فصل سوم

## سیستم‌های کنترل بهینه خطی مربعی

Linear Quadratic optimal Control

به دو صورت LQR (تنظیم) و LQT (تعقیب) می‌باشد.

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t)$$

سیستم در حالت کلی

خطی متغیر با زمان LTV

$$J(u(t)) = J(x(t_0), u(t), t_0) = \tfrac{1}{2}[z(t_f) - y(t_f)]^T F(t_f)\,[z(t_f) - y(t_f)] + \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \{[z(t) - y(t)]^T Q(t)\,[z(t) - y(t)] + u^T(t) R(t)\, u(t)\}\,dt$$

$x \in R^n$, $y \in R^m$, $u \in R^r$

$z(t)$ بردار مرجع $\in R^m$ یا خروجی مطلوب

$e(t) = z(t) - y(t)$ بردار خطا

فرض: $u(t)$ مقید نبوده و همه خروجی‌ها و حالت‌ها قابل اندازه‌گیری‌اند.

$A_{n\times n}$ ماتریس حالت، $B_{n\times r}$ ماتریس کنترل، $C_{m\times n}$ ماتریس خروجی، $Q(t) \geq 0$ ماتریس وزن خطا، $R(t) > 0$ ماتریس وزن کنترل، $F \geq 0$ ماتریس وزن هزینه انتهایی

اگر $t_f \to \infty$ افق را نامتناهی گویند $F(t_f) = 0$

حالت‌های مختلف مسأله

الف- تنظیم حالت $z(t) = 0$، $C = I$ یعنی $x(t) \to 0$

State Regulator

بیشتر در حذف اغتشاش استفاده می‌شود یعنی u باعث حذف اغتشاش شود

ب- تنظیم خروجی $z(t) = 0$ یعنی $y(t) \to 0$

Output Regulator

ج- تعقیب tracking در این حالت می‌خواهیم خطا را صفر کنیم

## مسأله تنظیم کننده خطی مربعی با افق متناهی

۱- $u(t)$ نامقید ۲- $x_0$ و $t_f$ معلوم ولی $x(t_f)$ نامشخص

گام‌های حل مسأله به روش پونتریاگین:

گام ۱: تشکیل همیلتونین

$\lambda$ بردار کمک-حالت

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda, t) = \tfrac{1}{2}x^T Q x + \tfrac{1}{2}u^T R u + \lambda^T[Ax + Bu]$$

گام ۲: محاسبه کنترل بهینه

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \rightarrow R u^* + B^T \lambda^* = 0 \rightarrow u^*(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) \lambda^*(t)$$

$>0$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(Ax) = A^T \qquad \frac{\partial}{\partial u}(u^T R u) = 2Ru}$$

گام ۳: معادلات حالت و کمک حالت

$$\dot{x}^* = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = Ax^* + Bu^*$$
$$\dot{\lambda}^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -Qx^* - A^T\lambda^*$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -E(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix} \qquad E(t) = B(t) R^{-1} B^T$$

یک معادله دیفرانسیلی 2n بعدی بنابراین 2n شرط نیاز دارد

شرط مرزی $\left[\mathcal{H}^* + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda^*\right]^T_{t_f} \delta x_f = 0$ که هزینه انتهایی

معلوم $t_f \Rightarrow \delta t_f = 0$

$\delta x_f$ آزاد ⇐ ضریب باید صفر

$$\Rightarrow \lambda^*(t_f) = \frac{\partial S}{\partial x(t_f)} = \frac{\partial\left[\frac{1}{2} x^T(t_f) F(t_f) x(t_f)\right]}{\partial x(t_f)} = F(t_f)\, x^*(t_f)$$

n شرط ابتدایی $(x(t_0))$ و n شرط انتهایی $(\lambda(t_f))$ مسأله را بصورت دو نقطه مقدار مرزی تبدیل می کند

TPBVP : Two Point Boundary Value Problem

گام ۴: کنترل بهینه حلقه بسته

u تابعی خطی از x است (حل تحلیلی)

(نزدیک شدن)

فرض می کنیم $\lambda^*(t) = P(t)\, x^*(t) \rightarrow \dot{\lambda}^* = \dot{P} x^* + P \dot{x}^*$

$$\Rightarrow u^*(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) P(t)\, x^*(t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}^*(t) = A x^* - B R^{-1} B^T P x^* \quad \text{جایگذاری}$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -Q x^* - A^T P x^* = \dot{P} x^* + P \dot{x}^* \Longrightarrow$$

$$\left[\dot{P} + PA + A^T P + Q - P B R^{-1} B^T P\right] x^*(t) = 0 \xrightarrow[\text{و P مستقل از x}]{\neq 0\ x(t)}$$

ضریب باید صفر باشد

گام ۵: معادله دیفرانسیلی ماتریسی ریکاتی

$$\dot{P} + PA + A^T P + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \qquad (DRE)$$

$$\lambda^*(t_f) = P(t_f)\, x^*(t_f) = F(t_f)\, x^*(t_f) \Rightarrow P(t_f) = F(t_f) \quad \text{شرط مرزی}$$

معادله ریکاتی باید بصورت برگشتی حل شود (نسبت به زمان)

P ماتریس متقارن است $\Rightarrow$ به جای $n^2$ معادله $\rightarrow$ $\frac{n(n+1)}{2}$ معادله داریم

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \text{Minimization}$$

آیا کنترل بدست آمده J را کمینه می کند؟

$$\Longrightarrow u^*(t) = -R^{-1} B^T P\, x^*(t) = -\underbrace{K(t)}_{\text{بهره کالمن}}\, x^*(t)$$

محاسبه شاخص عملکرد

$$J(x(t),t) = \frac{1}{2} x^{*T}(t)\, P(t)\, x^*(t)$$

اگر $x^*$ و $P$ را برای هر لحظه داشته باشیم می‌توانیم $J$ را بیابیم. چون معمولاً $x(t_0)$ معلوم است بنابراین برای محاسبه $J$ کافیست $p(t_0)$ را بیابیم.

$$J(x(t_0),t_0) = \frac{1}{2} x^T(t_0) P(t_0) x(t_0)$$

اثبات:

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left[x^T P x\right] dt = \frac{1}{2} x^T(t_f) \underbrace{P(t_f)}_{=F(t_f)} x(t_f) - \frac{1}{2} x^T(t_0) P(t_0) x(t_0)$$

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) \underbrace{P(t_f)}_{F(t_f)} x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u)\, dt$$

جایگذاری از ۱

$$\overset{1}{=} \frac{1}{2} x^T(t_0) P(t_0) x(t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \Big[ x^T Q x + u^T R u + \underbrace{\frac{d}{dt}(x^T P x)}_{\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + x^T \dot{P} x} \Big] dt$$

جایگذاری $\dot{x}$ و $u$

$$= \frac{1}{2} x^T(t_0) P(t_0) x(t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} x^T \underbrace{\left[Q + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + \dot{P}\right]}_{=0 \text{ ریکاتی}} x\, dt$$

$$\Rightarrow J(x^*(t_0), t_0) = \frac{1}{2} x^{*T}(t_0) P(t_0) x^*(t_0)$$

بنابراین حل ج نیز برقرار است.

نکته: $p(t)$ متقارن مثبت معین است زیرا در معادله ریکاتی آن منفی شده که برخلاف زمان است.

بدون کنترل‌پذیری: چون سیستم خطی است و زمان متناهی بنابراین هیچ یک از حالتها نمی‌توانند به $\infty$ بروند.
دقت شود که در سیستم‌های غیرخطی فرار در زمان محدود داریم.

سیستم LQR با شاخص عملکرد جامع

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left\{ x^T Q x + 2x^T S(t) u(t) + u^T R u \right\} dt$$

$S_{n\times n} \geq 0$ ثابت

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^T P - Q + [PB + S(t)]R^{-1}[B^T P + S^T]$$

$$P(t_f) = F(t_f)$$

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T[S^T + P]\, x^*(t)$$

مثال ۳-۱ سیستم آسترال

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad x_1(0) = 2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 + u \qquad x_2(0) = -3$$

$$J = \tfrac{1}{2}\left[x_1^2(5) + x_1(5)\,x_2(5) + 2x_2^2(5)\right] + \tfrac{1}{2}\int_0^5 \left[2x_1^2(t) + 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 0.25u^2\right]dt$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad R = \frac{1}{4}$$

$t_0 = 0\ ,\ t_f = 5 \qquad x_1(t_f),\ x_2(t_f)$ آزاد

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$u^*(t) = -4\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = -4\left[P_{12}x_1^* + P_{22}x_2^*\right]$$

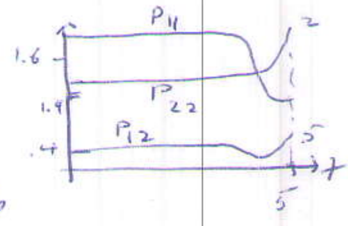
$$\dot{P}(t) = \begin{bmatrix} \dot{P}_{11} & \dot{P}_{12} \\ \dot{P}_{12} & \dot{P}_{22} \end{bmatrix} = -P\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}P + P\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}4\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}P - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

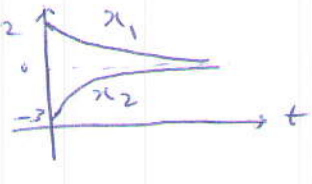
$$\begin{bmatrix} P_{11}(5) & P_{12}(5) \\ P_{12}(5) & P_{22}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & .5 \\ .5 & 2 \end{bmatrix} = F$$

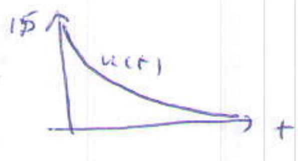
$$\Rightarrow \quad \dot{P}_{11} = 4P_{12}^2 + 4P_{12} - 2 \qquad P_{11}(5) = 1$$

$$\dot{P}_{12} = -P_{11} - P_{12} + 2P_{22} + 4P_{12}P_{22} - 3 \qquad P_{12}(5) = .5$$

$$\dot{P}_{22} = -2P_{12} - 2P_{22} + 4P_{22}^2 - 5 \qquad P_{22}(5) = 2$$




ص ۱۱۹

## سیستم LQR با افق نامتناهی

در این حالت $t_f \to \infty$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right]dt$$

فرض: $u(t)$ غیر مقید

$Q(t)$: P.S.D

$R(t)$: P.D

نکته: هزینه انتهایی مفهومی ندارد.

شرایط:
- حالت‌های کنترل‌ناپذیر باید پایدار باشند، در غیر این صورت $J \to \infty$ و بی‌معنا خواهد بود. فرض می‌کنیم سیستم کاملاً کنترل‌پذیر است.

$$\xRightarrow{\text{از بخش قبل}} \quad u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\hat{P}(t)x^*(t)$$

$$\hat{P}(t) = \lim_{t_f \to \infty} P(t) \qquad \text{تقارن مثبت معین} \qquad t \in [t_0, t_f]$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{P}}(t) = -\hat{P}(t)A(t) - A^T\hat{P}(t) - Q(t) + \hat{P}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\hat{P}(t) \\ \lim\limits_{t_f \to \infty} \hat{P}(t_f) = 0 \qquad \text{شرط نهایی} \end{cases}$$

هزینه بهینه $\quad J^* = \frac{1}{2}x^{*T}\hat{P}(t)x^*(t)$

حالت خاص:

حال اگر سیستم LTI باشد یعنی

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

و تابع هزینه زیر باشد:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right]dt \qquad x \in R^n, \quad u \in R^r$$

سیستم باید کنترل‌پذیر باشد. این شرط تضمین می‌کند که هزینه بهینه $(J^*)$ متناهی بماند!؟

نشان داده شده است [50] ص ۱۳۵ که اگر ۱- سیستم کنترل‌پذیر ۲- $F(t_f)=0$ آنگاه

$$\lim_{t_f \to \infty} P(t_f) = \bar{P}$$

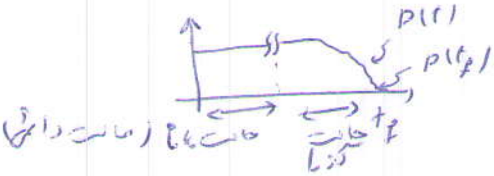
$$\Rightarrow \frac{d\bar{P}}{dt} = 0 \Rightarrow -\bar{P}A - A^T\bar{P} + \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} - Q \xrightarrow{\text{بازنویسی}} \bar{P}A + A^T\bar{P} + Q - \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} = 0$$

ARE

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\bar{P}x^*(t) = -\bar{K}x^*(t)$$

نکته: مگر نباید $\lim\limits_{t_f \to \infty} p(t_f) = 0$ ؟

$\bar{P}$ مقدار حالت ماندگار در اصل



مثال ۳-۲ : برای سیستم مرتبه ۲

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad x_1(0) = 2$$
$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + u(t) \qquad x_2(0) = -3$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 + .25\,u^2\right] dt$$

حل :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad R = 0.25$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \qquad u^*(t) = -4\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} + \bar{P}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{P} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\bar{P}_{12}^2 + 4\bar{P}_{12} - 2 = 0 \\ -\bar{P}_{11} - \bar{P}_{12} + 2\bar{P}_{22} + 4\bar{P}_{12}\bar{P}_{22} - 3 = 0 \\ -2\bar{P}_{12} - 2\bar{P}_{22} + 4\bar{P}_{22}^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{(1)}]{\text{معادله}} \bar{P}_{12} = \cancel{1.7363}\ 0.3660 \xrightarrow{\text{معادله (3)}} \bar{P}_{22} = 1.4729$$

$$\xrightarrow[\text{(2)}]{} \bar{P}_{11} = 1.7363$$

دقت شود که $P$ باید مثبت معین باشد.

$$\Rightarrow u^*(t) = -1.464\,x_1^*(t) - 5.8916\,x_2^*(t)$$

$$J^* = \frac{1}{2} x^T(0)\,\bar{P}\,x(0) = 7.9047$$

مسأله پایداری

- اگر سیستم ناپایدار باشد و حالت های ناپایدار در شاخص عملکرد وزن نداشته باشند، در آن صورت برای حالتهای ناپایدار چه اتفاقی می افتد؟ در این حالت این حالت ناپایدار بدون حالتهایی که در شاخص عملکرد وجود دارند را داشته باشند به عبارت دیگر زوج $(A,C)$ باید آشکارپذیر باشد. $Q = C^TC$ یعنی حالتهای ناپایدار باید به گونه ای دیده شوند. این شرط پایداری سیستم حلقه بسته را تضمین می کند. همچنین اگر زوج $(A,C)$ رؤیت پذیر باشد، ماتریس ضرایب ریکاتی $\bar{P}$ مثبت معین است.

درنهایت اگر

بنابراین برای پایداری حلقه بسته، شروط آشکارپذیری و پایدارپذیری لازم است.

روش LQR یک سیستم حلقه بسته کنترلی را ارائه می‌دهد که با کنترل بهینه حلقه باز کاملاً هم‌ارز است.

حل: برای سیستم مرتبه اول زیر کنترل بهینه حلقه باز و حلقه بسته را بیابید.

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + u(t)$$

$$J = \int_0^{\infty} [x^2 + u^2]\, dt \qquad x(0) = 1 \;,\; x(\infty) = 0$$

الف - حلقه باز

از روش پونتریاگین استفاده می‌کنیم.

$$V(x,u) = x^2 + u^2$$

$$f(x,u) = -3x + u$$

$$\mathcal{H} = V + \lambda f = x^2 + u^2 + \lambda[-3x + u]$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \rightarrow 2u^* + \lambda^* = 0 \rightarrow u^* = -\tfrac{1}{2}\lambda^*$$

$$* \quad \dot{x}^* = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = -\tfrac{1}{2}\lambda^* - 3x^* \qquad \xrightarrow{**} \quad \ddot{x}^* - 10x^* = 0 \rightarrow x^*(t) = c_1 e^{\sqrt{10}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{10}\,t}$$

$$\dot{\lambda}^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -2x^* + 3\lambda^*$$

$$*,** \rightarrow \lambda^* = -2[\dot{x}^* - 3x^*] = -2c_1(\sqrt{10}+3)e^{\sqrt{10}\,t} + 2c_2(\sqrt{10}-3)e^{-\sqrt{10}\,t}$$

$$x(0) = 1 \rightarrow c_1 + c_2 = 1 \qquad \rightarrow c_2 = 1 \rightarrow x^*(t) = e^{-\sqrt{10}\,t}$$

$$x(\infty) = 0 \rightarrow c_1 = 0 \qquad \lambda^*(t) = 2(\sqrt{10}-3)e^{-\sqrt{10}\,t}$$

$$\rightarrow u^*(t) = -(\sqrt{10}-3)e^{-\sqrt{10}\,t}$$

ب - حلقه بسته

$$A = -3 \quad B = 1 \quad Q = 2 \quad R = 2 \quad \bar{P} = \bar{P}$$

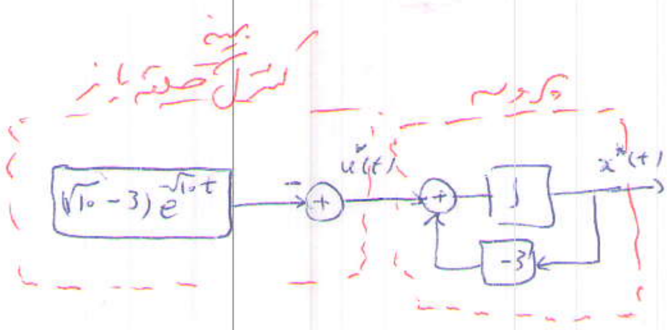
$$\bar{P}(-3) + (-3)\bar{P} - \bar{P}(1)(\tfrac{1}{2})\bar{P} + 2 = 0 \rightarrow \bar{P}^2 + 12\bar{P} - 4 = 0 \rightarrow \bar{P} = -6 \pm 2\sqrt{10}$$

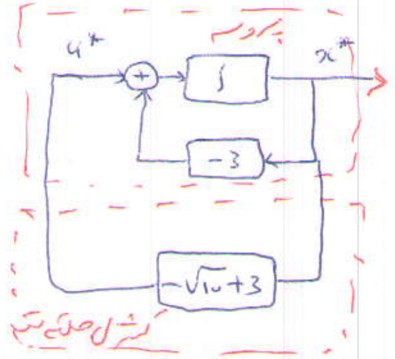
چون باید $\bar{P} > 0$ پس $\bar{P} = -6 + 2\sqrt{10}$

$$\rightarrow u^* = -R^{-1}B^T\bar{P}x^* = -\tfrac{1}{2}(-6 + 2\sqrt{10})x^*(t) = (3 - \sqrt{10})x^*(t)$$

$$\dot{x}^*(t) = -3x^*(t) + u^*(t) = -3x^* + (+3 - \sqrt{10})x^* \xRightarrow{\text{حل}} x^*(t) = e^{-\sqrt{10}\,t} \rightarrow u^* = (3 - \sqrt{10})e^{-\sqrt{10}\,t}$$

دقیقاً برابر کنترل حلقه باز بدست می‌آید



فصل چهارم

## سیستم‌های کنترل بهینه خطی مربعی (ردیابی)

در سیستم‌های ردیابی، هدف آن است که خروجی سیستم مسیر را به صورت بهینه دنبال کند. حالت سیستم رگولاتوری، حالت خاص می‌باشد که مسیر دلخواه، حالت صفر است.

### سیستم ردیابی خطی مربعی با افق متناهی (LQT)

هدف حفظ خروجی سیستم نزدیک خروجی مطلوب با حداقل انرژی است

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad u \in \mathbb{R}^r,\ y(t) \in \mathbb{R}^m$$
$$y(t) = C(t)x(t)$$

فرض: $z(t)$ خروجی مطلوب

$$e(t) = z(t) - y(t)$$ بردار خطا

$$J = \frac{1}{2} e^T(t_f)F(t_f)e(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[ e^T(t)Q(t)e(t) + u^T(t)R(t)u(t) \right] dt$$

$Q_{m\times m}$ : P.S.D $\qquad R_{r\times r}$ : P.D

- اصل حداقل پونتریاگین

گام ۱: تشکیل همیلتونین

$$\mathcal{H}(x(t),u(t),\lambda(t)) = \frac{1}{2}[z - Cx]^T Q [z - Cx] + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T(t)[Ax + Bu]$$

گام ۲: کنترل حلقه باز

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u(t)} = 0 \implies u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda^*(t)$$

گام ۳: معادلات حالت و کمک حالت

$$\dot{x}^* = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = Ax + Bu = Ax^* - BR^{-1}B^T\lambda^*$$

$$\dot{\lambda}^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -C^TQCx^* - A^T\lambda^* + C^TQz$$

فرض $\quad E(t) = B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \qquad V(t) = C^TQC$

$W(t) = C^TQ$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{\lambda}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ -V & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ W \end{bmatrix} z$$

نکته: معادله همگن نیست

در حالت رگولاتوری همگن بود

$x(t_f)$ آزاد، $t_f$ معلوم $\Rightarrow \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial}{\partial x(t_f)}\left[\frac{1}{2} e^T F(t_f)\, e(t_f)\right] = C^T(t_f)F(t_f)\overbrace{C(t_f)}\, x(t_f) - C^TFz \quad *$

گام ۴: معادلات ریکاتی

شرط مرزی فوق نشان می‌دهد که $x$ و $\lambda$ رابطه خطی دارند:

$$\lambda^*(t) = P(t)x^*(t) - g(t)$$

با قرار دادن $\lambda^*$ در معادلات حالت و کمک حالت داریم:

$$-Vx^* - A^T[Px^* - g] + Wz = \dot{P}x^* + P[Ax - E\{Px - g\}] - \dot{g}$$

$$\Rightarrow [\dot{P} + PA + A^TP - PEP + V]x^*(t) - [\dot{g}(t) + A^Tg - PEg + Wz] = 0$$

رابطه فوق برای x و z برقرار است بنابراین

$$\Rightarrow \underset{n\times n}{\dot{P}(t)} = -PA - A^TP + PEP - V \qquad \text{DRE}$$

$$\underset{n\times 1}{\dot{g}(t)} = [PE - A^T]g - Wz$$ معادله دیفرانسیل برداری

با توجه به * (شرط مرزی)

شرط مرزی $\lambda(t_f) = P(t_f)x(t_f) - g(t_f) \Rightarrow \begin{cases} P(t_f) = C^TFC \\ g(t_f) = C^TF(t_f)z \end{cases}$ نسبت به زمان به صورت بازگشتی حل می‌شوند.

گام ۵: کنترل بهینه حلقه بسته

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T[Px^* - g] = -\underbrace{K(t)}_{\text{بهره کالمن}}x^*(t) + R^{-1}B^Tg$$

گام ۶: ~~هزینه بهینه~~ بردار حالت بهینه

$$\dot{x}^* = [A - EP]x^* + Eg$$

گام ۷: هزینه بهینه:

$$J^* = \frac{1}{2}x^{*T}Px^* - x^{*T}g + h(t)$$

$$\dot{h}(t) = -\frac{1}{2}g^TBR^{-1}B^Tg - \frac{1}{2}z^TQz$$

$$= -\frac{1}{2}g^TEg - \frac{1}{2}z^TQz$$

$$h(t_f) = -z^T(t_f)P(t_f)z(t_f)$$

ویژگی‌های سیستم ردیابی

۱- ماتریس ریکاتی به $z(t)$ (خروجی مطلوب) وابسته نیست.

۲- ماتریس حلقه بسته مشابه حالت رگولاتوری است $[A - BR^{-1}B^TP]$

۳- اگر $C = I$ آنگاه $V = Q$ و معادله ریکاتی مشابه حالت رگولاتوری است.

مثال ۴-۱ سیستم مرتبه دوم

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad x(0) = \begin{bmatrix} -.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1 - 3x_2 + u$$

$$y(t) = x(t)$$

$$J = [1 - x_1(t_f)]^2 + \int_{t_0}^{t_f} \{[1 - x_1]^2 + 0.002\, u^2\}\, dt \qquad t_f = 20$$

$x(t_f)$ آزاد

هدف: حفظ حالت $x_1$ نزدیک به مقدار ۱ است

حل $\Rightarrow Z_1(t) = 1$

چون هیچ شرطی روی $x_2$ نیست فرض می‌کنیم $Z_2(t) = 0$

$$e_1 = Z_1 - x_1 \qquad C = I \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = Z_2 - x_2 \qquad Q = F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = 0.004$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \qquad g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$$

$$u^*(t) = -250\,[P_{12}\, x_1^* + P_{22}\, x_2^* - g_2]$$

$$\dot{P} = -PA - A^T P + P B R^{-1} B^T P - Q$$

$$\dot{g} = -\{A - B R B^T P\}^T \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} - A C^T Q C$$

$$\Rightarrow \quad \dot{P}_{11} = 250 P_{12}^2 + 4P_{12} - 2$$

$$\dot{P}_{12} = 250 P_{12} P_{22} - P_{11} + 3P_{12} + 2P_{22}$$

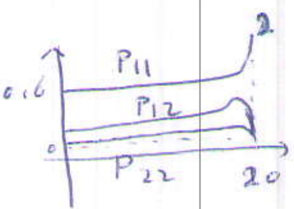
$$\dot{P}_{22} = 250 P_{22}^2 - 2P_{12} + 6P_{22}$$

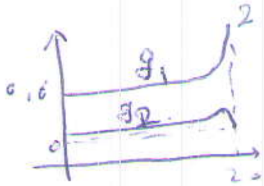
شرط نهایی $\begin{bmatrix} P_{11}(t_f) & P_{12}(t_f) \\ P_{12}(t_f) & P_{22}(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\dot{g}_1 = [250 P_{12} + 2]\, g_2 - 2$$

$$\dot{g}_2 = -g_1 + [3 + 250 P_{22}]\, g_2$$

$$\begin{bmatrix} g_1(t_f) \\ g_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = C^T F Z\big|_{t_f}$$

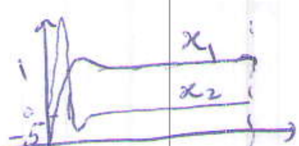



دو چیز را بررسی کنید

۱- [illegible] مسئله را حل کنید

۲- $Z_2 \neq 0$




$x_1$ خیلی زودتر از 20 به مقدار نهایی خود می‌رسد.

حل ۴-۲، بر عهده دانشجو. ص ۱۵۲

## سیستم ردیاب خطی درجه دوم (LQT) با افق نامتناهی

سیستم را به صورت LTI و ماتریس ضرایب وزنی را ثابت فرض می‌کنیم

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$y(t) = Cx(t)$

$e(t) = z(t) - y(t) = z(t) - Cx(t)$

$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}[e^T(t)Qe(t) + u^T(t)Ru(t)]\,dt \quad \rightarrow F = 0$

$p(t) \rightarrow \bar{P} \quad \text{as} \quad t_f \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad -\bar{P}A - A^T\bar{P} + \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} - C^TQC = 0$

$g(t) \rightarrow \bar{g}(t)$ دست می‌آید $\qquad \dot{\bar{g}}(t) = [\bar{P}E - A^T]\bar{g} - Wz(t)$

$E = BR^{-1}B^T \qquad$ اگر $z(t)$ ثابت باشد $\bar{g}(t) \leftarrow \bar{g}$

$W = C^TQ$

$u(t) = -R^{-1}B^T[\bar{P}x(t) - \bar{g}(t)]$

## سیستم رگولاتور (تنظیم کننده) با نقطه نهایی ثابت

$0 = x(t_f)$ ، $t_f$ معلوم

حل مشابه به معادله ریکاتی می‌رسیم. تنها تفاوت در شرایط مرزی است.

$\lambda(t_f) = F(t_f)x(t_f) = p(t_f)x(t_f)$

چون $x(t_f)=0$ و $\lambda(t_f)$ اختیاری لذا $p(t_f)=\infty$ یعنی با شرط مرزی بی‌نهایت باید شروع کنیم. برای غلبه بر مشکل از تبدیل معکوس ریکاتی استفاده می‌کنیم.

$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u(t)$

$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(x^TQ(t)x + u^TR(t)u)\,dt \qquad$ فرض: کنترل نامقید

$x(t_0) = x_0 \quad , x(t_f) = x_f = 0 \qquad$ چرا هزینه نهایی در نظر نمی‌گیریم؟ چون ثابت است.

گام ۱: همیلتونین

$\mathcal{H}(x,u,\lambda) = \frac{1}{2}x^TQx + \frac{1}{2}u^TRu + \lambda^T[Ax + Bu]$

گام ۲: کنترل بهینه

$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \rightarrow u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda^*(t)$

گام ۳: معادلات حالت و کمک حالت

$\dot{x}^* = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = Ax^* + Bu^* = Ax^* - \underbrace{BR^{-1}B^T}_{E(t)}\lambda^*$

$\dot{\lambda}^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -Qx^* - A^T\lambda^*$

$\rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}^* \\ \dot{\lambda}^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & -E \\ -Q & -A^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^* \\ \lambda^*\end{bmatrix}$

TPBVP

گام ۴: کنترل بهینه حلقه بسته

اگر $\lambda(t_f)$ معلوم بود مانند قبل $\lambda^*(t)=P(t)\,x^*(t)$ را در نظر می‌گرفتیم. ولی اکنون هیچ اطلاعاتی در مورد $\lambda^*(t_f)$ نداریم.

لذا یک معکوس ریکاتی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$x^*(t)=\underset{n\times n}{M(t)}\,\lambda^*(t)$$

$$\dot{x}^*(t)=\dot{M}\lambda^*+M\dot{\lambda}^* \;\rightarrow\; [\dot{M}-AM-MA^T-MQM+BR^{-1}B^T]\,\lambda^*(t)=0$$

رابطه فوق باید برای هر $\lambda^*(t)$ برقرار باشد لذا:

$$\dot{M}(t)=AM+MA^T+MQM-BR^{-1}B^T$$

معادله دیفرانسیل ماتریسی ریکاتی معکوس

$$u^*(t)=-R^{-1}B^TM^{-1}(t)\,x^*(t)$$

گام ۵: شرایط مرزی

۱- $x(t_f)=0$ و $x(t_0)\neq 0$

$$x(t_f)=0=M(t_f)\,\lambda(t_f)\xrightarrow{\lambda\ \text{اختیاری}}M(t_f)=0$$

۲- $x(t_f)\neq 0$ و $x(t_0)=0$

$$x(t_0)=0=M(t_0)\,\lambda(t_0)\longrightarrow M(t_0)=0$$

۳- شرایط مرزی جامع $x(t_f)\neq 0$، $x(t_0)\neq 0$ از تبدیل زیر استفاده می‌کنیم.

$$x^*(t)=M(t)\lambda^*+v(t)\rightarrow \dot{x}^*=\dot{M}\lambda^*+M\dot{\lambda}^*+\dot{v}$$

$$\Rightarrow [\dot{M}-AM-MA^T-MQM+BR^{-1}B^T]\,\lambda^*+[\dot{v}-MQv-Av]=0$$

$$\overset{\lambda\ \text{اختیاری}}{\Rightarrow}\begin{cases}\dot{M}(t)=AM+MA^T+MQM-BR^{-1}B^T\\ \dot{v}(t)=M(t)Q(t)v(t)+A(t)v(t)\end{cases}\qquad (*)$$

$$x^*(t_0)=M(t_0)\lambda^*(t_0)+v(t_0)\xrightarrow{\lambda(t_0)\ \text{اختیاری}}M(t_0)=0\,,\;v(t_0)=x(t_0)\qquad (**)$$

$$x^*(t_f)=M(t_f)\lambda^*(t_f)+v(t_f)\xrightarrow{\lambda(t_f)\ \text{اختیاری}}M(t_f)=0\,,\;v(t_f)=x(t_f)\qquad (***)$$

بنابراین معادلات (*) با شرایط (**) یا (***) حل می‌شوند.

$$\Rightarrow u^*(t)=-R^{-1}B^TM^{-1}[x^*-v(t)]$$

حل ۵-۴-۲، ص ۱۶۱ بر عهده دانشجو

## سیستم LQR با درجه ~~آزادی~~ مشخصی از پایداری

فرض: سیستم LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

تابعی زیر را در نظر بگیرید:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} e^{2\alpha t}\left[x^T(t)\,Q\,x(t) + u^T(t)\,R\,u(t)\right]dt$$

$Q \geq 0$ , $R > 0$   $(A+\alpha I, B)$ زوج پایدارپذیر   $\alpha > 0$ اسکالر

از تبدیل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\hat{x}(t) = e^{\alpha t}x(t) \quad , \quad \hat{u}(t) = e^{\alpha t}u(t)$$

$$\dot{\hat{x}} = \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}x(t)\right) = \alpha e^{\alpha t}x + e^{\alpha t}\dot{x} = \alpha\hat{x} + e^{\alpha t}\left[Ax + Bu\right]$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}} = (A+\alpha I)\hat{x} + B\hat{u}(t) \qquad \hat{x}(t_0) = e^{\alpha t_0}x(t_0)$$

$$\hat{J} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left[\hat{x}^T Q\,\hat{x}(t) + \hat{u}^T R\,\hat{u}\right]dt$$

$$\Rightarrow \hat{u}^* = -\underbrace{R^{-1}B^T\bar{P}}_{\bar{K}}\,\hat{x}^*(t) = -\bar{K}\,\hat{x}^*(t)$$

ARE از حل $\bar{P}$ بدست می‌آید:

$$\bar{P}(A+\alpha I) + (A^T+\alpha I)\bar{P} - \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} + Q = 0$$

$$\xrightarrow{\text{سیستم حلقه بسته}} \quad \dot{\hat{x}}^*(t) = (A+\alpha I - BR^{-1}B^T\bar{P})\,\hat{x}^*(t)$$

کنترل بهینه سیستم اصلی:

$$u^*(t) = e^{-\alpha t}\hat{u}^*(t) = -e^{-\alpha t}R^{-1}B^T\bar{P}\,e^{\alpha t}x^*(t) = -R^{-1}B^T\bar{P}\,x^* = -\bar{K}\,x^*(t)$$

$$\hat{J}^* = \frac{1}{2}\hat{x}^{*T}(t_0)\,\hat{P}\,\hat{x}^*(t_0) = \frac{1}{2}e^{2\alpha t_0}x^{*T}(t_0)\,\bar{P}\,x^*(t_0)$$

بنابراین حالت $x^*(t)$ با سرعت حداقل $e^{-\alpha t}$ به سمت صفر میل می‌کند. ~~بنابراین~~ یعنی سیستم دارای درجه پایداری حداقل $\alpha$

**مثال ۴-۴:** برای سیستم حلقه بسته زیر نشان دهید که درجه پایداری حداقل از درجه $\alpha$ است.

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \qquad x(0) = 1$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{2\alpha t}\left[x^2 + u^2\right]dt$$

حل

$$A = -1,\ B = 1,\ Q = 1,\ R = 1 \qquad ARE:\ 2\bar{P}(\alpha-1) - \bar{P}^2 + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\bar{P}^2 - 2\bar{P}(\alpha-1) - 1 = 0 \longrightarrow \bar{P} = -1 + \alpha + \sqrt{(\alpha-1)^2+1} \qquad (\text{مثبت})$$

$$u^*(t) = -\bar{P}\,x^*(t) \quad \xrightarrow{\text{سیستم حلقه بسته}} \quad \dot{x}^*(t) = \big(\underbrace{-\alpha - \sqrt{(\alpha-1)^2+1}}_{<-\alpha}\big)\,x^*(t)$$

حد بهره و حد فاز

حد بهره سیستم LQR، $\frac{1}{2} < B < \infty$ و حد فاز حداقل برابر $60^\circ$ است.