و برای سلف، KVL می‌زنیم:

$$L\dot{I}_L + V_C = 0$$

$$-I_L + \frac{1}{R_2}V_C + C\dot{V}_C = 0$$

یعنی:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{V}_C \end{pmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{R_2 C} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} I_L \\ V_C \end{pmatrix}}_{X}$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

شما دوستان با حل تعدادی مسئله نمونه در این زمینه، قدرتمند می‌شوید. حالا به بررسی **روش منظم** رسیدن به معادلات حالت می‌پردازیم؛ خیلی ساده است، یکی دوبار به دقت این الگوریتم را بخوانید و پس از هر عبارت، معنی‌اش را با خودتان مرور کنید:

انتخاب متغیرهای حالت: ولتاژ خازن‌های مستقل و جریان سلف‌های مستقل در مدارهای خطی و بار خازن‌ها و شار سلف‌ها در مدارهای غیر خطی یا تغییرپذیر با زمان.

آخه چه فایده؟ در تست که این موضوع دست ما نیست، این انتخاب قبلاً توسط طراح انجام شده است.

انتخاب درخت مناسب: درختِ شامل همه خازن‌ها و هیچ‌یک از سلف‌ها!

می‌دانید چرا ؟

نپرسید دیگر ! این همان مرحله سوم الگوریتم است، دیگر !!!

آخه من چه بگویم؟

برای **سلف‌ها**، معادله **حلقه اساسی** و برای **خازن‌ها**، معادله **کات‌ست اساسی** می‌نویسیم.

اگر مدار شامل حلقه‌های خازنی یا کات‌ست‌های سلفی باشد، دیگر درختِ شامل همه خازن‌ها و هیچ‌یک از سلف‌ها معنی ندارد؛ آن وقت چه کنیم؟

آنچه نمی‌خواستم بگویم را حالا براتون می‌گم؛ در یک کلاس n نفره، وقتی یک دانشجوی علاقه‌مند و ممتاز و خلاصه دوست‌داشتنی باشد، استاد را فعال و سرحال و کلاس را مفید می‌کند و همین‌طور در زندگی، اگر آدم یک همسفر[1] عالی پیدا کند، دیگر، همه چیز سفر خوشایند می‌شود.

۱ـ گاهی فـ را می‌نویسند ولی ... !

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

بله، می‌گفتم، اگر مدار شامل حلقه‌های خازنی و حتی منابع ولتاژ باشد و یا شامل کات‌ست‌های سلفی و حتی منابع جریان باشد، درخت مناسب شامل **حداکثر خازن‌ها و حداقل سلف‌ها** خواهد بود.

ضمناً پس از اجرای مرحله سوم، اگر متغیرهای اضافی ظاهر شد، این‌ها جریان و ولتاژ مقاومت‌ها هستند.

برای حذف متغیرهای غیر حالت، برای لینک‌های مقاومتی، معادله حلقه اساسی و برای شاخه‌های مقاومتی، معادله کات‌ست اساسی می‌نویسیم (این معادلات جبری‌اند).

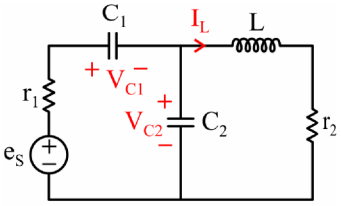
یک سؤال اساسی دارم؛ اگر در حین این کارها به متغیری غیر از V_C و I_L و ورودی‌ها برخوردیم، چه کار کنیم؟

قبل از اینکه جواب شما را بگویم، یک قضیه مطرح می‌کنم:

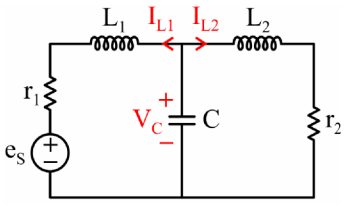
قضیه: در یک مدار، هر سیگنالی به صورت یک ترکیب خطی از متغیرهای حالت و ورودی‌ها قابل بیان است.

استاد، شما که جواب دوستم را دادید، پس با KCL و KVL خیالمان راحت است که همه چیز قابل تبدیل به متغیرهای حالت و ورودی‌ها است؛ خیلی عالی شد!

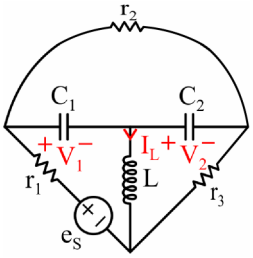
۱۳ـ در مدارهای نشان داده شده، معادلات حالت بنویسید. (چهار مسئله با یک بلیت!)



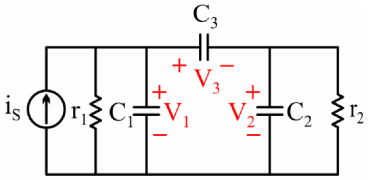
(ب)



(الف)



(د)



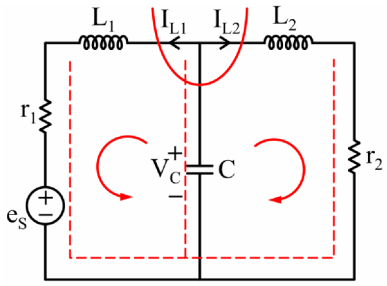
(ج)

شکل (۱ـ۲۳) مدارهای تمرین ۱۳ـ الف، ب، ج و د

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

اولی را خودم می‌گویم، خوب دقت کنید؛ با این تمرین خیلی کارهای جالبی داریم. درختِ مناسبِ روشِ فضایِ حالت، در مدار (الف) این‌گونه است:



شکل (۱ـ۲۴) درخت مناسب (خطوط نقطه‌چین) در مدار (الف) به همراه حلقه‌ها و کات‌ست‌ها

حالا مطابق بند سوم الگوریتم منظم داریم:

$$\text{KVL} \quad : \quad L_1 \dot{I}_{L_1} + r_1 I_{L_1} + e_s - V_C = 0$$

$$\text{KVL} \quad : \quad L_2 \dot{I}_{L_2} + r_2 I_2 - V_C = 0$$

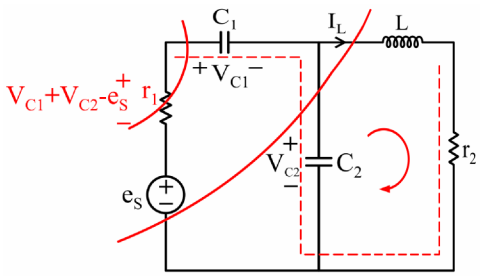
$$\text{KCL} \quad : \quad C\dot{V}_C + I_{L_1} + I_{L_2} = 0$$

و به عبارت دیگر:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_{L_1} \\ \dot{I}_{L_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{r_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{r_2}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_C \\ I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{L_1} \\ 0 \end{pmatrix} e_s$$

و حالا نوبت شماست.

در مدار (ب) هم درخت مناسب به صورت این شکل است:



شکل (۱ـ۲۵) درخت مناسب (خطوط نقطه‌چین) در مدار (ب) به همراه حلقه‌ها و کات‌ست‌ها

و باز با KCL برای خازن‌ها و KVL برای سلف‌ها داریم:

$$\text{KVL} \quad : \quad L\dot{I}_L + r_2 I_L - V_{C_2} = 0$$

$$\text{KCL} \quad : \quad C_1 \dot{V}_{C_1} + \frac{1}{r_1} V_{C_1} + \frac{1}{r_1} V_{C_2} - \frac{1}{r_1} e_s = 0$$

$$\text{KCL} \quad : \quad C_2 \dot{V}_{C_2} + I_L + \frac{1}{r_1} V_{C_1} + \frac{1}{r_1} V_{C_2} - \frac{1}{r_1} e_s = 0$$

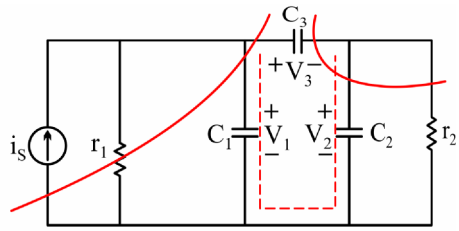
www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

یعنی:

$$\begin{pmatrix}\dot V_{C_1}\\ \dot V_{C_2}\\ \dot I_L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{r_1C_1} & \frac{-1}{r_1C_1} & 0\\ \frac{-1}{r_1C_2} & \frac{-1}{r_1C_2} & \frac{-1}{C_2}\\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{-r_2}{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{C_1}\\ V_{C_2}\\ I_L\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{r_1C_1}\\ \frac{1}{r_1C_2}\\ 0\end{pmatrix}e_s$$

باز نوبت یک مسئله قشنگ شد و...!



شکل (۱ـ۲۶) درخت مناسب (خطوط نقطه‌چین) در مدار (ج) به همراه کات‌ست‌ها

در اینجا درخت مناسب شامل C_1 و C_2 است و دیگر نمی‌تواند شامل C_3 باشد؛ چراکه دیگر درخت نیست.

حالا می‌دانیم:

$$V_3 = V_1 - V_2$$

با KCL در گره‌های چپی و راستی، دو معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{KCL} \quad : \quad C_3\dot V_1 - C_3\dot V_2 + C_1\dot V_1 + \frac{1}{r_1}V_1 - i_s = 0$$

$$\text{KCL} \quad : \quad C_3\dot V_2 - C_3\dot V_1 + C_2\dot V_2 + \frac{1}{r_2}V_2 = 0$$

حالا از این دو معادله می‌توانیم به معادلات فضای حالت برسیم که البته من حوصله‌اش را ندارم.

این بی‌حوصلگی هم گاهی خوب است. البته اگر نتیجه‌اش تنبلی باشد، نه. ولی اگر آدم را وادار کند که یک راه تستی فوق‌العاده عالی برای مسایل فضای حالت پیدا کند، آن وقت خیلی خوب است.

لطفاً خوبِ خوب توجه کنید، ببینید جواب (ج) مسئله درنهایت به صورت زیر می‌شود[1]:

$$\begin{pmatrix}\dot V_1\\ \dot V_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}i_s$$

حال به شکل (۱ـ۲۶) دقت کنید، اگر در گره مرکب بالایی یک KCL بزنیم، داریم:

$$\text{KCL} \quad : \quad C_1\dot V_1 + C_2\dot V_2 = -\frac{1}{r_1}V_1 - \frac{1}{r_2}V_2 + 1i_s$$

۱ـ این را بعداً در بخش مرتبه مدار می‌خوانیم که چرا این مدار با اینکه سه خازن داشت، از مرتبه ۲ شد.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

این عبارت را ترجمه می‌کنیم:

$$C_1 \times (\text{سطر اول}) + C_2 \times (\text{سطر دوم}) = -\frac{1}{r_1}V_1 - \frac{1}{r_2}V_2 + i_s$$

و با توجه به رابطه اخیر، چنین تفسیر می‌کنیم:

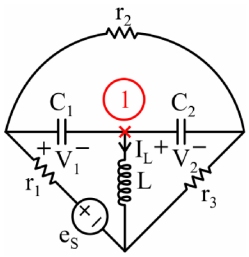
$$C_1 a + C_2 c = -\frac{1}{r_1} = V_1 \quad \text{ضریبِ}$$

$$C_1 b + C_2 d = -\frac{1}{r_2} = V_2 \quad \text{ضریبِ}$$

$$C_1 e + C_2 f = 1 = i_s \quad \text{ضریبِ}$$

یعنی این راهِ فوق‌العاده ساده، **قطعاً** با ردّ گزینه، ما را به پاسخ درست می‌رساند و به ما چنین می‌گوید:
گزینه‌ای درست است که هر یک از سه رابطه اخیر در آن صدق کند.
حالا مسئله آخر به عهده شماست:

با این روش جالب در مدار (د) داریم:



شکل (۱ـ۲۷) نگاهی به مدار تمرین ۱۳ قسمت (د) با روش خاص تستی

مثلاً در گره (۱)، KCL می‌زنیم:

$$\text{KCL} \quad : \quad C_1\dot{V}_1 - C_2\dot{V}_2 = I_L$$

به عبارت دیگر:

$$C_1 \times (\text{سطر اول}) - C_2 \times (\text{سطر دوم}) = 0V_1 + 0V_2 + 1I_L + 0e_s$$

اجازه بدهید من کمی بیشتر بگویم تا آن‌هایی هم که مثل خود من هنوز خوب متوجه ماجرا نشده‌اند، شیرفهم شوند!

یعنی اگر قرار باشد جواب نهایی به صورت زیر باشد:

$$\begin{matrix} C_1 \times \\ -C_2 \times \end{matrix} \begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{I}_L \end{pmatrix} = \begin{matrix} C_1 \times \\ -C_2 \times \end{matrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_L \end{pmatrix} + \begin{matrix} C_1 \times \\ -C_2 \times \end{matrix} \begin{pmatrix} j \\ k \\ \ell \end{pmatrix} e_s$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

با توجه به رابطه آخر چنین خواهیم داشت:

$$C_1 a - C_2 d = 0$$
$$C_1 b - C_2 e = 0$$
$$C_1 c - C_2 f = 1$$
$$C_1 j - C_2 k = 0$$

که البته ممکن است به هر ۴ رابطه بالا نیازی نباشد و حتی یک یا دو تای آن‌ها با رد گزینه، ما را به جواب برساند.

احسنت! کاملاً درست است. من در n تا تست این مورد را چک کرده‌ام[1]، معمولاً یکی از این روابط با ردّ گزینه، ما را به جواب می‌رساند؛ مگر آنکه طراح تست، خود شما باشید و با علم به این مطلب، گزینه‌ها را بسازید! این روش آخر را جمع‌بندی می‌کنم:

در یک جایی (هر جایی که خوشتان آمد!) برای خازن KCL و برای سلف KVL می‌زنیم؛ اگر نتیجه «یک معادله یک مشتق!» شد که مشکل حل است؛ این رابطه در اصل بیانگر یکی از سطرهای معادله حالت $\dot{X} = AX + BW$ است؛ اما اگر تعداد مشتق‌ها بیشتر از یکی شد، آن رابطه را مرتب می‌کنیم، به طوری‌که مشتق‌ها در سمت چپ تساوی و بقیه در سمت راست باشند؛ آن‌گاه این رابطه را به صورت ترکیب خطی از سطرهای رابطه $\dot{X} = AX + BW$ تعبیر کرده و با ردّ گزینه زندگی شیرین می‌شود!...

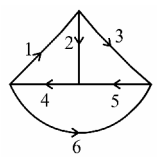
۱ـ شما هم حتماً این کار را انجام دهید. به این بهانه چندتا تست روش فضای حالت هم حل کرده‌اید؛ لطفاً همین الان (قبل از آنکه سراغ بحث لاپلاس بروید!).

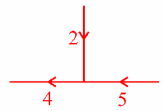
www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

مسایل تکمیلی فصل اول

۱ـ گراف یک شبکه و درخت مربوط به آن در شکل زیر داده شده است. حلقه‌ها و کات‌ست‌های اساسی آن کدام است؟ **(مهندسی برق ۸۱)**





۱) کات‌ست‌های اساسی $\{2,1,3\}, \{1,6,3\}, \{4,1,6\}$
حلقه‌های اساسی $\{1,4,2\}, \{1,5,3\}, \{4,5,6\}$

۲) کات‌ست‌های اساسی $\{3,5,6\}, \{5,6,4\}, \{4,5,2\}$
حلقه‌های اساسی $\{1,4,2\}, \{2,5,3\}, \{4,5,6\}$

۳) کات‌ست‌های اساسی $\{2,1,3\}, \{5,6,3\}, \{4,1,6\}$
حلقه‌های اساسی $\{1,4,2\}, \{2,5,3\}, \{4,5,6\}$

۴) کات‌ست‌های اساسی $\{2,1,5,6\}, \{5,6,3\}, \{3,2,4,6\}$
حلقه‌های اساسی $\{2,4,3\}, \{2,5,3\}, \{4,5,6\}$

۲ـ ماتریس تلاقی مختصرشده برای گراف جهت‌دار یک مدار به صورت زیر داده شده است:

$$\begin{array}{l} \text{شماره شاخه‌ها} \rightarrow \quad 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

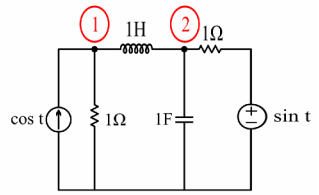
ولتاژهای کدام‌یک از دسته شاخه‌های زیر را می‌توان به عنوان متغیرهای مستقل انتخاب کرده و ولتاژ سایر شاخه‌ها را برحسب آن‌ها بیان کرد؟ **(مهندسی برق ۷۸)**

۱) $\{2,4,7\}$ ۲) $\{2,5,6\}$ ۳) $\{3,4,6\}$ ۴) $\{3,5,7\}$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۳ـ ماتریس ادمیتانس گره $Y(j\omega)$ برای مدار شکل زیر کدام است؟



۱) $\begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 1 \end{bmatrix}$

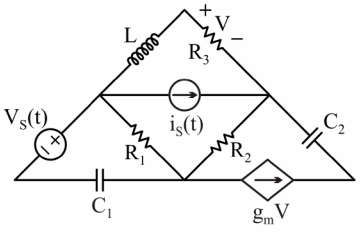
۲) $\begin{bmatrix} 1-j & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1+j & j \\ j & j \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 1+j & -j \\ -j & j \end{bmatrix}$

۴ـ در مدار شکل زیر کدام روش تحلیل به معادلاتی با کمترین تعداد متغیرهای مجهول می‌انجامد؟

(مهندسی برق ۷۷)



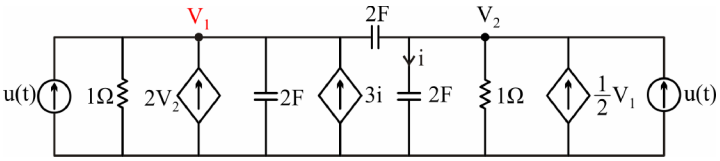
۱) کات‌ست

۲) گره

۳) مش

۴) معادلات حالت

۵ـ ولتاژ $V_1(t)$ در مدار شکل زیر برابر کدام است؟ **(مهندسی برق ۷۷)**



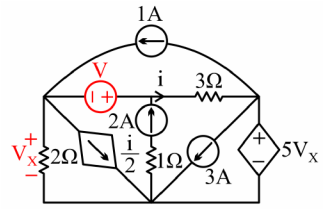
۱) $\left(1-2t-e^{-\frac{t}{4}}\right)u(t)$

۲) $\left(1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{4}}\right)u(t)$

۳) جواب‌های بی‌شماری برای $V_1(t)$ وجود دارد.

۴) هیچ جوابی نمی‌توان در این مدار برای $V_1(t)$ به دست آورد.

۶ـ در مدار شکل زیر، V چقدر باشد تا $V_x = 0$ شود؟



۱) 3

۲) 6

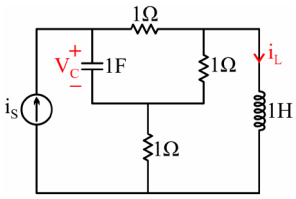
۳) 12

۴) 18

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۷ـ در مدار زیر، بردار حالت $X=\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}$ است. هرگاه معادلات حالت به صورت $\frac{dX}{dt}=AX+bi_s$ نمایش داده شود، ماتریس A کدام است؟ (مهندسی برق ۸۱)



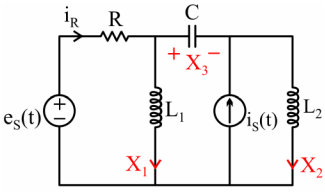
۱) $A=\begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

۸ـ در مدار شکل زیر، بردار $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ بردار حالت و $W=\begin{bmatrix} i_s \\ e_s \end{bmatrix}$ بردار ورودی است. اگر معادلات حالت مدار به صورت $\dot{X}=AX+BW$ نوشته شود و ماتریس A به صورت زیر باشد:



$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس B کدام است؟

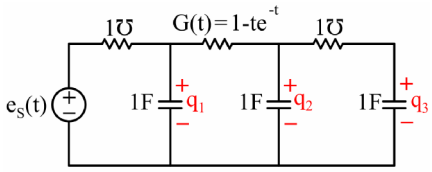
۱) $B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

۳) $B=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

۹ـ در شبکه خطی و تغییرپذیر با زمان شکل زیر، هرگاه بردار حالت $X=\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T$ فرض شود، با توجه به نمایش معادلات حالت $\dot{X}=AX+BU$، ماتریس A عبارت است از: (مقادیر مقاومت‌ها برحسب «مهو» هستند.)



۱) $\begin{bmatrix} te^{-t} & 1-te^{-t} & 0 \\ 1-te^{-t} & te^{-t} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -2+te^{-t} & 1-te^{-t} & 0 \\ 1-te^{-t} & -2+te^{-t} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 2 & -te^{-t} & 0 \\ te^{-t} & 2+te^{-t} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 2+te^{-t} & 1-te^{-t} & 0 \\ -te^{-t} & -2+te^{-t} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۱۰ـ در یک مدار مشتمل بر تعدادی مقاومت و فقط یک سلف 1H و فقط یک خازن 1F ، با انتخاب متغیرهای حالت به صورت $\left[i_L , V_C \right]$، ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (ماتریس ضرایب معادلات حالت) معلوم است. اگر در این مدار، محل سلف و خازن با یکدیگر تعویض شود و متغیرهای حالت به صورت $\left[V_C , i_L \right]$ باشند، ماتریس A در مدار به چه صورت خواهد شد؟

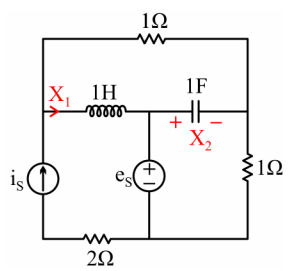
۱) تمامی عناصر ماتریس جدید A را نمی‌توان به دست آورد.

۲) $A_{\text{جدید}}=\dfrac{1}{\det[A]}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

۳) $A_{\text{جدید}}=\dfrac{1}{\det[A]}\begin{bmatrix} a_{11} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

۴) $A_{\text{جدید}}=\dfrac{1}{\det[A]}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_{22}} & \dfrac{-1}{a_{12}} \\ -\dfrac{1}{a_{21}} & \dfrac{1}{a_{11}} \end{bmatrix}$

۱۱ـ در مدار شکل زیر x_1 جریان سلف و x_2 ولتاژ خازن است. اگر بردار حالت مدار $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ باشد، در رابطه $\dot{X}=AX+BW$ که در آن $W=\begin{bmatrix} i_s \\ e_s \end{bmatrix}$ است، ماتریس A و B کدام‌اند؟



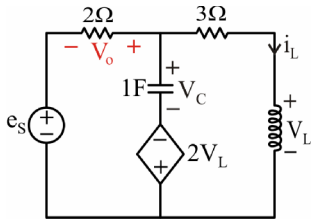
۱) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

۱۲ـ در مدار شکل زیر V_C و I_L متغیرهای حالت هستند. ولتاژ خروجی مطلوب V_o برحسب متغیرهای حالت به کدام صورت نوشته می‌شود؟



۱) $I_L+\dfrac{1}{6}V_C-\dfrac{1}{2}e_s$

۲) $6I_L-V_C-e_s$

۳) $3I_L-\dfrac{1}{2}V_C-\dfrac{1}{2}e_s$

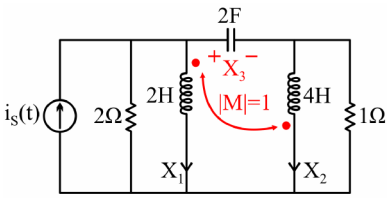
۴) $2I_L+\dfrac{1}{3}V_C-e_s$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۱۳ـ در مدار شکل زیر، معادله حالتی که $\frac{dx_3}{dt}$ را برحسب بقیه متغیرهای حالت بیان می‌کند، کدام است؟

(مهندسی برق ۷۸)



۱) $\frac{dx_3}{dt}=-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{6}x_2-\frac{1}{6}x_3-\frac{1}{3}i_s$

۲) $\frac{dx_3}{dt}=-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{6}x_2+\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{3}i_s$

۳) $\frac{dx_3}{dt}=-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{6}x_2-\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{3}i_s$

۴) $\frac{dx_3}{dt}=-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{6}x_2+\frac{1}{6}x_3-\frac{1}{3}i_s$

۱۴ـ اگر ماتریس تلاقی A یک گراف مسطح را به دو ماتریس A_t و A_l متناظر با شاخه درخت‌ها و لینک‌ها تفکیک کنیم $A=\left[A_l \middle| A_t\right]$، کدام‌یک از خواص زیر همواره برقرار است؟ **(مهندسی برق ۸۳)**

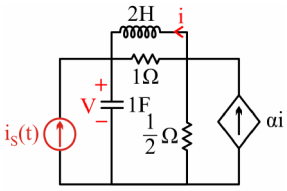
۱) A_t همواره یک ماتریس ناویژه است.

۲) دترمینان A_t همواره برابر ± 1 است.

۳) A_t همواره یک ماتریس مربع است.

۴) هر سه خاصیت برقرار است.

۱۵ـ اگر معادلات حالت مدار شکل زیر برحسب متغیرهای i و v به صورت $\dot{x}=Ax+bw(t)$ نوشته شود، بردار b کدام است؟ $x=\begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}$ **(مهندسی برق ۸۳)**



۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

۱۶ـ ماتریس تلاقی مختصرشده گرافی چنین است:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

کدام شاخه‌ها، درختی از این گراف را تشکیل می‌دهند؟ **(مهندسی برق ۸۴)**

۱) 1256

۲) 1269

۳) 1358

۴) 2345

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

حل تشریحی

۱. گزینه ۳ درست است.

به نظر من این مسئله خیلی ساده است. گفتیم کات‌ست اساسی یعنی یک شاخه درخت داشته باشد و باقی لینک باشد و حلقه اساسی یعنی یک لینک باشد و باقی شاخه درخت باشد. پس کات‌ست‌ها و حلقه‌های اساسی را می‌نویسیم:

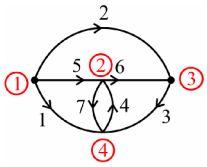
حلقه‌های اساسی: $\{1 , 2 , 4\}, \{3 , 2 , 5\}, \{6 , 4 , 5\}$

کات‌ست‌های اساسی: $\{2 , 1 , 3\}, \{4 , 1 , 6\}, \{5 , 3 , 6\}$

۲. گزینه ۴ درست است.

ولتاژ شاخه‌هایی را می‌توان به عنوان متغیر مستقل در نظر گرفت که تشکیل حلقه ندهند و ازطرفی برای آنکه ولتاژ همه شاخه‌ها برحسب آن‌ها قابل بیان باشد، باید به همه گره‌ها سر بزند؛ پس ترجمه صورت مسئله این‌گونه می‌شود: کدام شاخه‌ها تشکیل درخت می‌دهند؟

حالا نوبت منه. اول، گراف متناظر را می‌کشیم:



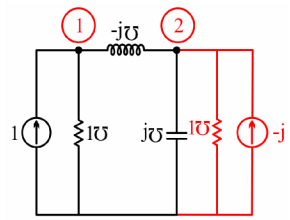
حالا باید ببینیم کدام گزینه، تشکیل درخت می‌دهد که فقط $\{3 , 5 , 7\}$ در بین گزینه‌ها این خاصیت را دارد.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۳. گزینه ۱ درست است.

اول منبع ولتاژ را به منبع جریان تبدیل می‌کنیم و سپس با عینک ادمیتانس‌بین نگاه می‌کنیم:



حالا داریم: $Y = \begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 1 \end{bmatrix}$

۴. گزینه ۳ درست است.

مدار 6 گره دارد که اگر یکی را زمین بگیریم، می‌شود 5 مجهول که البته به خاطر وجود منبع ولتاژ، یک مجهول دیگر هم کم می‌شود؛ پس در روش کات‌ست و گره 5 مجهول وجود دارد. در روش مش 4 حلقه داریم که به خاطر وجود یک منبع جریان مستقل، یک مجهول کم می‌شود و 3 مجهول خواهیم داشت. بالاخره در روش فضای حالت، چون 3 عنصر مستقل ذخیره‌کننده انرژی سلف‌ها و خازن‌ها وجود دارد، باز 3 مجهول خواهیم داشت!!!

دوستم یک بی‌دقتی کوچک کرد؛ در روش مش، اگر دقت کنیم، جریان مش بالایی $i_1 = \frac{1}{R_3} V$ است و ازطرفی جریان مش جنوب شرقی! هم $i_4 = -g_m v$ است؛ پس i_1 و i_4 از هم مستقل نیستند و بنابراین در روش مش، حل مسئله به دو معادله دو مجهول می‌رسد.

۵. گزینه ۴ درست است.

به روش گره، دستگاه معادلات را می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 4s+1 & -2s \\ -2s & 4s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} + 2V_2 + 3I \\ \frac{1}{s} + \frac{1}{2}V_1 \end{bmatrix}$$

ازطرفی $I = 2SV_2$. پس با جایگذاری و انتقال ولتاژها به سمت چپ داریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4s+1 & -8s-2 \\ -2s-\frac{1}{2} & 4s+1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\det A = (4s+1)^2 - (8s+2)\left(2s+\frac{1}{2}\right) = 0$$

در این حالت چون طرف دوم معادلهٔ ماتریسی غیر صفر است، هیچ جوابی برای V_1 و V_2 وجود ندارد و اگر طرف دوم برابر صفر بود، بی‌شمار جواب داشتیم.

www.Mohandesyar.com

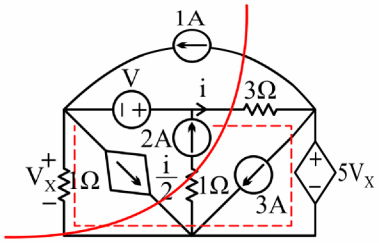
www.Mohandesyar.com

۶. گزینه ۲ درست است.

ببخشید این مسئله چه ربطی به این بخش دارد؟

بله، قصد من از طرح این مسئله در این فصل، آن است که گاهی استفاده هوشمندانه از کات‌ست‌ها و حلقه‌های خاص که با چشم‌های دقیق شما قابل رؤیت است، حل مسئله را خیلی کوتاه می‌کند.

من دیدم! یک کات‌ست خوب:



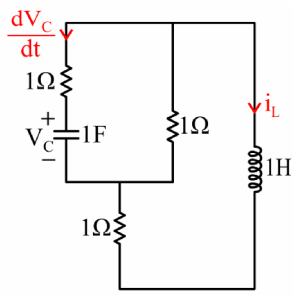
در کات‌ست $KCL: -1 + i - 2 + \frac{i}{2} + \cancel{V_x}^{0} = 0 \Rightarrow i = 2^{A}$

حالا در حلقه مستطیلی‌شکل KVL می‌زنیم:

$$KVL: V = 3i + 5\cancel{V_x}^{0} - \cancel{V_x}^{0} \Rightarrow V = 6\ V$$

۷. گزینه ۳ درست است.

چون ماتریس b خواسته نشده است، برای ساده شدن مدار می‌توانیم اول منبع را صفر کنیم.



حالا با آن روش باحال استاد! هرجای مدار که خواستیم KCL یا KVL می‌زنیم، مثلاً اگر در حلقه بیرونی KVL بزنیم، داریم:

$$\frac{di_L}{dt} + i_L - V_C - \frac{dV_c}{dt} = 0$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

$$\underbrace{\boxed{\frac{dV_c}{dt}}}_{\text{سطر اول}} - \underbrace{\boxed{\frac{di_L}{dt}}}_{\text{سطر دوم}} = -V_c + i_L$$

پس اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، باید:

$a - c = -1 = V_c$ ضریب

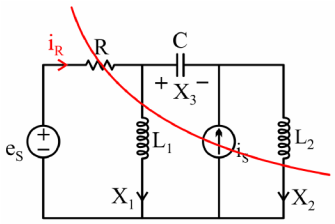
$b - d = +1 = i_L$ ضریب

بنابراین فقط گزینه ۳ درست است.

دیدید چقدر جالب بود؟

۸. گزینه ۴ درست است.

اول کاری به A نداریم، معادلات حالت را می‌نویسیم:



با KCL در کات‌ست مشخص‌شده:

$$i_R = x_1 + x_2 - i_s$$

و حالا با KVL در حلقه بیرونی داریم:

$$KVL: e_s = R x_1 + R x_2 - R i_s + x_3 + L_2 \dot{x}_2$$

و با KVL در حلقه چپی:

$$KVL: e_s = R x_1 + R x_2 - R i_s + L_1 \dot{x}_1$$

و نهایتاً با KCL در گره سمت راست خازن:

$$KCL: C \dot{x}_3 = x_2 - i_s$$

حالا اگر این معادلات را مرتب کنیم، این‌جوری می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} & 0 \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{R}{L_1} & \frac{1}{L_1} \\ \frac{R}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} i_s \\ e_s \end{pmatrix}$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

با مقایسه این معادلات با ماتریس A که در صورت مسئله داده شده، داریم:

$$\frac{R}{L_1}=1 \quad , \quad \frac{R}{L_2}=\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{C}=1 \quad , \quad L_1=1 \quad , \quad L_2=2$$

پس ماتریس B برابر است با:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

۹. گزینه ۲ درست است.

تغییرپذیر بودن مدار چه اثری بر روش فضای حالت دارد؟

هیچ اثری. فقط دقت کنید که در شبکه‌های غیر خطی یا تغییرپذیر با زمان، بهتر است به‌جای V_C و I_L از q و φ استفاده کنیم؛ در این صورت معادلات اساسی این‌گونه است:

$$I_C=\frac{dq}{dt}=\dot{q} \quad \text{و} \quad V_C=\frac{q}{C}$$

$$V_L=\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi} \quad \text{و} \quad I_L=\frac{\varphi}{L}$$

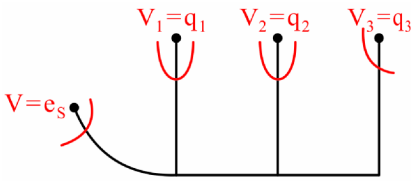
که البته انتخاب متغیرهای حالت، دست ما نیست و خود طراح این کار را انجام می‌دهد.

حالا به سبکی که شما در طول درس گفتید، درختی می‌گیریم شامل همه خازن‌ها به این شکل:

$$\dot{q}_1+1\left(q_1-e_s\right)+\left(1-te^{-t}\right)\left(q_1-q_2\right)=0$$

$$\dot{q}_2+\left(1-te^{-t}\right)\left(q_2-q_1\right)+1\left(q_2-q_3\right)=0$$

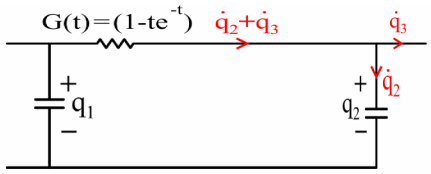
$$\dot{q}_3+1\left(q_3-q_2\right)=0$$



که با مرتب کردن این معادله، به سادگی مشخص می‌شود که گزینه ۲ درست است.

با آنکه خودم مسئله را حل کردم، اما یک سؤال دارم؛ آیا در این مسئله نمی‌شود از آن بازی‌های تستی درآورد؟

چرا، اتفاقاً یک راه جالب به ذهن من رسید. به این شکل نگاه کنید:



www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

حالا اگر یک KVL بزنیم، داریم:

$$\frac{1}{1-te^{-t}}\left(\dot{q}_2+\dot{q}_3\right)+q_2-q_1=0$$

یعنی:

$$\underset{\text{سطر دوم}}{\dot{q}_2}+\underset{\text{سطر سوم}}{\dot{q}_3}=\left(1-te^{-t}\right)q_1-\left(1-te^{-t}\right)q_2+0q_3+0e_s$$

با چک کردن گزینه‌ها پیداست که فقط گزینه ۲ می‌تواند درست باشد.

۱۰. گزینه ۲ درست است.

از کجا باید شروع کنیم؟

خیلی خب، من شروع می‌کنم؛ ابتدا باید معادلات حالت در مدار اولیه را بنویسیم:

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_L\\ \dot{V}_C\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}I_L\\ V_C\end{bmatrix}$$

حالا قرار است جای سلف ۱ هانری و خازن ۱ فارادی عوض شود؛ پس متغیری که قبلاً اسمش V_L بود، حالا V_C می‌شود و الی آخر.

فکر کنم گرفتم!

در این صورت با عوض کردن اسم‌ها داریم:

$$\dot{I}_L=V_L\ \rightarrow\ V_C\quad,\quad I_L\rightarrow I_C=\dot{V}_C$$
$$\dot{V}_C=I_C\rightarrow I_L\quad,\quad V_C\rightarrow V_L=\dot{I}_L$$

پس معادله حالت مدار جدید این‌طور می‌شود:

$$\begin{bmatrix}V_C\\ I_L\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\dot{V}_C\\ \dot{I}_L\end{bmatrix}$$

و اگر طرفین را در A^{-1} ضرب کنیم:

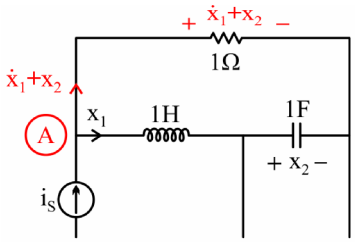
$$\begin{bmatrix}\dot{V}_C\\ \dot{I}_L\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}V_C\\ I_L\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad A\ \text{جدید}=A^{-1}$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۱۱. گزینه ۳ درست است.

به این مدار نگاه کنید. بعد از یک KVL بازی کوچک و KCL در گرهٔ خوب داریم:



حالا در گره‌های (A)، KCL بزنید:

$$\dot{X}_1 + X_2 + X_1 = i_s$$

$$\Rightarrow \quad \dot{X}_1 = -1X_1 - 1X_2 + 1i_s + 0e_s$$

که این عبارت فقط با سطر اول گزینه (۳) می‌خواند و نیازی به حل کامل مسئله نیست.

۱۲. گزینه ۴ درست است.

با یک KVL در مش سمت چپ داریم:

$$V_o = V_C - 2V_L - e_s$$

ولی V_L باید از این معادله حذف شود، پس در مش سمت راست هم یک KVL می‌زنیم:

$$2V_L - V_C + 3I_L + V_L = 0 \quad \Rightarrow \quad V_L = \frac{1}{3}V_C - I_L$$

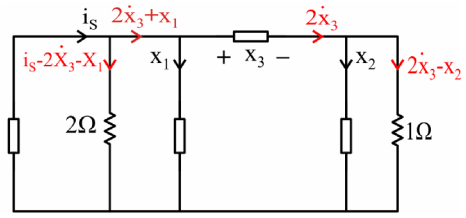
و حالا این V_L را در معادله اول جایگذاری می‌کنیم:

$$V_o = V_C - 2\left(\frac{1}{3}V_C - I_L\right) - e_s$$

$$V_o = \frac{1}{3}V_C + 2I_L - e_s$$

۱۳. گزینه ۳ درست است.

اگر قرار است در معادله $\dot{X}_3$، اسم مشتقات دیگر نیاید، فقط باید از جریان سلف‌ها استفاده کنیم، نه از ولتاژشان؛ پس ابتدا روی مدار KCL بازی می‌کنیم:



www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

و حالا در حلقهٔ شامل مقاومت‌های 2 اهمی و 1 اهمی، KVL می‌زنیم:

$$X_3+2\dot{X}_3-X_2-2i_s+4\dot{X}_3+2X_1=0$$

$$\Rightarrow\quad \dot{X}_3=-\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2-\frac{1}{6}X_3+\frac{1}{3}i_s$$

فوق‌العاده است! انصافاً با این روش‌های حل‌تان خستگی را از تن آدم درمی‌آورید.

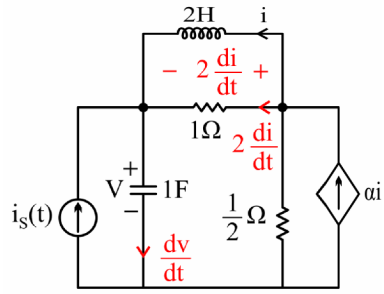
۱۴. گزینه ۴ درست است.

در ماتریس A ستون‌های معرف شاخه‌ها و سطرها معرف گره‌ها است، پس در A_t که معرف شاخه درخت‌هاست، طبق تعریف چون شاخه‌ها باید به همه گره‌ها سر بزنند و حلقه‌ای هم ایجاد نکنند، تعداد شاخه‌ها و گره‌ها برابر بوده و A_t مربعی است.

برای تحلیل دترمینان هم اگر A_t را برای سادگی 2×2 در نظر بگیریم، مطمئناً یک درایه غیر صفر باید داشته باشد وگرنه حلقه درست می‌شود و در این حال دترمینان برابر ± 1 خواهد بود که ناویژه بودن ماتریس را هم سبب می‌شود. پس گزینه ۴ درست است.

۱۵. گزینه ۳ درست است.

برای حل تست‌ها، بعد از KCL و KVL بازی، هرجای مدار که خواستیم باید یک معادله بنویسیم، مثلاً با یک KCL در گرهٔ سمت چپ داریم:



$$2\frac{di}{dt}-\frac{dv}{dt}=-i-i_S$$

پس اگر ماتریس b را به صورت $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، باید داشته باشیم:

$$2p-q=-1$$

که -1 ضریب $w(t)=i_S(t)$ است.

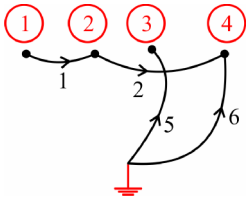
www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

و این معادله تنها در گزینهٔ ۳ صدق می‌کند.

۱۶. گزینه ۱ درست است.

از روی ماتریس تلاقی، شکل گراف را رسم می‌کنیم، مثلاً برای گزینه ۱ داریم:



که این شاخه‌ها به همه گره‌ها سر زده‌اند و حلقه هم درست نکرده‌اند؛ پس تشکیل درخت می‌دهند.

بله، این راه مطمئن است. برای حذف گزینه هم راه‌های سریعی وجود دارد؛ مثلاً اگر به شاخه‌های گزینه ۲ نگاه کنید، می‌بینید که هیچ‌کدام از گزینه‌ها به گره 3 سر نزده‌اند و به همین ترتیب برای گزینه ۳ به گرهٔ 4 و برای گزینه ۴ به گرهٔ 1 ؛ پس، این شاخه‌ها تشکیل درخت نمی‌دهند.

www.Mohandesyar.com

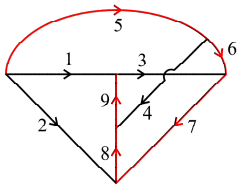
www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

خودآزمایی فصل اول

۱. در گراف شکل مقابل، ماتریسی که ولتاژ شاخه‌های v_4, v_3, v_2, v_1 را برحسب ولتاژ شاخه‌های v_9, v_8, v_7, v_6, v_5 بیان می‌کند به چه فرم است؟



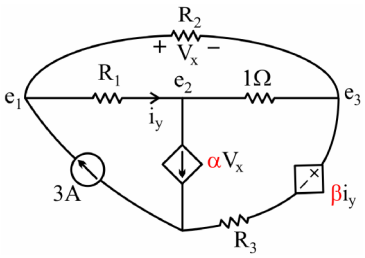
۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

۲. اگر ماتریس ادمیتانس گره مدار شکل مقابل به فرم $Y = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، نسبت $\frac{\beta}{\alpha}$ چقدر است؟



۱) 2

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) 3

۴) $\frac{-1}{3}$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۳. اگر ماتریس تلاقی یک گراف به صورت $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ باشد، تعداد درختهای آن چند است؟

۱) 8 ۲) 4 ۳) 6 ۴) 7

۴. ماتریس کات ست گرافی به صورت زیر است، دو حلقه اساسی متناظر با درخت این کات ست کدام گزینه است؟

$$Q=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

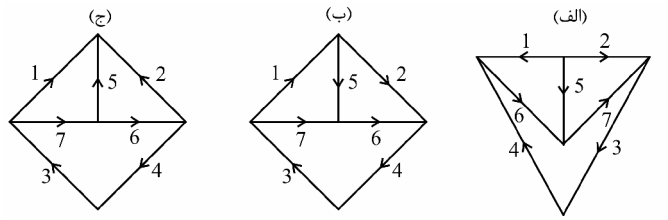
۱) $L_2=\{3,4,8\}\ ,\ L_1=\{2,3,7\}$

۲) $L_2=\{3,4,7\}\ ,\ L_1=\{2,3,8\}$

۳) $L_2=\{2,3,7\}\ ,\ L_1=\{1,2,7\}$

۴) $L_2=\{3,4,8\}\ ,\ L_1=\{1,2,8\}$

۵. اگر ماتریس کات ست اساسی $Q=[E\ I]$ نوشته شود که در آن $E=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ ، شکل گراف به کدامیک از حالتهای زیر می‌تواند باشد؟



۱) الف و ب ۲) الف و ج ۳) ب و ج ۴) هر سه

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۶. سه سلف L_3 و L_4 و L_5 به طور مغناطیسی تزویج شده و ماتریس اندوکتانس آن‌ها به صورت روبرو است، معادلهٔ گره کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{-4}{3} \\ 1 & \frac{-4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

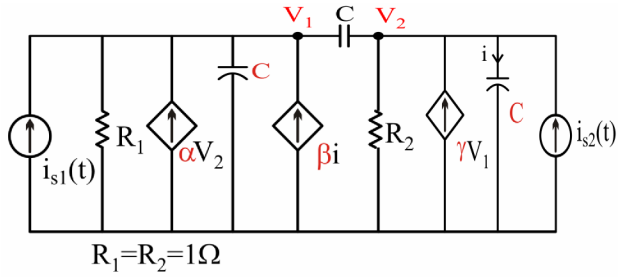
۱) $$\begin{bmatrix} G_2+j\omega c_1 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2+\frac{5}{j\omega} & \frac{-2}{j\omega} \\ 0 & \frac{-2}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲) $$\begin{bmatrix} G_2+j\omega c_1 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2+\frac{6}{j\omega} & \frac{-2}{j\omega} \\ 0 & \frac{-2}{j\omega} & \frac{4}{j\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I \\ g_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

۳) $$\begin{bmatrix} j\omega c_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2+g_m & G_2-g_m+\frac{7}{j\omega} & \frac{-3}{j\omega} \\ g'_m & -\frac{3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۴) $$\begin{bmatrix} j\omega c_1+G_2 & -G_2 & g'_m \\ -G_2 & G_2-g_m+\frac{7}{j\omega} & \frac{-3}{j\omega} \\ g'_m & -\frac{3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I \\ g_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

۷. تحت چه شرایطی، مدار شکل زیر، جواب یکتایی ندارد؟



۱) $\alpha = 2\ ,\ \gamma = 1\ ,\ \beta = 3\ ,\ c = 4F$

۲) $\alpha\gamma = 1\ ,\ c\beta = 4$

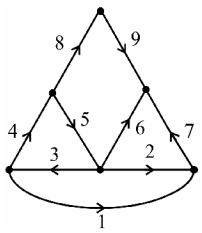
۳) $\alpha\gamma = 1\ ,\ \beta = 3\ ,\ \alpha = \frac{1}{2}$

۴) $\alpha\gamma = 1\ ,\ \beta = 3\ ,\ \gamma = \frac{1}{2}$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۸. در گراف نشان داده شده، تعداد درخت‌هایی را که تمام حلقه‌های اساسی آن همان مش‌ها باشند و از طرفی تعداد درخت‌هایی را که تمام کات‌ست‌های اساسی آن متناظر با شاخه‌های وصل شده به گره‌ها باشند، به ترتیب چندتاست؟



تعداد درخت‌ها= $n_t = n_{tree}$

تعداد کات‌ست‌ها= $n_c = n_{cutset}$

۱) $n_c = 2 , n_t = 4$

۲) $n_c = 0 , n_t = 4$

۳) $n_c = 2 , n_t = 0$

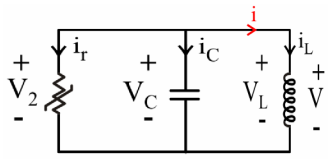
۴) $n_c = 0 , n_t = 2$

۹. در معادلات حالت مداری که به‌صورت $\dot{X} = AX$ می‌باشد، ماتریس انتقال حالت به‌صورت زیر است. ماتریس A در معادلات حالت چگونه بوده است؟

$$\phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} 3e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

۱) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

۱۰. اگر داشته باشیم $i_r = e^{-v_r}$ و $q_c = v_c^3 + v_c$ و $\varphi_L = tgh\, i_L$ مقدار $\frac{di}{dt}$ کدام است؟



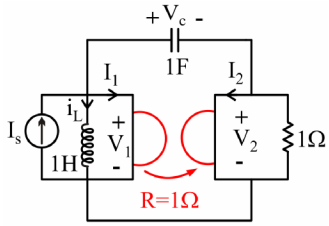
۱) $\frac{di}{dt} = (1 + tgh\, i_L)v$

۲) $\frac{di}{dt} = \frac{v}{1 + tgh^2 i}$

۳) $\frac{di}{dt} = \frac{1 + tgh\, i}{v^2}$

۴) هیچ‌کدام

۱۱. اگر ضریب چرخش ژیراتور برابر $R = 1^{\Omega}$ باشد معادلات حالت مدار کدام است؟ $(C = 1F \quad , \quad L = 1^{H} \quad , \quad R = 1^{\Omega})$



۱) $\begin{pmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_C \\ I_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2 \\ +1 \end{pmatrix} I_S$

۲) $\begin{pmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_C \\ I_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2 \\ +1 \end{pmatrix} I_S$

۳) $\begin{pmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_C \\ I_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2 \\ -1 \end{pmatrix} I_S$

۴) $\begin{pmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{I}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_C \\ I_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2 \\ -1 \end{pmatrix} I_S$

www.Mohandesyar.com