۱۰section.۲.۲

درس‌نامه فیزیک پایه ۱

سید علی حسینی منصوری و مجید حسنی

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

۱۸ مهر ۱۴۰۰

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

تماشای آسمان پُر ستاره‌ی شب و غوطه‌ور شدن در اقیانوس بی‌کرانه‌ی ستارگان همواره جذاب است. لذت بردن از تماشای این صحنه‌های بدیع می‌تواند این سوال را در ذهن تداعی کند که ما در کجای این پهنه‌ی گسترده قرار داریم؟ آیا در این زیبایی‌ها نظمی وجود دارد؟ راه شناخت این طبیعت بدیع چیست؟ کنجکاوی و کنکاش در این سوالات می‌تواند ذهن ما را با انبوهی سوال‌های دیگر در گیر کند. برای پرسیدن سوال‌هایی از این دست کافی است ساده‌ترین اتفاقاتی را که هر روزه در مقابل چشم‌های ما رخ می‌دهند، دقیق‌تر ببینیم. روزانه هزاران برگ از درختان جدا شده و به روی زمین می‌اُفتند و هزاران نفر نظاره‌گر این صحنه هستند ولی همگی به سادگی از کنار آن می‌گذرند. کافی است ذهن پرسش‌گر خود را فعال کرده و سوال‌هایی ساده از خود بپرسید. چرا برگ به زمین افتاده و به سمت بالا نمی‌رود؟ اگر قرار است رها شدن هر جسمی در اطراف زمین در نهایت به این منجر شود که آن جسم به زمین سقوط کند، پس چرا ماه به سطح زمین سقوط نمی‌کند؟

پرسیدن سوال‌هایی از این دست در طول تاریخ بشر سبب گسترش دانش ما از طبیعت اطراف شده است. طبیعتی که دامنه‌ی بسیار وسیعی دارد. می‌توان از کوچک‌ترین ذرات تشکیل‌دهنده‌ی عالم که هسته‌ی اتم‌ها هستند، شروع کرد. آیا واقعا هسته‌ی اتم با ابعاد 10^{-15}متر کوچک‌ترین جز است؟ می‌دانیم که هسته‌ها خود از پروتون‌ها و نوترون‌ها ساخته شده‌اند. ولی آیا پروتون‌ها و نوترون‌ها خود از ذرات دیگر تشکیل می‌شوند؟ پاسخ مثبت است. پروتون‌ها خود از ذرات بنیادی‌تری به نام کوارک ساخته شده‌اند. اگر به هسته‌ها ابری از الکترون‌ها اضافه شود، اتم‌ها ساخته می‌شوند. ابعاد اتم‌ها از مرتبه‌ی 10^{-10}متر است. می‌بینیم فضای بسیار زیادی که بین ابعاد هسته و اتم وجود دارد، توسط ابر الکترونی اشغال شده است.از کنار هم قرار گرفتن اتم‌ها مولکول‌ها و ساختار های درشت مقیاس تشکیل می‌شود. مثلا از کنار هم قرار گرفتن تعداد بسیار زیادی از مولکول‌ها در کنار هم، یک ذره‌ی خاک رُس تشکیل می‌شود که ابعاد نوعی در حدود 10^{-4}متر دارد و به زحمت با چشم قابل مشاهده است. اگر تعداد ذراتی را که در کنار هم قرار می‌گیرند، افزایش دهیم اجسامی که در اطراف ما قابل مشاهده هستند، به دست می‌آید. آن‌چه در زندگی روزمره با آن سروکار داریم، از ابعاد متر است. ولی به کوه‌های اطراف خود در روی کره‌زمین نگاه می‌کنیم، متوجه می‌شویم ارتفاع آن‌ها بسیار بیش‌تر از متر بوده و از مرتبه‌ی 10^{3}متر هستند. همه‌ی آن چه ما مشاهده می‌کنیم بر روی کره‌ی زمین قرار دارد که شعاع آن از مرتبه‌ی 10^{6}متر است. همان‌طور که می‌دانیم زمین یکی از چند سیاره‌ی دیگری است که به دور ستاره‌ی خورشید با ابعاد 10^{9}متر می‌چرخد. این مجموعه را منظومه‌ی شمسی می‌نامند. در کنار منظومه‌ی شمسی منظومه‌های دیگر وجود دارند. که همه‌ی آن‌ها در کهکشان راه شیری با ابعاد 10^{21}متر قرار دارند. در کنار کهکشان ما کهکشان‌های دیگری وجود دارد که نزدیک‌ترین آن‌ها کهکشان اندرومدا است. تعداد زیادی دیگر از کهکشان‌ها در کنار هم خوشه‌های کهکشانی را تشکیل می‌دهند که ابعاد آن از مرتبه‌ی 10^{24}متر است.

سفری که با هم شروع کردیم از 10^{-15}متر شروع شد و به 10^{24}متر ختم گردید. فیزیک علم مطالعه‌ی طبیعت در پهنه‌ی از 10^{-15}متر تا 10^{24}متر است؛ کار فیزیک‌دان مطالعه‌ی طبیعت و مدل‌سازی برای رفتار آن در این پهنه است. مدل‌هایی که توسط فیزیک‌دان‌ها نوشته می‌شود تنها زمانی با ارزش است که با نتایج آزمایشگاهی و تجربی سازگار باشد.
در این درس‌نامه مکانیک کلاسیک را مطالعه می‌کنیم که بر اساس دانش ما در ابعاد متر به درستی به توصیف طبیعت می‌پردازد. بنای عظیم که بسیاری از دستاوردهای مهندسی از نتایج آن است.

فصل ۲

کمیت‌های فیزیکی و تحلیل ابعادی

همان‌گونه که در قسمت قبل گفته شد مشاهده و اندازه‌گیری بخش جدایی‌ناپذیر نظریه‌های فیزیکی است. آن‌چه را که با یک ابزار مشخص قابل اندازه‌گیری است، کمیت فیزیکی می‌نامیم. کمیت‌های فیزیکی به دو دسته‌ی کمیت‌های اسکالر (عددی) و کمیت‌های برداری تقسیم می‌شوند. کمیت‌های اسکالر به کمیت‌هایی گفته می‌شود که مقدار آن‌ها تنها با یک عدد حقیقی بیان می‌شود، مانند جرم، زمان، دمای اتاق. در حالی که کمیت‌های برداری علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز هستند. برای نمونه نیرویی که توسط یک طناب به یک جسم وارد می‌کنید، دارای بزرگی و جهت است؛ یعنی هم مقدار نیروی صرف شده و هم کشیدگی طناب را (که نشان دهنده‌ی جهت نیرو است) در خود دارد.
نکته: بزرگی این کمیت‌ها اعم از اسکالر و برداری، به دو دسته کمیت‌های بُعددار و بدون‌بُعد تقسیم می‌شوند. کمیت‌های بُعددار به کمیت‌هایی گفته می‌شود که بزرگی آن‌ها با تغییر ابزار اندازه‌گیری تغییر می‌کند، مثلا فاصله شاهرود تا تهران با متر حدود ۴۰۰۰۰۰ متر است در صورتی که کیلومتر شمار ماشین عدد ۴۰۰ را نشان می‌دهد.

۱.۲ تحلیل ابعادی

در فیزیک هفت کمیت اصلی وجود دارد که کمیت‌های دیگر را می‌توان بر اساس آن‌ها نوشت. این کمیت‌ها عبارتند از طول (L)، جرم (M)، زمان (T)، جریان الکتریکی (A)، دما $(\mathcal{T})$، مقدار ماده (n)، و شدت روشنایی (I_v) . در سیستم استاندارد واحدها (SI) واحد این کمیت‌ها به ترتیب عبارتند از متر، کیلوگرم، آمپر، کلوین، مول، و کاندلا. البته می‌توان سیستم‌های دیگر انتخاب کرد که مقدار این واحدها در آن متفاوت است ولی بُعد آن‌ها همواره ثابت است (شکل ۱.۲ را مشاهده نمایید.). نوشتن کمیت بر حسب بُعد، تحلیل ابعادی [1] نام دارد. وقتی می‌خواهیم کمیتی را تحلیل ابعادی کنیم، آن را در [ ] قرار می‌دهیم، مثلا

$$[x] = L \qquad [t] = T \qquad [i] = A \tag{۱.۲}$$

مثال: می‌دانیم که مساحت بُعد مربع طول دارد. بنابراین

$$[\mathcal{A}] = L^2, \tag{۲.۲}$$

است. تحلیل ابعادیِ سرعت برابر

$$v = \frac{x}{t} \longrightarrow [v] = LT^{-1}, \tag{۳.۲}$$

[1] dimensional analysis

شکل ۱.۲: واحد های اصلی SI

است. تحلیل ابعادیِ شتاب برابر

$$a = \frac{v}{t} \longrightarrow [a] = LT^{-2}, \tag{۴.۲}$$

است. بنابراین تحلیل ابعادیِ نیرو

$$F = ma \longrightarrow [F] = MLT^{-2}, \tag{۵.۲}$$

و تحلیل ابعادیِ انرژی

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow [E] = ML^2T^{-2} \tag{۶.۲}$$

است. برای به دست آوردن بُعد بار الکتریکی از کمیت جریان الکتریکی کمک می‌گیریم، چون جریان کمیت اصلی است. پس

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \longrightarrow [q] = AT. \tag{۷.۲}$$

در نتیجه بُعد میدان الکتریکی به صورت

$$E = \frac{F}{q_0} \longrightarrow [E] = MLA^{-1}T^{-3}. \tag{۸.۲}$$

و بُعد میدان مغناطیسی

$$F = qvB \longrightarrow [B] = MA^{-1}T^{-2}. \tag{۹.۲}$$

است.

تمرین: به کمک آن‌چه در بالا گفته شد، استفاده از قانون کولن که $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$ و میدان مغناطیسی در مرکز حلقه‌ی جریان که $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ است، بُعد ϵ_0 و μ_0 را تعیین کنید. برای آن که در نهایت روابط خود را راستی‌آزمایی

کنید از رابطه‌ی $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ که c سرعت نور است و بُعد سرعت دارد، کمک بگیرید.
تمرین: به کمک رابطه‌ی $F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$ بُعد G (ثابت جهانی گرانش) را محاسبه کنید.
تمرین: به کمک رابطه‌ی $E = hf$ که در آن f بسامد و h ثابت پلانک است. بُعد h را محاسبه کنید.

به سادگی می‌توان دریافت که تحلیل ابعادی ابزاری قدرتمند در مطالعه‌ی فیزیک است. در دو سمت یک رابطه‌ی فیزیکی باید از لحاظ بُعد سازگاری وجود داشته باشد. حتی زمانی که اطلاعات بسیار کمی از یک کمیت در اختیار ما قرار دارد، تحلیل ابعادی به یافتن یک رابطه کمک فراوانی می‌کند. فرض کنید گلوله‌ی کوچکی به یک طناب آویزان است. از ما خواسته می‌شود تنها به کمک تحلیل ابعادی رابطه‌ای برای دوره‌ی تناوب این آونگ به دست آوریم. چون تنها ابزار ما تحلیل ابعادی است فقط باید از بُعد کمیت‌ها استفاده کنیم. از خود سوال می‌پرسیم که دوره‌ی تناوب آونگ به چه کمیت‌هایی می‌تواند بستگی داشته باشد؟ در پاسخ می‌توان از طول آونگ (l)، جرم آونگ (m)، زاویه‌ای که آونگ را به نوسان در آورده‌ایم (θ)، و شتاب گرانش زمین (g) یاد کرد. چون تنها ابزار ما تحلیل ابعادی است، باید تابعی از کمیت‌های بالا بسازیم که در نهایت فقط بُعد زمان داشته باشد. بنابراین دوره‌ی نوسان آونگ حاصل‌ضربی از توان‌های نامشخص کمیت‌های بالا است. پس

$$T = l^\alpha m^\beta g^\gamma \theta^\lambda \tag{۱۰.۲}$$

است. حاصل‌ضرب کمیت‌های سمت راست رابطه‌ی (۱۰.۲) در نهایت باید بُعد زمان داشته باشند تا با سمت چپ سازگار باشند. در ادامه به جای کمیت‌های رابطه‌ی (۱۰.۲) بُعد آن‌ها را قرار می‌دهیم. چون زاویه در یکاهای استاندارد بدون بُعد است، پس رابطه‌ی ما در مورد زاویه‌ی شروع نوسان اطلاعاتی به ما نمی‌دهد $(\lambda = 0)$.

$$T = L^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-2\gamma} = L^{\alpha+\gamma} M^\beta T^{-2\gamma} \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 0 \\ -2\gamma = 1 \longrightarrow \gamma = \frac{-1}{2} \end{cases} \tag{۱۱.۲}$$

در نتیجه رابطه‌ای که ما فقط به کمک تحلیل ابعادی برای دوره‌ی نوسان آونگ به دست آوردیم، برابر $T = \sqrt{\frac{l}{g}}$ است، که بسیار به رابطه‌ی دقیق آن شباهت دارد.
مثال ساده‌ی بالا نشان داد که تحلیل ابعادی ابزاری قدرتمند در فیزیک است. در هنگام استفاده از این تحلیل باید به نکات زیر دقت کرد:

- اگر در یک رابطه، عدد ثابت و یا کمیت‌های بدون بُعد مانند زاویه وجود داشته باشد، این مقادیر با تحلیل ابعادیِ صِرف به دست نخواهند آمد.

- در رابطه‌ای که به کمک تحلیل ابعادی به دست می‌آوریم، همواره کمیت‌ها در هم ضرب و یا بر هم تقسیم می‌شوند. به کمک تحلیل ابعادیِ صِرف نمی‌توان رابطه‌ای نوشت که کمیت‌ها با هم جمع شده‌اند (مگر آن‌که از جایی اطلاعات دیگری داشته باشیم). چون وقتی دو کمیت با هم جمع می‌شوند یعنی این که بُعد یکسانی دارند. در نتیجه نمی‌توانیم آن‌ها را از هم تمیز دهیم.

- ابزار قدرتمند تحلیل ابعادی در مسائلی که چند کمیت با بُعد یکسان در مسئله دخیل هستند، کارایی خود را از دست می‌دهد. مثلا فرض کنید در مسئله چند کمیت با بُعد طول بر نتایج تاثیر می‌گذارند.

تمرین: به کمک آن‌چه در بالا گفته شد، از سه ثابت جهانی فیزیک یعنی c, G, h کمیتی بسازید که
الف) بُعد طول داشته باشد.

Table 1.1 RADIUS R OF BLAST WAVE AFTER TIME T

T/msec	R/m
0.10	11.1
0.24	19.9
0.38	25.4
0.52	28.8
0.66	31.9
0.80	34.2
0.94	36.3
1.08	38.9
1.22	41.0
1.36	42.8
1.50	44.4
1.65	46.0
1.79	46.9
1.93	48.7
3.26	59.0
3.53	61.1
3.80	62.9
4.07	64.3
4.34	65.6
4.61	67.3
15.0	106.5
25.0	130.0
34.0	145.0
53.0	175.0
62.0	185.0

ب) بُعد زمان داشته باشد.
ج) بعد جرم داشته باشد.
تمرین: در سال ۱۹۴۷ میلادی، مجموعه‌ای عکس از نخستین انفجار اتمی در سال ۱۹۴۵ در نیومکزیگو در مجله‌ی لایف چاپ شد. این عکس‌ها شعاع موج شوکی کروی را در زمان‌های متوالی بر حسب میلی ثانیه نشان می‌داد. از عکس‌ها می‌توان شعاع موج کروی را به عنوان تابعی از زمان بدست آورد: نتایج در جدولِ ۱.۲ آمده است. با فرض این‌که سطح زمین در انتشار موج تاثیر چندانی ندارد، و حرکت موج فقط به انرژی آزاد شده از انفجار E و چگالی هوایِ بیرون ρ بستگی داشته باشد، شعاع موج انفجار را به عنوان تابعی از زمان محاسبه نمایید. به کمک جدول انرژی آزاد شده از انفجار را تخمین بزنید.

۲.۲ واحد طبیعی[۲]

همان‌طور که اشاره شد زمانی که به ابعاد 10^{-10} یا پایینتر سفر می‌کنیم به ذرات مانند الکترون، پروتون، نوترون و کوارک‌ها خواهیم رسید که جرمی بسیار کمی دارند. برای مثال جرم الکترون از مرتبه 10^{-31} کیلوگرم دارد و حتی پروتون 10^{-27} کیلوگرم جرم دارد. مشاهده می‌کنید که برحسب واحد کیلوگرم این مقادیر بسیار ناچیز هستند و این دلیلی است که نشان می‌دهد واحد استاندارد (SI) واحد مناسبی برای این ذرات نمی‌باشد. واحد مناسب در مورد فیزیک ذارت، واحد طبیعی است که بر پایه ثابت پلانک $\hbar = h/2\pi$ (برگرفته از مکانیک کوانتومی)، سرعت نور c (برگرفته از نسبیت) و نیز واحد انرژی $GeV(10^9 eV)$ بیان می‌شود. توجه کنید که $1eV = 1/6 \times 10^{-19} j$ است. در جدول ۱.۲ واحدهای کمیت‌های دیگر نظیر جرم، طول و زمان برحسب واحد انرژی با استفاده از ثابت‌های پلانک و سرعت نور نوشته شده است. اکنون در مورد فیزیک ذرات، می‌توانیم در واحد طبیعی کار کنیم که مقدار

[۲] Natural Unit

جدول ۱.۲: واحدهای مناسب برای ذارت بنیادی

کمیت	واحد
انرژی	GeV
تکانه	GeV/c
جرم	GeV/c^2
زمان	$(GeV/\hbar)^{-1}$
طول	$(GeV/\hbar c)^{-1}$

ثابت‌های پلانک و سرعت نور را واحد فرض کنیم، یعنی $c = \hbar = 1$. در این صورت می‌توان مشاهده کرد که بعد طول و بعد زمان با یکدیگر برابر می‌شوند،

$$c = 1 \rightarrow [c] = 1 \rightarrow LT^{-1} = 1 \rightarrow L = T \qquad (۱۲.۲)$$

تمرین: با استفاده از رابطه اینشتین برای انرژی $E = mc^2$ نشان دهید جرم و انرژی در واحد طبیعی هم بعد هستند؟
تمرین: همچنین از رابطه $E = \hbar f$ که f فرکانس موج است، نشان دهید که بعد انرژی وارون بعد زمان است؟
لازم به ذکر است که در واحد طبیعی جرم الکترون $m_e = 0/005GeV$ و جرم پرتون $m_p = 1GeV$ است.

فصل ۳

جبر و محاسبات برداری

در این فصل مروری بر کاربردهای جبر برداری خواهیم داشت به طوری که مباحثی هم‌چون عملگرهای برداری و ویژگی‌های آن‌ها به همراه مثال‌های گوناگون ارائه می‌شود.

۱.۳ بردار و کمیت‌های برداری

کمیت‌های فیزیکی به دو دسته‌ی، کمیت‌های اسکالر و کمیت‌های برداری تقسیم می‌شوند. برای مثال دمای اتاق یک کمیت اسکالر است چون مقدار آن تنها با یک عدد حقیقی بیان می‌شود. زمانی که ساعت مچی شما نشان می‌دهد، جرم یک قوطی کنسرو، حجم همان قوطی، چگالی آهن، و فشار هوای داخل اتاق همگی کمیت‌های اسکالر هستند.
کمیت‌های برداری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

- کمیت برداری: به کمیت Q که دارای بزرگی و جهت است، کمیت برداری می‌گویند.

برای مثال جابه‌جایی ذره یک کمیت برداری است. فرض کنید ذره از نقطه‌ی A شروع به حرکت کرده و پس از طی مسیری به نقطه‌ی B رسیده است. در این صورت بزرگی این جابه‌جایی برابر فاصله‌ی AB و جهت این جابه‌جایی، راستای خطی است که نقطه‌ی A را به نقطه‌ی B وصل می‌کند. نیروی F که توسط طنابی به جسم وارد می‌شود، یک کمیت برداری است؛ چون بزرگی آن، اندازه‌ی نیرو با مقداری حقیقی و مثبت است. هم‌چنین جهت آن، راستایی است که طناب کشیده شده است. افزون بر این، کمیت‌هایی نظیر سرعت و شتاب نیز کمیت‌هایی برداری هستند.
بردار را می‌توان به عنوان یک مفهومی کلی به صورت زیر بیان کرد:

- بردار کمیتی نظری است که با دو ویژگیِ بزرگی و جهت مشخص می‌شود. دو بردار زمانی با هم برابرند که بزرگی و جهت یکسان داشته باشند.

در این درس‌نامه تمام بردارها به صورت $\vec{a}$ و بزرگی آن‌ها را با $|a|$ یا a نمایش می‌دهیم.
همانند کمیت‌های عددی می‌توان اَعمال جبری نظیر جمع، تفریق، و ضرب را برای کمیت‌های برداری تعریف کرد.

جدول ۱.۳: قوانین جبری

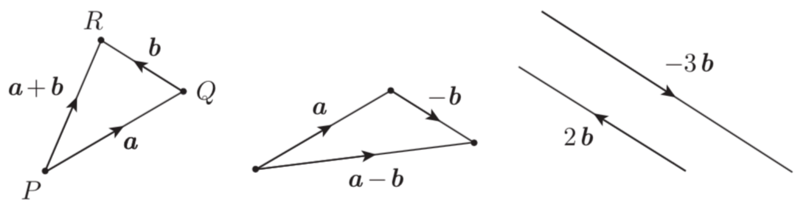
خاصیت جابجایی	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
خاصیت شرکت پذیری	$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
خاصیت شرکت پذیری	$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$
خاصیت توزیع پذیری	$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$
خاصیت توزیع پذیری	$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

۲.۳ اَعمال جبری

- جمع برداری: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را در نظر بگیرید. مطابق شکل ۱.۳ قسمت PQ را با $\vec{a}$ و قسمت QR را با b نمایش می‌دهیم. در نتیجه $\vec{a}+\vec{b}$ نمایشی برای PR است.

- قرینه‌ی بردار: برای بردار دلخواه $\vec{b}$ همواره می‌توان برداری با اندازه‌ی یکسان ولی در جهت مخالف بردار $\vec{b}$ تعریف کرد، که به آن قرینه‌ی بردار می‌گویند. برای بردار قرینه از نماد $-\vec{b}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین تفریق برداری را می‌توان با رابطه‌ی زیر بیان کرد (تصویر وسط از شکل ۱.۳ را مشاهده کنید).
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \qquad (۱.۳)$$

- ضرب اسکالر: بردار $\vec{a}$ و اسکالر (عدد حقیقی) λ را در نظر بگیرید. در این صورت ضرب اسکالر (ضرب عددی) به صورت $\lambda\vec{a}$ تعریف می‌شود. بزرگی بردار با برابر $|\lambda a|$ و جهت آن بسته به مثبت، منفی، و صفر بودن λ به ترتیب هم‌جهت، خلاف، و صفر است (تصویر سمت راست از شکل ۱.۳ را مشاهده کنید).



شکل ۱.۳: جمع، تفریق و ضرب اسکالر بردارها

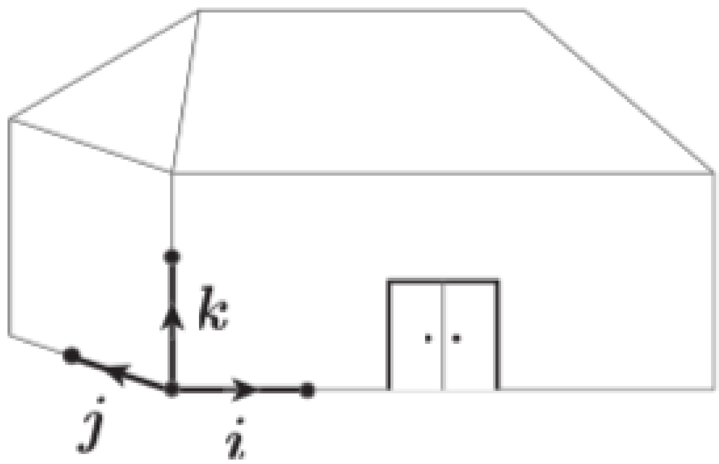
۳.۳ بردار واحد (بردار یکه)

برداری با بزرگی واحد (اندازه‌ی یک)، بردار واحد نام دارد. اگر بردار $\vec{a}$ را بر بزرگی اش تقسیم کنیم، بردار حاصل بردار واحد و هم‌جهت با بردار $\vec{a}$ است. بنابراین
$$\hat{a}=\frac{\vec{a}}{|a|}. \qquad (۲.۳)$$

۴.۳ مجموعه پایه‌های استاندارد

به مجموعه پایه‌ها (بردارهای یکه) متعامد $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ در دستگاه دکارتی، مجموعه پایه‌های استاندارد می‌گویند. هر بردار مانند $\vec{v}$ را در فضای سه بُعدی را می‌توان بر حسب این مجموعه بسط داد (شکل ۲.۳).

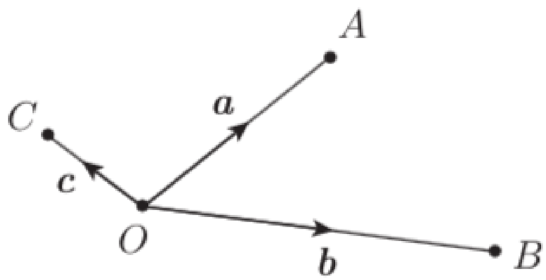
$$\vec{v} = \lambda\hat{i} + \mu\hat{j} + \nu\hat{k} \tag{۳.۳}$$



شکل ۲.۳: بردار پایه استاندارد.

۵.۳ بردار مکان

نقطه ثابت O را در فضا را به عنوان مبدا مختصات (مبدا چارچوب مرجع) در نظر می‌گیریم. در این صورت مکان هر نقطه‌ی دیگر مانند A نسبت به مبدا را با بردار $\vec{OA}$ که با $\vec{a}$ نمایش داده شده، مشخص می‌کنیم، شکل ۳.۳.



شکل ۳.۳: نقاط A و B و C به ترتیب دارای بردار مکان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ نسبت به مبدا هستند.

جدول ۲.۳: قوانین جبری برای ضرب اسکالر

خاصیت جابجایی	$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$
خاصیت توزیع پذیری	$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$
خاصیت شرکت پذیری با ضرب اسکالر	$(\lambda\vec{a}).\vec{b} = \lambda(\vec{a}.\vec{b})$

۶.۳ ضرب اسکالر دو بردار

ضرب اسکالر دو بردار با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos(\theta) \tag{۴.۳}$$

که θ زاویه‌ی میان دو بردار است. نکته: ضرب اسکالر دو بردار یک کمیت اسکالر است یعنی تنها با عدد مشخص می شود. هم‌چنین ضرب داخلی به معنی انداختن سایه‌ی بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ است، یا به عبارتی معادل نوشتن مولفه‌های بردار $\vec{a}$ در راستای بردار $\vec{b}$ است.

۱.۶.۳ خواص ضرب اسکالر

- اندازه یا بزرگی یک بردار دلخواه را می‌توان از مجذور ضرب اسکالر بردار در خودش به دست آورد، یعنی
$$|a|^2 = a^2 = \vec{a}.\vec{a} \tag{۵.۳}$$
- دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود هستند اگر و تنها اگر ضرب اسکالر دو بردار صفر باشد،
$$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \to \vec{a} \perp \vec{b} \tag{۶.۳}$$
- اگر $\{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}$ پایه‌های متعامد باشند، در این صورت
$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1 \qquad \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0 \tag{۷.۳}$$
- اگر $\vec{a}_1 = \lambda_1\hat{i} + \mu_1\hat{j} + \nu_1\hat{k}$ و $\vec{a}_2 = \lambda_2\hat{i} + \mu_2\hat{j} + \nu_2\hat{k}$ باشند، در این صورت داریم
$$\vec{a}_1.\vec{a}_2 = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 \tag{۸.۳}$$

علاوه بر خاصیت‌های ذکر شده می‌توانید دیگر خواص را در جدول ۲.۳ مشاهده کنید.

مثال

با توجه به تصویر سمت چپ از شکل ۱.۳ مطلوبست
الف: بزرگی بردار حاصل جمع
جواب

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b} = a^2 + 2ab\cos(\theta) + b^2 \tag{۹.۳}$$

ب: اگر فرض کنیم اندازه در بردار با هم برابر باشد ($a = b$) در این صورت رابطه بالا را ساده کنید. جواب: برای ساده سازی رابطه‌ی بالا استفاده از اتحادهای مثلثاتی زیر مفید هستند

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \tag{۱۰.۳}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y), \tag{۱۱.۳}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y). \quad (۱۲.۳)$$

حال با توجه به رابطه‌های بالا به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1. \quad (۱۳.۳)$$

اکنون با فرض هماندازه بودن بردارها داریم

$$|\vec{a} + \vec{b}| = a(2 + 2\cos(\theta))^{\frac{1}{2}} = 2a\cos(\frac{\theta}{2}). \quad (۱۴.۳)$$

تمرین

عملیات بالا را برای حاصل تفریق دو بردار (شکل میانی) تکرار کنید.

۷.۳ مؤلفه‌ی یک بردار

اگر فرض کنیم $\vec{n}$ یک بردار واحد باشد، در این صورت مؤلفه‌ی بردار $\vec{v}$ در راستای $\vec{n}$ با $\vec{v}.\vec{n}$ تعریف می‌شود. به طور کلی مؤلفه‌ی بردار $\vec{v}$ در راستای هر بردار دلخواه $\vec{a}$ با $\vec{v}.\hat{a}$ به دست می‌آید.

تمرین

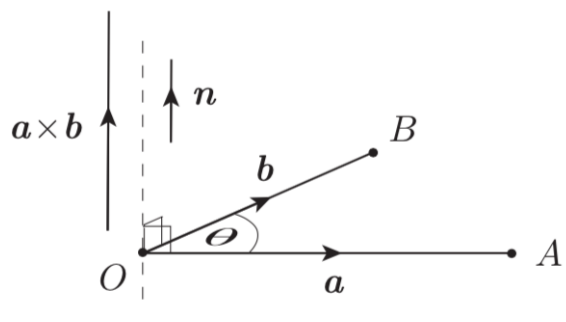
اگر $\vec{v} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 15\hat{k}$ و $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ باشد در این صورت مؤلفه‌ی بردار $\vec{v}$ در راستای $\vec{a}$ را به دست آورید.

۸.۳ ضرب برداری $\vec{a} \times \vec{b}$

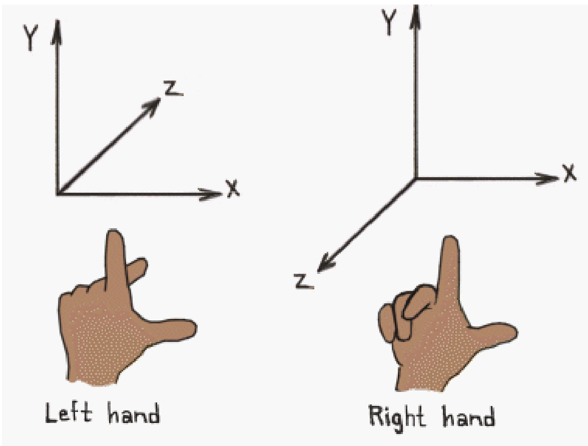
ضرب برداری: فرض کنید مطابق شکل ۱.۴ دو بردار، $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب دارای نمایش $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ باشند، هم‌چنین $\vec{n}$ بردار واحد عمود بر صفحه‌ی OAB باشد به طوری که مجموعه‌ی $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$ یک مجموعه راست دست باشد (۵.۳ را نگاه کنید)، در این صورت ضرب برداری به صورت زیر تعریف می شود

$$\vec{a} \times \vec{b} = (ab\sin(\theta))\vec{n}. \quad (۱۵.۳)$$

که θ زاویه میان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است. توجه داشته باشید ضرب برداری یک کمیت برداری است (شکل ۱.۴).



شکل ۴.۳: ضرب برداری دو بردار



شکل ۵.۳: در راست دستی، انگشت اشاره‌ی دست راست در سمت بردار اول و کف دست راست در سمت بردار دوم قرار دارند. در این صورت انگشت شست جهت بردار سوم را نشان می‌دهد. در چپ دستی چنین قواعد برای دست چپ به کار گرفته می‌شود.

از مهم‌ترین خواص ضرب برداری می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ضرب برداری هر بردار در خودش صفر است.
$$\vec{a}\times\vec{a}=0 \tag{۱۶.۳}$$
- اگر دو بردار موازی باشند، ضرب برداری آن‌ها صفر است
$$\vec{a}\times\vec{b}=0\rightarrow\vec{a}\|\vec{b}. \tag{۱۷.۳}$$
- اگر $\{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\}$ پایه های استاندارد باشند بنابراین
$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}\quad k\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}\quad j\times\hat{k}=\hat{\imath}\quad \hat{\imath}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}\times\hat{k}=0 \tag{۱۸.۳}$$
- اگر $\vec{a}_1=\lambda_1\hat{\imath}+\mu_1\hat{\jmath}+\nu_1\hat{k}$ و $\vec{a}_2=\lambda_2\hat{\imath}+\mu_2\hat{\jmath}+\nu_2\hat{k}$ باشد در این صورت خواهیم داشت،
$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2\end{vmatrix} \tag{۱۹.۳}$$

در این رابطه دترمینان با سطر اول محاسبه می‌شود. همچنین دیگر خواص ضرب برداری را می‌توانید در جدول ۳.۳ دنبال کنید.

نکته: چون ضرب برداری خاصیت پادجابه‌جایی دارد. بنابراین ترتیب عبارات در ضرب برداری بایستی همواره حفظ شود. پس ضرب برداری خاصیت شرکت‌پذیری ندارد.
تمرین: اگر $a=2\hat{\imath}-\hat{\jmath}+2\hat{k}$ و $b=-\hat{\imath}-3\hat{k}$ باشند، در این صورت برداری واحد را که عمود بر هر دو بردار است، بیابید.

۹.۳ ضرب‌های سه‌گانه

ضرب سه‌گانه یک عملیات جدید نیست. در واقع برآمدی ساده از عملیات دیگر است. دو نوع ضرب سه‌گانه وجود دارد، ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر و ضرب سه‌گانه‌ی برداری از این جمله هستند.

جدول ۳.۳: قوانین جبری برای ضرب برداری

خاصیت پادجابجایی	$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
خاصیت توزیع پذیری	$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
خاصیت شرکت پذیری با ضرب اسکالر	$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

۱.۹.۳ ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

عبارتی به شکل $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$ را ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر می‌نامیم، زیرا مقدار آن یک عدد است.
خواص ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

- جایگشت‌های دوره‌ای از بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$، و $\vec{c}$ در ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر، مقدار یکسانی می‌دهند

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = c.(\vec{a} \times \vec{b}) = b.(\vec{c} \times \vec{a}). \tag{۲۰.۳}$$

علاوه براین رابطه، ضرب سه‌گانه به شکل دیگر نیز نوشته می‌شود،

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}. \tag{۲۱.۳}$$

این بدان معناست که جابه‌جایی ضرب اسکالر و ضرب برداری مقدار نهایی را تغییر نمی‌دهد. به علت این خاصیت تقارنی، ضرب سه‌گانه را می‌توان با نماد $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ نشان داد که دارای خواص زیر است:

- ضرب سه‌گانه‌ی $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ است اگر و تنها اگر بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$، و $\vec{c}$ داخل یک صفحه باشند (هم صفحه). البته اگر یکی از بردارها صفر باشد و هم‌چنین اگر دو تا از بردارها یکسان باشند، این ضرب باز هم صفر است.

- اگر $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$ باشد، مجموعه‌ی $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ راست دست و اگر $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] < 0$ باشد، مجموعه‌ی $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ چپ دست است.

- اگر $\vec{a}_1 = \lambda_1\hat{i} + \mu_1\hat{j} + \mu_1\hat{k}$، $\vec{a}_2 = \lambda_2\hat{i} + \mu_2\hat{j} + \mu_2\hat{k}$ و $\vec{a}_3 = \lambda_3\hat{i} + \mu_3\hat{j} + \mu_3\hat{k}$ باشند در این صورت

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}. \tag{۲۲.۳}$$

تمرین: برای سه بردار $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$، $\vec{B} = -2\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}$، و $\vec{C} = -\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$، موارد زیر را محاسبه کنید.
الف) $\vec{A}.\vec{A}$
ب) $\vec{A}.\vec{C}$
پ) $(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$
ت) $\vec{B} \times \vec{C}$
ث) $(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$
ج) $(\vec{C} \times \vec{B}) \times \vec{A}$
د) حجم تشکیل‌شده از این سه بردار

فصل ۴

حرکت در خط مستقیم

در فصل‌های قبل مفاهیم ابتدایی در مکانیک کلاسیک بیان شد. در این فصل به بیان موضوع اصلی این درس‌نامه که مکانیک کلاسیک است می‌پردازیم و این کار را از حرکت در خط مستقیم آغاز می‌کنیم. مکانیک کلاسیک نظریه‌ی علمی است که به مطالعه‌ی حرکت اجسام می‌پردازد. حرکت خودروها در یک خیابان، حرکت توپ فوتبال در زمین بازی، حرکت سیارات به دور خورشید، و حرکت صفحات زمین نسبت به هم مثال‌هایی از حرکت هستند که در چارچوب مکانیک کلاسیک مطالعه می‌شوند. ابتدا به بیان فرض‌های بنیادین و اصلی مکانیک کلاسیک می‌پردازیم. در واقع مکانیک کلاسیک بر پایه‌ی این فرض‌ها استوار است.

۱.۴ فرض‌های بنیادین مکانیک کلاسیک

در مکانیک کلاسیک مفهوم پیوستگی در زمان و مکان وجود دارد. این بدان معناست که هر رویداد و اتفاق معین در یک مکان و زمان مشخصی رخ می‌دهد. به عنوان مثال یک بازی فوتبال در ساعت ۵ بعد از ظهر و از مرکز زمین مسابقه آغاز می‌شود. خودرویی در ساعت ۹ صبح از شاهرود به سمت تهران شروع به حرکت می‌کند.
از دیگر فرض‌های مکانیک کلاسیک آن است که اگر دو آزمایش‌گر ساعت‌های خود را با هم هم‌زمان کنند، در مورد زمان و بازه‌ی زمانی یک اتفاق توافق نظر دارند. فرض کنید شخص الف و شخص ب ساعت‌های خود را هم‌زمان می‌کنند. شخص الف در کنار جاده می‌ایستد و شخص ب سوار بر خودرویی می‌شود که با سرعت ثابت در حال حرکت است. در آن سوی جاده تصادفی رخ می‌دهد. هر دو شخص زمان تصادف و بازه‌ی زمانی تصادف را به صورت یکسان گزارش می‌کنند.
هم‌چنین در مکانیک کلاسیک فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی A و B با مختصات $(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B)$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}. \tag{۱.۴}$$

در واقع هندسه‌ی فضا اقلیدسی است.
در مکانیک کلاسیک دقت اندازه‌گیری مکان و سرعت یک جسم بی‌نهایت است؛ یعنی با هر دقتی می‌توان مکان و سرعت یک ذره را به صورت هم‌زمان اندازه‌گیری کرد. این بدان معناست که برای خودرویی که با سرعت مشخص در جاده حرکت می‌کند، می توانیم در هر لحظه از زمان، هم سرعت و مکان آن را به صورت دقیق گزارش کنیم.
هرچند که فرض‌های بالا شهودی و ساده هستند و با درک روزمره‌ی ما از حرکت اجسام هم‌خوانی دارند ولی برخی از این فرض‌ها در دیگر نظریه‌های فیزیکی برقرار نیستند. به عنوان مثال در مکانیک کوانتومی که به مطالعه‌ی حرکت

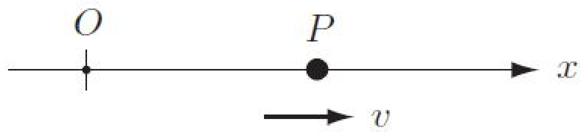
اجسام اتمی می‌پردازد، اندازه‌گیری هم‌زمان مکان و سرعت ذره‌ای مانند الکترون امکان‌پذیر نیست. یا در نسبیت بحث هم‌زمان کردن ساعت‌ها و هم‌چنین فاصله‌ی اقلیدسی برقرار نیستند.

۲.۴ حرکت در خط مستقیم

ذره‌ی P در حال حرکت در محور x به طوری که جابه‌جایی x از مبدا $\mathcal{O}$ تابع مشخصی از زمان است، را در نظر بگیرید. سرعت متوسط ذره P در طی بازه‌ی زمانی $t_1 \leq t \leq t_2$ به افزایش در جابه‌جایی ذره بر زمان سپری شده گفته می‌شود، یعنی

$$\overline{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{۲.۴}$$

تمرین:



شکل ۱.۴: ذره P در خط مستقیم حرکت می‌کند و دارای جابه‌جایی x و سرعت v در زمان t است.

فرض کنید جابه‌جایی ذره P از مبدا $\mathcal{O}$ در زمان t با تابع $x = t^2 - 6t$ مشخص می‌شود. در این صورت سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $1 \leq t \leq 3$ چقدر است؟
سرعت متوسط یک ذره از درجه‌ی اهمیت کمتری نسبت به سرعت لحظه‌ای، سرعت در یک لحظه‌ی مشخص، برای ماست. در واقع با قرار دادن $t_1 = t_2$ در رابطه‌ی ۲.۴ نمی‌توانیم سرعت در لحظه‌ی t_1 را بیابیم، زیرا خارج قسمت آن تعریف نشده است. با این وجود، سرعت لحظه‌ای به عنوان حد سرعت لحظه‌ای زمانی که بازه‌ی زمانی به سمت صفر میل می‌کند، یعنی $t_2 \to t_1$ قابل تعریف است. بنابراین سرعت لحظه‌ای $v(t_1)$ ذره P در زمان t_1 به صورت زیر تعریف می‌شود

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \left(\frac{x(t_2) - x_{t_1}}{t_2 - t_1} \right). \tag{۳.۴}$$

اما این رابطه دقیقا تعریف مشتق x نسبت به t است، که در $t = t_1$ محاسبه شده است. بنابراین می‌توان سرعت را به صورت زیر تعریف کرد:
تعریف: سرعت (لحظه‌ای) v ذره P در جهت مثبت x با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$v = \frac{dx}{dt}. \tag{۴.۴}$$

نکته: تندی ذره‌ی P به آهنگ افزایش کل مسافت طی شده گفته می‌شود که برابر با بزرگی سرعت $|v|$ است. به طور مشابه، شتاب ذره P آهنگ افزایش سرعت v است و به صورت زیر تعریف می‌شود:
تعریف: شتاب (لحظه‌ای) ذره در جهت مثبت x با

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{۵.۴}$$

تمرین: فرض کنید جابه‌جایی ذره‌ای از مبدا مختصات با رابطه‌ی $x = t^3 - 6t^2 + 4$ داده شده است. سرعت و شتاب ذره را در لحظه‌ی t حساب کنید. با این نتیجه که ذره دوبار به حالت سکون می‌رسد، مکان و شتاب ذره در

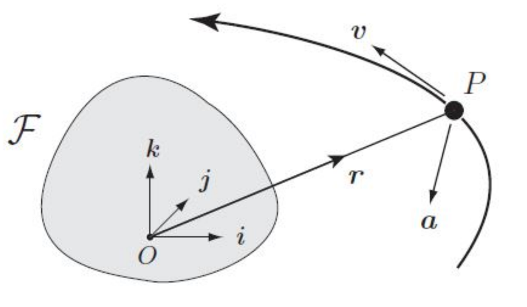
زمان آخرین سکون را محاسبه کنید.
تمرین: یک ذره در امتداد محور x با شتاب وابسته به زمان زیر حرکت می‌کند

$$a = 12t^2 - 6t + 6, \tag{۶.۴}$$

در ابتدا در نقطه‌ی $x = 4m$ و با سرعت $8m/s$ در جهت منفی x شروع به حرکت می‌کند. سرعت و جابه‌جایی ذره در لحظه‌ی t را به دست آورید.

۳.۴ حرکت کلی یک ذره

زمانی که یک ذره‌ی P در دو یا سه بعد حرکت می‌کند، مکانش می‌تواند با بردار جابه‌جایی r از مبدا $\mathcal{O}$ که نقطه‌ی ثابتی در چارچوب مرجع صُلب $\mathcal{F}$ است، توصیف شود. خواه $\mathcal{F}$ متحرک یا ثابت باشد، بردار مکان r به سادگی نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ قابل اندازه‌گیری است. شکل ۲.۴ یک ذره P در حال حرکت در فضای سه بعدی با بردار مکان r (نسبت به چارچوب مرجع $\mathcal{F}$) در زمان t را نشان می‌دهد.
سوال: چارچوپ مرجع چیست؟ چرا به آن نیازمندیم؟
یک چارچوپ مرجع صلب لزوما یک جسم صلب است که ذراتش می‌توانند به منظور ایجاد نقطه مرجع برچسب گذاری شوند. معروف‌ترین مثال، زمین است. نسبت به یک ذره منفرد تنها چیزی که می‌توان مشخص کرد فاصله از آن ذره است. با این وجود، نسبت به یک جسم صلب می‌توان هم جهت و هم فاصله را مشخص کرد. بنابراین مقدار هر کمیت برداری نسبت به چارچوپ F قابل تعیین شدن است. خصوصا اگر ما برخی از ذرات جسم را به عنوان مبدا $\mathcal{O}$ برچسب‌گذاری کنیم، می‌توانیم مکان هر نقطه از فضا را به وسیله‌ی بردار مکان نسبت به چارچوپ $\mathcal{F}$ و مبدا مختصات $\mathcal{O}$ مشخص کنیم.
تشخیص بردارها نسبت به یک چارچوپ مرجع زمانی که ما دستگاه مختصات دکارتی (کارتزین) را معرفی می‌کنیم، به مراتب ساده تر می‌شود. این عمل به روش‌های مختلف نامتناهی قابل اجراست. تصور کنید $\mathcal{F}$ را به وسیله‌ی مجموعه‌ای از سه صفحه‌ی دوبه دو متعامد که به طور صلب در آن غوطه‌ور هستند، بسط می‌دهیم. سپس مختصات x, y, z از نقطه‌ی P فاصله نقطه‌ی P از سه صفحه هستند. اکنون اجازه دهید $\mathcal{O}$ مبدا این دستگاه مختصات باشد و $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ بردارهای یکه آن باشند. سپس به طور قراردادی مرجع $\mathcal{F}$ به همراه دستگاه مختصات غوطه‌ور شده $Oxyz$ را با نمادگذاری $\mathcal{F}\{O; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ نمایش می‌دهیم. در حالت کلی، سرعت و شتاب یک ذره کمیت‌های



شکل ۲.۴: ذره P در فضای سه بعدی نسبت به چارچوپ مرجع $\mathcal{F}$ و مبدا O حرکت می‌کند و دارای بردار مکان r در زمان t است.

برداری هستند که با روابط زیر تعریف می‌شوند

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad a = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{۷.۴}$$

سرعت و شتاب اسکالر تعریف شده در بخش قبل برای حرکت مستقیم الخط به طور ساده‌ای به کمیت‌های برداری تعریف شده در بالا مرتبط هستند. این امکان وجود دارد که با استفاده از فرمول‌بندی برداری در مورد حرکت در خط مستقیم، محور x ، $\vec{r}$، $\vec{v}$ و $\vec{a}$ را به شکل زیر نوشت

$$\vec{r} = x\hat{i} \quad \vec{v} = v\hat{i} \quad \vec{a} = a\hat{i}, \tag{۸.۴}$$

که $v = dx/dt$ و $a = dv/dt$ هستند.

تمرین: نسبت به چارچوب $\mathcal{F}\{O; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ مکان ذره P در زمان t به صورت

$$\mathrm{r} = (2t^2 - 3)\hat{i} + (4t + 4)\hat{j} + (t^3 + 3t^2)\hat{k}$$

داده شده است. مطلوبست: فاصله‌ی OP زمانی که $t = 0$ است؟ سرعت ذره در $t = 1$؟ شتاب ذره در $t = 2$ ؟

۴.۴ حرکت با شتاب ثابت در راستای افقی

در حرکت با شتاب ثابت متحرک به گونه‌ای حرکت می‌کند که در بازه‌های زمانی یکسان تغییرات سرعت آن یکسان باشد. با فرض ثابت بودن شتاب در راستای افقی (محور x) فرض کنید متحرکی در زمان $t = 0$ با سرعت $v_x = v_{0x}$ و از مکان $x = x_0$ شروع به حرکت می‌کند در این صورت سرعت متحرک در لحظه‌ی t چقدر است؟ با استفاده از تعریف شتاب لحظه‌ای می‌توان به رابطه زیر رسید.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Longrightarrow \int dv_x = \int a_x(t)dt \overset{a_x(t)=a}{=} a\int dt \Rightarrow v_x = at + c \tag{۹.۴}$$

توجه داشته باشید که زیر اندیس x به معنای حرکت در راستای افقی است. حال با با اعمال شرط اولیه $v_x(t = 0) = v_{0x}$ داریم

$$v_x(t = 0) = c = v_{0x} \Rightarrow c = v_{0x} \Rightarrow v_x = at + v_{0x} \tag{۱۰.۴}$$

اکنون مکان نهایی که متحرک به آن خواهد رسید چقدر است؟

$$v_x = \frac{dx}{dt} = at + c \Rightarrow x = a\int tdt + c\int dt = a\frac{t^2}{2} + ct + d. \tag{۱۱.۴}$$

حال با اعمال شرط اولیه، $x(t = 0) = x_0$ سرانجام به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید

$$x = \frac{a}{2}t^2 + v_{0x}t + x_0. \tag{۱۲.۴}$$

تمرین: با حذف شتاب و زمان در روابط بالا، معادله‌های زیر را استخراج کنید

$$x - x_0 = \frac{(v_x + v_{0x})}{2}t, \tag{۱۳.۴}$$

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a(x - x_0). \tag{۱۴.۴}$$

نکته: حرکت با سرعت ثابت معادل شتاب صفر است زیرا تغییرات سرعت که منجر به شتاب می‌شود در این حرکت وجود ندارد بنابراین حرکت با سرعت ثابت با $a = 0$ صورت می‌گیرد، در این صورت با قرار دادن $a = 0$ در روابط بالا به معادلات زیر خواهیم رسید

$$v_x = v_{0x} \qquad x = v_{0x}t + x_0. \tag{۱۵.۴}$$

نکته: به طور کلی انتگرال را می‌توان به عنوان مساحت زیر نمودار مربوط به هر تابع تعریف نمود. بنابراین رابطه‌ی $\int dv = \int adt = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$ نشان می‌دهد که تغیرات سرعت متحرک در بازه‌ی زمانی $[t_1, t_2]$ همان مساحت زیر نمودار مربوط به تابع شتاب، $a(t)$, در بازه‌ی مذکور است.

تمرین: مسئله‌های ۴۳، ۵۰، ۵۱ (فصل دوم) از کتاب مبانی فیزیک ویراست دهم را حل کنید.

۵.۴ حرکت با شتاب ثابت در راستای عمودی

تمام نکات گفته شده در بالا را می‌توان برای حرکت در راستای عمودی نیز بیان کرد. کافی است در روابط بالا اندیس x را به y تغییر دهید. این به معنای سرعت و شتاب در راستای y است. معروف‌ترین و پرکاربردترین مثال برای حرکت در راستای عمودی و با شتاب ثابت، سقوط آزاد اجسام در نزدیکی سطح زمین است. مشاهده‌ای که شما بارها و بارها انجام داده‌اید؛ افتادن سیب از درخت و افتادن خودکار از لبه‌ی میز نمونه‌های از سقوط آزاد هستند. اگر از وجود مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم، مشاهده خواهیم کرد که در هر نقطه در اطراف کره‌ی زمین، همه‌ی اجسام با هر شکل، اندازه، و ترکیبی با شتاب ثابت به سمت زمین سقوط می‌کنند. این شتاب ثابت را با نماد $a_y = -g$ مشخص می‌کنیم که علامت منفی یادآور این حقیقت است که جهت شتاب همواره رو به زمین است. اندازه‌ی g به فاصله از سطح زمین بستگی دارد و مقدار دقیق آن با تغییر طول و عرض جغرافیایی آن نقطه روی زمین عوض می‌شود. به عنوان مثال در استوای زمین $g = 9/780\frac{m}{s^2}$ و در قطب‌های زمین $g = 9/832\frac{m}{s^2}$ است. ولی چون با تقریب زمین را به صورت کروی در نظر می‌گیریم، مقدار این شتاب در نزدیکی سطح زمین $g = 9/8\frac{m}{s^2}$ است. هر چند که در مورد سقوط آزاد صحبت کردیم ولی اجسامی هم که در اطراف زمین به سمت بالا (مخالف سمت زمین) حرکت می‌کنند، شتاب g را تجربه می‌کنند. در این صورت روابط مربوط به مکان و سرعت برابر

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0, \tag{۱۶.۴}$$

$$v_y = -gt + v_{0y}. \tag{۱۷.۴}$$

است.

مثال: توپی را از بالای برجی به ارتفاع ۵۰ متر رها می‌کنیم ($v_{0y} = 0$). با صرف‌نظر از مقاومت هوا، جابه‌جایی توپ را در زمان‌های $t = 1s$ و $t = 3s$ محاسبه کنید.

پاسخ: مبدا مختصات را روی سطح زمین قرار می‌دهیم. بنابراین $y_0 = 50m$ است. پس

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \tag{۱۸.۴}$$

$$= -\frac{1}{2}9/8t^2 + 50. \tag{۱۹.۴}$$

پس در $t = 1s$ داریم

$$y_1 = -\frac{1}{2}9/8 + 50 = 45/1, \tag{۲۰.۴}$$

و در $t = 3s$ داریم

$$y_2 = -\frac{1}{2}9/8 * 9 + 50 = 5/9. \tag{۲۱.۴}$$

برای محاسبه‌ی جابه‌جایی داریم

$$50 - y_1 = 50 - 45/1 = 4/9m, \tag{۲۲.۴}$$

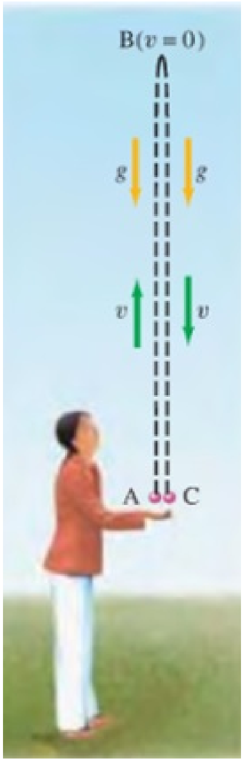
$$50 - y_2 = 50 - 5/9 = 44/1m. \tag{۲۳.۴}$$

تمرین: شخصی توپی را با سرعت $10\frac{m}{s}$ به سمت بالا پرتاب می‌کند، شکل ۴.۴.

الف) توپ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود.

ب) مدت زمانی که توپ در هوا است، را محاسبه کنید .

تمرین: برای اندازه‌گیری شتاب گرانش می‌توان آزمایشی به این صورت طراحی کرد: توپی را به بالا پرتاب می‌کنیم.



شکل ۳.۴: توپ با سرعت $10\frac{m}{s}$ به بالا پرتاب می‌شود.

دو نقطه‌ی A و B را در راستای عمودی حرکت که فاصله‌ی آن‌ها از هم h است، در نظر بگیرید. اگر T_A متناظر با زمانی باشد که جسم از نقطه‌ی A گذشته و دوباره به A برگردد و T_B متناظر با زمانی باشد که جسم از نقطه‌ی B گذشته و دوباره به B برگردد. نشان دهید مقدار

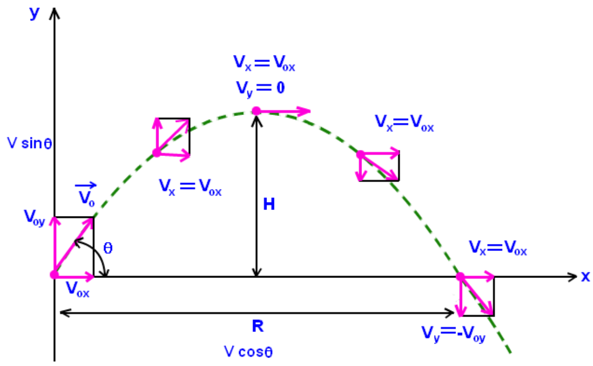
$$g = \frac{8h}{T_A^2 - T_B^2}. \qquad (۲۴.۴)$$

است.

تمرین: خرسی به ناگهان داخل چاهی به ارتفاع ۱۰۰ متر سقوط می‌کند. اگر در مدت زمان $t = 4/51s$ به ته چاه سقوط کند، خرس چه رنگی است؟

۶.۴ حرکت در دو بُعد

در قسمت‌های قبل با حرکت در راستای افقی و عمودی آشنا شدیم، در این قسمت می‌خواهیم حرکتی ترکیبی را مطالعه کنیم؛ یعنی متحرک هم در راستای افقی و هم در راستای عمودی حرکت می‌کند. از فصل بردارها بخاطر داریم که هر برداری را می‌توان بر حسب بردارهای یکه‌ی فضا نوشت. وقتی حرکت دو بُعدی است دو بردار یکه وجود دارد. بنابراین بردار مکان، بردار سرعت، و بردار شتاب را می‌توان برحسب بردارهای یکه نوشت. چون بردارهای یکه از هم مستقل هستند، حرکت در دو راستا را می‌توان به صورت مجزا مطالعه کرد. توجه داشته باشید که همین نکات برای فضای سه بُعدی نیز صادق است. در ادامه حرکت پرتابی و حرکت دایره‌ای را به عنوان مثال‌هایی از حرکت در دو بُعد مطالعه می‌کنیم.



شکل ۴.۴: تصویر حرکت پرتابی

۱.۶.۴ حرکت پرتابی

توپی را در نظر بگیرید که با سرعت اولیه‌ی v_0 با زاویه‌ی θ نسبت به راستای افقی پرتاب می‌شود. چون در نزدیکی زمین پرتاب شده است تحت گرانش زمین قرار دارد. بنابراین در راستای عمودی y حرکتی با شتاب ثابت g را تجربه می‌کند. در راستای افقی x شتابی به جسم وارد نمی‌شود. بنابراین در این راستا حرکت با سرعت ثابت است. بنابراین بردار شتاب جسم به صورت

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = 0\hat{\imath} - g\hat{\jmath}, \tag{۲۵.۴}$$

است. هم‌چنین بردار سرعت اولیه با رابطه‌ی

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath} = v_0\cos\theta\hat{\imath} + v_0\sin\theta\hat{\jmath} \tag{۲۶.۴}$$

داده می‌شود. توجه به این که حرکت در راستای x با سرعت ثابت است، داریم

$$v_x = v_{0x} = v_0\cos\theta \tag{۲۷.۴}$$

$$x = v_{0x}t + x_0 = v_0\cos\theta t + x_0. \tag{۲۸.۴}$$

در راستای y حرکت با شتاب ثابت است. بنابراین معادلات حرکت به صورت زیر هستند:

$$v_y = -gt + v_{0y} = -gt + v_0\sin\theta \tag{۲۹.۴}$$

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = v_y^2 - v_0^2\sin^2\theta = -2g(y - y_0) \tag{۳۰.۴}$$

$$y - y_0 = \frac{1}{2}(v_y + v_{0y})t = \frac{1}{2}(v_y + v_0\sin\theta)t \tag{۳۱.۴}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta t + y_0. \tag{۳۲.۴}$$

با فرض $x_0 = 0$ به کمک رابطه‌ی ۲۸.۴ می‌توان زمان را به صورت

$$t = \frac{x}{v_0\cos\theta} \tag{۳۳.۴}$$

به دست آورد. حال رابطه‌ی فوق را در رابطه‌ی ۳۲.۴ جای‌گذاری کرده و برای سادگی $y_0 = 0$ قرار می‌دهیم. بنابراین معادله‌ی مسیر حرکت پرتابی به دست می‌آید

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + x\tan\theta. \tag{۳۴.۴}$$

مثال حرکت پرتابی

پرتابه‌ای از روی سطح زمین با سرعت اولیه‌ی v_0 و با زاویه‌ی θ به سمت بالا پرتاب می‌شود.
الف) در چه زمانی به نقطه‌ی اوج خود می‌رسد؟
نقطه‌ی اوج نقطه‌ای است که پرتابه به بالاترین ارتفاع خود می‌رسد. به علت شتاب گرانش، پرتابه تا نقطه‌ای بالا رفته در یک لحظه توقف کرده و در راستای y به سمت پایین حرکت می‌کند. پس نقطه‌ی اوج جایی است که در یک لحظه سرعت در راستای y صفر می‌شود. پس از رابطه‌ی ۲۹.۴ داریم

$$v_y = -gt + v_0 \sin\theta = 0 \to t = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \tag{۳۵.۴}$$

ب) ارتفاع اوج چقدر است؟
کافی است زمان به دست آمده در بخش قبل را در رابطه‌ی ۳۲.۴ جای‌گذاری کنیم

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \tag{۳۶.۴}$$

پ) در زمان اوج، فاصله‌ی متحرک از نقطه‌ی پرتاب در راستای x چقدر است؟
کافی است زمان اوج را در رابطه‌ی ۲۸.۴ جای‌گذاری کنیم

$$x = \frac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} \tag{۳۷.۴}$$

ت) بُرد پرتابه چقدر است؟
منظور از بُرد پرتابه بیشینه‌ی جابه‌جایی پرتابه در راستای x است؛ یعنی نقطه‌ای که پرتابه مجدداً به زمین می‌رسد. به دو روش می‌توان این مکان را حساب کرد:

- چون حرکت پرتابی حرکتی متقارن است؛ همان مقدار که زمان طول کشیده از زمین به نقطه‌ی اوج برسد به همان مقدار طول می‌کشد که از نقطه‌ی اوج به زمین برسد. پس کافی است زمان اوج را دو برابر کرده و در رابطه‌ی ۲۸.۴ قرار دهیم. با این‌که رابطه‌ی ۳۷.۴ را دو برابر کنیم. بُرد پرتابه را با نماد R که حرف نخست کلمه‌ی $Range$ است، نشان می‌دهیم

$$R = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}. \tag{۳۸.۴}$$

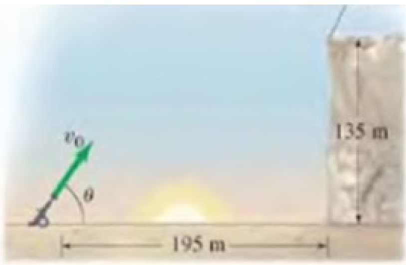
- راه حل دیگر آن است که از معادله‌ی مسیر ۳۴.۴ استفاده کنیم. بُرد پرتابه نقطه‌ای است که $y = 0$ است؛ چون پرتابه به زمین می‌رسد. پس

$$\begin{aligned} y &= -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + x\tan\theta = 0 \\ &= x\left(-\frac{gx}{2v_0^2\cos^2\theta} + \tan\theta\right) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = 0 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} \end{aligned} \tag{۳۹.۴}$$

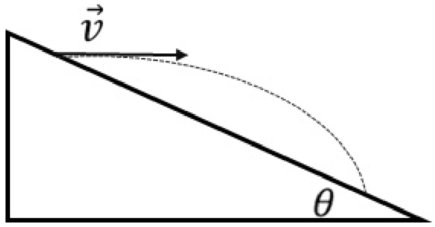
پاسخ x_1 درست است ولی دقیقاً نقطه‌ی اول حرکت را نشان می‌دهد. x_2 همان برد پرتابه است.

تمرینات حرکت پرتابی

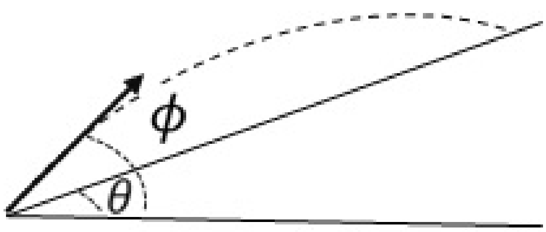
۱) ذره‌ای با سرعت $\vec{v} = (-2\hat{i}+3/5t\hat{j})m/s$ حرکت خود را در زمان $t=0$ از نقطه‌ی $\vec{r} = (1/5\hat{i}-3/1\hat{j})m$ آغاز می‌کند.
الف) مکان و شتاب ذره را به عنوان تابعی از زمان محاسبه کنید.
ب) نمودار مسیر حرکت را رسم کنید.
۲) پرتابه‌ای از روی سطح زمین به سمت بالای صخره‌ای پرتاب می‌شود. مطابق شکل ارتفاع صخره $135m$ و فاصله‌ی افقیِ نقطه‌ی پرتاب تا صخره $195m$ است. اگر پرتابه $6/6$ ثانیه پس از شلیک به بالای صخره برسد، اندازه و جهت سرعت اولیه‌ی پرتابه چقدر است؟



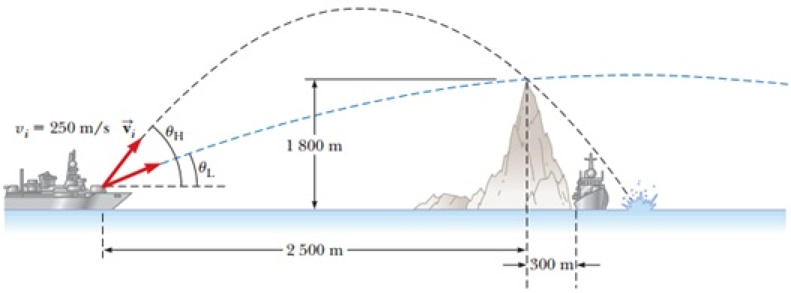
۳) مطابق شکل، پرتابه‌ای در راستای افق و با سرعت $\vec{v}$ از روی سطح شیبداری با زاویه‌ی θ پرتاب می‌شود. پس از چه مدت پرتابه به سطح برخورد می‌کند؟



۴) بر روی سطح شیبداری که با افق زاویه‌ی θ می‌سازد، توپی با سرعت $\vec{v}$ و زاویه‌ی ϕ نسبت به افق پرتاب می‌شود.
الف) مسافتی را که توپ روی سطح شیبدار می‌پیماید، حساب کنید.
ب) به ازای چه مقدار ϕ بُرد توپ روی سطح بیشینه می‌شود؟



۵) مطابق شکل ۵.۴ ، کشتی دشمن در سمت شرقِ جزیره‌ی کوهستانی قرار دارد. قدرتِ مانور کشتی دشمن طول ۲۵۰۰ متر و ارتفاع ۱۸۰۰ متر که برابر با قلّه‌ی کوه است و قادر است موشک را با سرعَت ۲۵۰ متر بر ثانیه شلیک کند. اگر فاصله‌ی خط غربی ساحل به صورت افقی از قله‌ی کوه ۳۰۰ متر باشد، فاصله‌ای از ساحل غربی را مشخص کنید که کشتی از بمباران دشمن در امان خواهد بود.

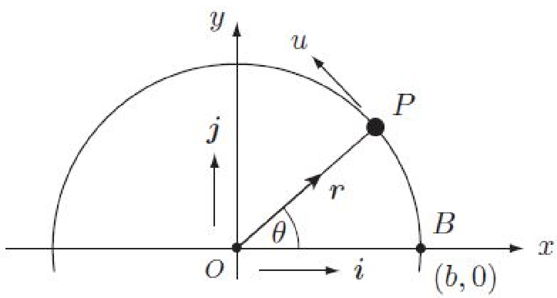


شکل ۵.۴: شکل تمرین ۵

۷.۴ حرکت دایره‌ای یکنواخت

ساده‌ترین مثال از حرکت غیر مستقیم حرکت در یک دایره است. حرکت دایروی در کابردهای عملی در ماشین‌های چرخشی مهم است. در اینجا مورد خاصی از حرکت دایره‌ای یکنواخت یعنی حرکت دایره‌ای با سرعت ثابت را در نظر می‌گیریم. ذره‌ی P را که با سرعت ثابت u و در جهت خلاف عقربه‌های ساعت که اطراف دایره‌ای به مرکز O و شعاع b همانند آنچه در شکل ۶.۴ نمایش داده شده است، حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. در زمان $t = 0$ ذره در نقطه $B(b,0)$ است. سرعت و شتاب ذره در لحظه t چیست؟ اولین گام یافتن بردار مکان ذره در زمان t است. چون ذره با سرعت ثابت u حرکت می کند، کمان BP طی شده در زمان t بایستی ut باشد. در نتیجه زاویه θ مشخص شده در شکل ۶.۴ با $\theta = ut/b$ تعیین می‌گردد. بنابراین بردار مکان ذره در زمان t به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\mathrm{r} = b\cos(\theta)i + b\sin(\theta)j = b\cos(ut/b)i + b\sin(ut/b)j \tag{۴۰.۴}$$



شکل ۶.۴: ذره P با سرعت ثابت u حول دایره‌ای به شعاع b حرکت می‌کند.

در این صورت بردارهای سرعت و شتاب ذره P در زمان t با روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\mathrm{v} = \frac{d\mathrm{r}}{dt} = -u\sin(ut/b)\mathrm{i} + u\cos(ut/b)\mathrm{j} \tag{۴۱.۴}$$

$$\mathrm{a} = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = -\frac{u^2}{b}\cos(ut/b) - \frac{u^2}{b}\sin(ut/b)\mathrm{j} \tag{۴۲.۴}$$

توجه داشته باشید تندی ذره از بردار سرعت به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$|\mathrm{v}| = \left(u^2\cos^2(ut/b) + u^2\sin^2(ut/b)\right)^{1/2} = u \tag{۴۳.۴}$$

بزرگی شتاب نیز با

$$|\mathrm{a}| = \left(\left(\frac{u^2}{b}\right)^2 \cos^2(ut/b) + \left(\frac{u^2}{b}\right)^2 \sin^2(ut/b) \right)^{1/2} = \frac{u^2}{b} \qquad (۴۴.۴)$$

مشخص می‌شود. همچنین چون بردار شتاب $\mathrm{a} = -(u^2/b^2)\mathrm{r}$ می‌توان نوشت، نشان می‌دهد جهت بردار a خلاف جهت بردار r است. بنابراین این رابطه منتج به نتیجه مهم زیر خواهد شد.

- حرکت دایره‌ای یکنواخت: زمانی که ذره P با سرعت ثابت u حول دایره‌ای با مرکز O و شعاع b حرکت می‌کند، بردار شتاب آن ذره در جهت $\vec{PO}$ (خلاف جهت بردار شعاع $\vec{OP}$) است و دارای بزرگی ثابت $\frac{u^2}{b}$ است.

این نتیجه سازگار با رابطه کلی ?? است. در این مورد خاص، با انتخاب $v = u$ و $\rho = b$ به طوری که $dv/dt = 0$ و $\mathrm{a} = (u^2/b)\mathrm{n}$ می‌توان این سازگاری را مشاهده نمود.

تمرین

۱) مسیر حرکت یه ذره باردار در یک میدان مغناطیسی با رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$\mathrm{r} = b\cos\Omega t\mathrm{i} + b\sin\Omega t\mathrm{j} + ct\mathrm{k} \qquad (۴۵.۴)$$

که b ، Ω و c ثابت‌های مثبت هستند. نشان دهید ذره با تندی ثابت حرکت می‌کند؟ همچنین بزرگی شتابش را نیز بیابید؟

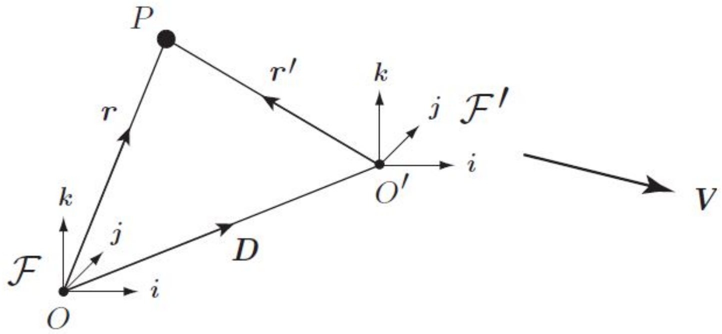
۲) ذره‌ای در صفحه با معادله‌ی

$$x = R\sin\omega t + \omega Rt,$$
$$y = R\cos\omega t + R$$

حرکت می‌کند، که R, ω ثابت هستند. الف) مسیر حرکت را رسم کنید. ب) سرعت و شتاب لحظه‌ای را در بیشینه و کمینه‌ی y حساب کنید.

۸.۴ چارچوب‌های مرجع در حرکت نسبی

به طور ساده چارچوب مرجع یک سیستم مختصاتی صلب است که برای مشخص نمودن نقاط در فضا بکار گرفته می‌شود. در عمل چارچوب مرجع را به عنوان چارچوبی غوطه‌ور یا چسبیده به جسم صلب در نظر می‌گیرند. آشناترین مورد زمانی است که این جسم صلب همان زمین باشد اما بجای آن می‌توان یک ماشین متحرک یا یک ایستگاه فضای در مدار نیز باشد.خصوصا هر حادثه‌ای مثلا حرکت فضاپیما می‌تواند توسط هر یک از این چارچوب‌های مرجع مشاهده شود و حرکت متفاوت برای هر مشاهده‌گری رویت خواهد شد. این تفاوت چیزی است که می‌خواهیم توضیح دهیم. اجازه دهید حرکت ذره P از منظر چارچوب‌های $\mathcal{F}\{\mathcal{O}, i, j, k\}$ و $\mathcal{F}'\{\mathcal{O}', i, j, k\}$ مشاهده شود همانگونه که در شکل ۷.۴ نشان داده شده است. در اینجا فرض می‌کنیم چارچوب $\mathcal{F}'$ نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ نمی‌چرخد. بدون از دست رفتن عمومیت مسله، می‌توانیم فرض کنیم دو چارچوب $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ دارای مجموعه پایه‌های بردار یکه $\{i, j, k\}$ یکسان هستند. برای مثال P می‌تواند یک فضاپیما و $\mathcal{F}$ چسبیده به زمین و نیز $\mathcal{F}'$



شکل ۷.۴: ذره P از دو چارچوب $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ مشاهده می‌شود.

چسبیده به اتومبیلی در حال حرکت در امتداد جاده مستقیم باشد. بنابراین r و r' بردارهای مکان P نسبت به $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ باشند که با رابطه زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند.

$$\mathrm{r} = \mathrm{r}' + \mathrm{D} \tag{۴۶.۴}$$

که D بردار مکان O' نسبت به $\mathcal{F}$ است. اکنون از این رابطه نسبت به t مشتق می‌گیریم مرحله‌ای که نیازمند کمی دقت است. اجازه دهید آهنگ تغییرات بردارها در معادله ۴۶.۴ از چارچوب $\mathcal{F}$ را در نظر بگیریم. بنابراین

$$\mathrm{v} = \left(\frac{d\mathrm{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{F}} + \mathrm{V} \tag{۴۷.۴}$$

است که v سرعت P مشاهده شده از چارچوب $\mathcal{F}$ و V سرعت چارچوب $\mathcal{F}'$ نسبت به $\mathcal{F}$ است. اکنون وقتی دو چارچوب متفاوت برای مشاهده یک بردار یکسان بکار گرفته می‌شوند، آهنگ تغییرات مشاهده شده برای آن بردار به طور کلی متفاوت خواهد شد. به ویژه در حالت کلی رابطه زیر درست نیست.

$$\left(\frac{d\mathrm{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{F}} = \left(\frac{d\mathrm{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{F}'} \tag{۴۸.۴}$$

به هرحال در فصل ۱۷ کتاب خواهید دید که این دو آهنگ تغییر اگر دو چارچوب $\mathcal{F}'$ نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ نچرخد، با یکدیگر برابر هستند. بنابراین برای مورد ما، داریم

$$\left(\frac{d\mathrm{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{F}} = \left(\frac{d\mathrm{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{F}'} = \mathrm{v}' \tag{۴۹.۴}$$

که v' سرعت P مشاهده شده از منظر ناظر در چارچوب $\mathcal{F}'$ است. در این صورت معادله ۴۷.۴ با رابطه زیر نوشته خواهد شد.

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}' + \mathrm{V} \tag{۵۰.۴}$$

لذا سرعت ذره P مشاهده شده در چارچوب $\mathcal{F}$ جمع سرعت P از منظر ناظر در چارچوب $\mathcal{F}'$ و سرعت نسبی میان چارچوب‌های $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ است. توجه داشته باشید این نتیجه تنها در موردی که $\mathcal{F}'$ نسبت به $\mathcal{F}$ بدون چرخش باشد، بکار می‌رود. این رابطه‌ای شناخته شده برای سرعت‌های نسبی است. در مثال فضاپیما، این به دان معناست که سرعت حقیقی فضاپیما (نسبت به زمین) جمع برداری سرعت فضاپیما نسبت به انومبیل و سرعت اتومبیل نسبت به جاده است. حال اگر بار دیگر از رابطه ۵۰.۴ نسبت به t مشتق بگیریم، رابطه مشابه‌ای برای شتاب ها به‌دست می‌آید، یعنی

$$\mathrm{a} = \mathrm{a}' + \mathrm{A} \tag{۵۱.۴}$$

که a و a' به ترتیب شتاب ذره P نسبت به چارچوب‌های $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ هستند و A شتاب چارچوب $\mathcal{F}'$ نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ است. بار دیگر اشاره می‌کنیم این نتیجه تنها زمانی که $\mathcal{F}'$ بدون چرخش نسبت به $\mathcal{F}$ باشد برقرار است.

چارچوب‌های بدون شتاب متقابل

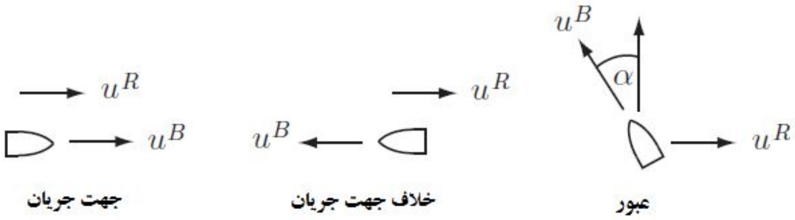
مورد بسیار خاصی از معادله ۵۱.۴ زمانی اتفاق می‌افتد که چارچوب $\mathcal{F}'$ با سرعت ثابت (و بدون چرخش) نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ حرکت می‌کند. در این صورت دو چارچوب $\mathcal{F}'$ و $\mathcal{F}$ را چارچوب‌های بدون شتاب متقابل می‌نامیم. در این مورد $\mathrm{A} = 0$ و رابطه ۵۱.۴ به رابطه زیر کاهش می‌یابد.

$$\mathrm{a} = \mathrm{a}' \tag{۵۲.۴}$$

این به این معنی است که وقتی چارچوب‌های بدون شتاب متقابل برای مشاهده حرکت ذره P بکار گرفته می‌شوند، شتاب مشاهده شده از P در هر دو چارچوب یکسان است. این نتیجه اساس بحث ما از چارچوب‌های لخت در فصل بعد است.

مثال

سرعت نسبی: رودخانه می‌سی‌سی‌پی حدود یک مایل پنهاور است و جریانی یکنواخت دارد. یک قایق کل این یک مایل را حدود ۱۲ دقیقه زمانی که در خلاف جریان آب رودخانه حرکت می‌کند، می‌پیماید درحالی که تنها ۳ دقیقه کافی است اگر در جهت جریان آب قرار گیرد. کمترین زمانی که قایق می‌تواند از می‌سی‌سی‌پی عبور کند و به نزدیکترین نقطه در طرف دیگر ساحل برسد را بیابید؟ برای حل این مسله باید حرکت قایق را از چارچوب مرجع $\mathcal{F}'$



شکل ۸.۴: آب با سرعت u^R از چپ به راست جریان دارد و قایق با سرعت u^B نسبت رودخانه در حال حرکت است. در این مورد سرعت قایق نسبت به ساحل جمع برداری دو سرعت نشان داده شده است.

که همراه جریان رودخانه حرکت می‌کند، را مشاهده کرد. در این چارچوب مرجع آب ساکن است و قایق با سرعت یکسان در تمام جهات حرکت می‌کند. در این صورت رابطه سرعت نسبی (۵۰.۴) تصویر درستی از حرکت قایق نسبت به ساحل رودخانه که در چارچوب مرجع $\mathcal{F}$ قرار دارد، می‌دهد. اجازه دهید u^B را تندی قایق در آب راکد و u^R را تندی آب رودخانه و واحد هر دو کمیت مایل بر ساعت در نظر بگیریم. در خلاف یا موافق جریان آب بودن راهی معقول برای گفتن مقادیر u^B و u^R است. زمانی که قایق در جهت جریان آب حرکت می‌کند، رابطه ۵۰.۴ نشان می‌دهد که تندی قایق نسبت به ساحل $u^B + u^R$ است. اما این تندی با $1/3$ مایل بر دقیقه (یا ۲۰ مایل بر ساعت) بیان می‌شود. لذا

$$u^B + u^R = 20 \tag{۵۳.۴}$$

به طور مشابه در خلاف جریان آب سرعت نسبی $u^B - u^R$ است و مقدار آن $1/12$ مایل بر دقیقه (یا ۵ مایل بر ساعت) است. در این صورت داریم

$$u^B - u^R = 5 \tag{۵۴.۴}$$

با حل این معادلات،

$$u^B = 12/5 m/h \qquad u^R = 7/5 m/h \tag{۵۵.۴}$$

اکنون قایق بایستی از رودخانه عبور کند. برای عبور با یک مسیر مستقیم به نزدیکترین نقطه در ساحل مقابل، سرعت قایق (نسبت به جریان آب رودخانه) باید به اندازه زوایه α جهت دهی کند تا در مسیر خواسته‌شده قرار گیرد (همانگونه که در شکل ۸.۴ نشان داده شده است.) به طوری که سرعت برآیند قایق تنها عمود بر مسیر جریان قرار گیرد. برای این منظور زاویه α بایستی رابطه زیر را ارضا کند.

$$u^B \sin\alpha = u^R \tag{۵۶.۴}$$

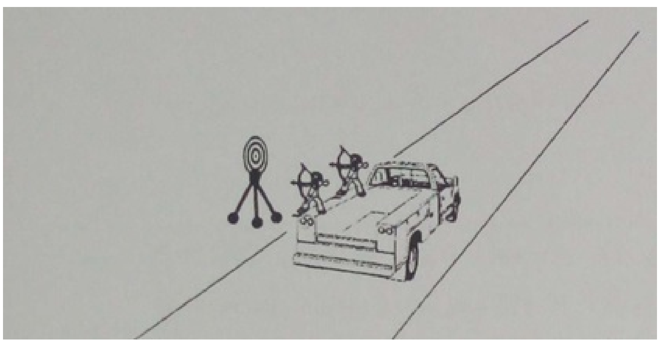
که نشان می‌دهد $\sin\alpha = 3/5$ است. بنابراین سرعت برایند قایق زمانی که در حال عبور از رودخانه است $u^B\cos\alpha = 12/5 \times (4/5) = 10m/h$ خواهد بود. چون پهنای رودخانه یک مایل است زمان سپری شده برای عبور از رودخانه $1/10h = 6min$ است.

تمرین

۱) یک هواپیما از نقطه A به سمت فرودگاه B که به فاصله $600km$ در سمت شمال A قرار دارد، پرواز می‌کند. اگر جریان باد پایداری با سرعت $90km/h$ از سمت شمال به شرق شروع به وزیدن کند، جهت این هواپیما نسبت به جهت شمال چقدر بایستی باشد تا به نقطه B برسد. سرعت هواپیما در باد راکد $200km/h$ است.

۲) سرعت جریان آب رودخانه ای v و پهنای آن h است قایقرانی می‌تواند در آب‌های بی‌حرکت قایق را با سرعت u براند. قایقران باید در چه راستایی در رودخانه حرکت کند تا در کوتاه‌ترین زمان از یک ساحل به ساحل دیگر برسد؟ در چه نقطه‌ای به ساحل روبرو خواهد رسید؟

۳) در یک مسابقه، دو تیرانداز سوار بر یک خودرو که با سرعت $30m/s$ در یک خط مستقیم در حال حرکت است به سمت هدفی که در کنار جاده قرار گرفته و جهت آن عمود بر مسیر حرکت خودرو تیراندازی می‌کنند. طبق قاعده‌ی مسابقه تیراندازها مجازند وقتی که خودرو درست مقابل هدف قرار می‌گیرد، تیراندازی کنند. تیرانداز شماره یک می تواند تیر را با سرعت $40m/s$ پرتاب کند و تیرانداز شماره دو با سرعت $20m/s$.
الف) تیراندازها بدون در نظر گرفتن این نیروی گرانش محاسبه می‌کنند که در چه زاویه ای نسبت به افق باید تیر خود را رها کنند. زاویه‌ای که هر یک به دست می‌آورد چقدر است؟ فرض کنید نقطه‌ی پرتاب و مرکز هدف در یک ارتفاع از سطح زمین قرار دارند. آیا هر دو تیرانداز موفق می‌شوند تیر را به هدف برساند؟ توضیح دهید.
ب) با توجه به اینکه گرانش وجود دارد تیراندازی که حساب کرده است می‌تواند به هدف بزند به کجا می نشیند؟ فرض کنید فاصله‌ی نقطه‌ی پرتاب تا هدف $7m$ و $g = 10m/s^2$ است، شکل ۹.۴. (میان‌ترم فیزیک۱، آبان ۱۳۹۴، دانشگاه صنعتی شریف)



شکل ۹.۴: شکل مربوط به سوال ۳

فصل ۵

قوانین حرکت نیوتن

در این فصل قوانین نیوتن از حرکت، تعریف جرم، نیرو، قانون گرانش، شرط هم‌ارزی، و گرانش ناشی از کره‌ها را مطالعه می‌کنیم. در واقع این فصل به مبانی دینامیک و گرانش مربوط می‌شود. همان‌طور که قبلاً گفتیم سینماتیک به طور خاص به هندسه‌ی حرکت مربوط است، در حالی که دینامیک به مطالعه‌ی حرکت با در نظر گرفتن عامل حرکت می‌پردازد. در واقع در ازای اِعمال نیرو جسم چگونه حرکت می‌کند. قوانینی که این ارتباط را بیان می‌کنند، قوانین حرکت نیوتن هستند. این‌ها قوانینی از فیزیک هستند که براساس شواهد تجربی نمایان می‌گردند و بر طبق درستی پیش‌بینی‌هایشان تصدیق یا رد می‌شوند. در حقیقت فرمول‌بندی نیوتن از مکانیک به طرز شگفت‌آوری در صحت و وسعت کاربردش موفق بوده است و اساساً بیش از سه قرن دست نخورده باقی مانده است. این قضیه حتی برای قانون جهانی گرانش نیوتن که نیروهای اعمال شده توسط تمام جرم ها به یکدیگر را مشخص می‌کند، برقرار است. در مجموع، این قوانین تقریباً ساختار کامل مکانیک کلاسیک را ارائه می‌دهد و توضیح درستی برای دامنه‌ی وسیعی از حرکت‌ها؛ از مولکول‌های بزرگ گرفته تا تمام کهکشان‌ها، فراهم می‌سازد. در این فصل به مطالعه‌ی این قوانین می‌پردازیم.

۱.۵ قوانین حرکت نیوتن

آیزاک نیوتن سه قانون معروف حرکت خود را که در مجموعه‌ی کتب $Principia$ گردآوری شده، به زبان لاتین و در سال ۱۶۸۷ میلادی به چاپ رسانید. این قوانین بر پایه‌ای مکانیکی تنظیم شده‌اند و اساساً تا حال بدون تغییر باقی مانده اند. حتی زمانی که به زبان انگلیسی ترجمه شد، لغات اصلی نیوتن برای فهمیدن بسیار مشکل بودند. عمدتاً به این دلیل که اصطلاحات قرن هفدهم هنوز کهن و قدیمی هستند. هم‌چنین کاربرد قوانین برای ذرات، مفهومی که هیچ‌گاه توسط نیوتن استفاده نشده است، فرمول‌بندی می‌شوند. یک ذره یک جسم ایده‌ال است که تنها یک نقطه از فضا را اشغال می‌کند و هیچ گونه ساختار داخلی ندارد. چنین ذراتی هرگز در طبیعت به وجود نیامده‌اند، اما مناسب است تا اجسام واقعی را همان‌گونه که از ذرات ساخته شده‌اند در نظر گرفت. در اصطلاحات جدید، قوانین نیوتن به صورت زیر بیان می‌شوند.

قوانین حرکت نیوتن

- قانون اول: زمانی که تمام تاثیرات بیرونی روی یک ذره از بین می‌روند، ذره با سرعت ثابت حرکت می‌کند (این سرعت ممکن است صفر باشد در این صورت ذره ساکن باقی می‌ماند.)

- قانون دوم: زمانی که نیروی F به ذره‌ای به جرم m اعمال می‌شود، ذره با شتاب آنی a که با فرمول

$$\mathrm{F} = m\mathrm{a} \tag{۱.۵}$$

تعیین می‌شود، حرکت می‌کند. واحد نیرو توسط واحدهای جرم و شتاب مشخص می‌شود که معمولا با واحد نیوتن اندازه‌گیری می‌شود.

- قانون سوم: زمانی که دو ذره به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند، این نیروها اولاً با یکدیگر در بزرگی یکسان و ثانیاً متفاوت در جهت (خلاف جهت هم‌دیگر) هستند و ثالثاً موازی با خط مستقیمِ واصل بین دو ذره اعمال می‌گردند.

تفسیر قوانین حرکت نیوتن

قوانین نیوتن خودشان به اندازه‌ی کافی آشکار هستند. اما سوالات مهم بی پاسخی در آن‌ها هست از جمله:

- الف: در چه چارچوب مرجعی این قوانین درست هستند؟

- ب: تعاریف جرم و نیرو چیست؟

در بخش‌های پیش رو این سوالات پاسخ داده می‌شوند. چیزی که در اینجا انجام خواهیم داد این است که فعلا قوانین نیوتن را کنار می‌گذاریم و به آزمایشات ساده برای ذرات باز می‌گردیم. این‌ها را آزمایش‌های ذهنی می‌نامیم. زیرا گرچه کاملاً منطقی به نظر می‌رسند ولی در عمل بعید است قابل پیاده‌سازی باشند. نتایج فرضی برای چنین آزمایشاتی به عنوان قوانین اولیه حاکم بر مکانیک است که ما براساس آن تعاریف خودمان از جرم و نیرو را پایه گذاری می‌کنیم. سرانجام این قوانین و تعاریف نشان داده شده معادل با قوانین نیوتنی است که در بالا بیان کردیم. می‌توان گفت که این فرایند تفسیری از قوانین نیوتن است.

۲.۵ چارچوب‌های لخت و قانون اینرسی

همان‌طور که اشاره شد قانون اول بیان می‌کند که وقتی ذره‌ای بدون تاثیر از هرگونه نیروی بیرونی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، یعنی این که در یک مسیر مستقیم و با تندی ثابت حرکت می‌کند. بنابراین بر خلاف نظر ارسطو، ذره برای حفظ حرکت خود نیازمند هیچ قدرت بیرونی نیست. چون اثر گرانش زمین درستی قانون اول نیوتن، توسط آزمایش انجام شده بر روی زمین، را رد می‌کند. نیوتن در پیشنهاد قانونی که احتمالاً نمی‌توان آن را تایید کرد، بینش چشم‌گیری را از خود نشان داد. به منظور تایید قانون اول، تمام اثرات بیرونی بایستی حذف شوند که به این معناست که ما باید آزمایش ذهنی خود را در مکانی دور دست از هر گونه جسم مادی مانند فضای خالی میان کهکشان‌ها انجام دهیم. در ذهن‌مان بنابراین مکانی وجود دارد که به ذرات آزمونی مجهز شده که می‌توانیم به طرق مختلف آن‌ها را رها کنیم و حرکت آن‌ها را مشاهده کنیم. مطابق با قانون اول، هر یک از این ذارت باید با سرعت ثابت حرکت کنند.

چارچوب‌های لخت

تاکنون سوال در مورد چارچوب مرجعی را که باید برای مشاهده حرکت ذرات آزمون استفاده شود، نادیده گرفته‌ایم. زمانی که برای اولین بار با این سوال روبه رو می‌شویم، احتمالا پاسخ ما این است که چارچوب مرجعی که ثابت است. اما ثابت به چه؟ زمین می‌چرخد و در حرکت مداری حول خورشید است. کل منظومه شمسی قسمتی از کهکشان راه شیری است که حول مرکزش در حال چرخش است (سیاه‌چاله با جرم زیاد در مرکز کهکشان قرار دارد). کهکشان‌ها خودشان نسبت به یکدیگر در حال حرکت هستند. بنابراین در حقیقت هر چیزی در جهان نسبت به شی دیگر در حال حرکت است و تقریبا هیچ چیزی را نی‌توان ثابت در توصیف کرد. لذا می‌توان نتیجه گرفت هر چارچوبی مرجعی به اندازه سایرین خوب است، اما این گونه نیست مگر قانون اول اصلا برقرار نباشد، تنها در برخی از چارچوب‌های خاص قانون اول برقرار است. برای نمونه فرض کنید قانون اول در چارچوب $\mathcal{F}$ برقرار باشد. بنابراین این قانون در چارچوب دیگری یعنی $\mathcal{F}'$ که نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ به طور متقابل بدون شتاب است، نیز برقرار است. این به این دلیل است که اگر ذرات آزمون سرعت‌های ثابت در $\mathcal{F}$ داشته باشند، بنابراین در این چارچوب شتابشان صفر است. اما چون $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ چارچوب‌های متقابلا بدون شتاب هستند، ذرات آزمون بایستی در چارچوب $\mathcal{F}'$ شتابشان صفر باشد و در نتیجه بایستی با سرعت ثابت در چارچوب $\mathcal{F}'$ حرکت کنند. همچنین قانون اول در دیگر چارچوب‌ها (شتابدار) برقرار نیست.

- چارچوب لخت: هر چارچوب مرجعی که در آن قانون اول برقرار باشد را یک چارچوب لخت می گویند.

در نتیجه، اگر یک چارچوب لخت وجود داشت باشد، آنگاه بینهایت چارچوب وجود دارند که با سرعت ثابت نسبت به دیگر در حل حرکت هستند در همگی قانون اول برقرار است. ظاهرا قانون اول فاقد محتوای فیزیکی است زیرا می‌گوییم این قانون در چارچوب‌هایی که این قانون درست است، صادق است. به این حال، اینطور نیست زیرا در حقیقت چارچوب‌های لخت به منظور ایجاد واقعیت فیزیکی حقیقی برای قانون اول مطرح می‌شوند. اینکه چرا باید این دسته ویژه از چارچوب‌ها مرجع که در آن قوانین فیزیکی شکل ساده به خود می‌گیرند، وجود داشته باشد، یک سوال بسیار ژرف و جالب است که در اینجا مجبور به پاسخگویی نیستیم. بحثمان را با جمله زیر که یک قانون فیزیکی است خلاصه می‌کنیم.

- قانون اینرسی (لختی): در طبیعت یک دسته منحصر به فرد از چارچوب‌های مرجع متقابلا بدون شتاب وجود دارد که در آن قانون اول صادق است.

۳.۵ شکل‌های مختلف نیرو

همان‌گونه که در قسمت‌های قبل گفته شد، نیرو را می‌توان از قانون اول نیوتن تعریف کرد. در واقع در قانون اول نیوتن می‌گوییم که در عدم حضور نیروهای خارجی و در یک چارچوب مرجع لخت، جسم ساکن در حالت سکون خود باقی می‌ماند و جسم در حال حرکت به حرکت خود با سرعت ثابت ادامه می‌دهد. پس در قانون اول منظور آن نیست که برآیند نیروها صفر باشد، منظور این است که در عدم حضور نیروهای خارجی چه اتفاقی می‌افتد. در واقع به کمک قانون اول نیوتن می‌توان نیرو را تعریف کرد. بنابراین عامل تغییر در حرکت جسم تعریف صحیح در مورد نیرو است نه این‌که بگوییم آن‌چه باعث حرکت جسم می‌شود؛ چون جسم ممکن است با سرعت ثابت در حال حرکت باشد. تعریف دقیق نیرو به معنای عامل تغییر در حرکت جسم است.
به طور کلی نیروها را می‌توان به دو کلاس تقسیم بندی کرد:

- کلاس اول را نیروهای تماسی می گویند، مانند نیرویی که شما به یک میز وارد می‌کنید و آن را روی زمین هول می‌دهید. نیرویی که یک مادر به کالسکه‌ی بچه وارد می‌کند و آن را به حرکت در می آورد. نیرویی که سبب کشیده شدن و یا فشرده شدن فنر می‌شود. در هر سه مورد از نیروهای ذکر شده همواره جسم و عامل نیرو با هم‌دیگر در تماس هستند.

- کلاس دیگری از نیروها، نیروهای میدانی هستند: مانند نیروی الکتریکی، نیروی مغناطیسی، نیروی گرانش. در این نیروها هیچ‌گونه تماسی بین عامل نیرو و جسم وجود ندارد. با نزدیک کردن یک تکه آهن به یک آهنربا، حرکت تکه آهن تغییر می‌کند. پس به تکه‌ی آهن نیرو وارد می‌شود. اگر یک بار مثبت را به یک بار منفی نزدیک کنیم، این دو به سمت هم حرکت کرده و در حرکت آن‌ها تغییری ایجاد می‌شود. پس بین این دو نیرویی وجود دارد. به این کلاس از نیروها که بین عامل نیرو و جسم تماسی وجود ندارد، نیروهای میدانی گفته می‌شود.

در ادامه به بیان نیروهای معروف می‌پردازیم. بیشتر این نیروها نیروهای تماسی هستند که در این کتاب با آن‌ها سر و کار داریم.

۱.۳.۵ نیروی گرانش

تمامی اجسام در اطراف زمین توسط زمین جذب می‌شوند. نیروی جاذبه‌ای را که از سوی زمین به اجسام وارد می‌شود، نیروی گرانشی گفته و با $\vec{F_g}$ نشان داده می‌شود. که جهت آن همواره به سمت زمین است و مقدار این نیرو را اصطلاحاً وزن یک جسم می‌گویند. در بخش‌های قبل دیدیم که اجسام در اطراف زمین با شتاب گرانشی به سمت زمین سقوط می‌کنند. به کمک قانون دوم نیوتن اندازه این نیرو برابر است با

$$\vec{F_g} = mg \tag{۲.۵}$$

که این مقدار همان وزن جسم است. با توجه به این‌که این نیرو به شتاب گرانشی بستگی دارد و در نقاط مختلف زمین متفاوت است، وزن جسم در نقاط مختلف زمین مقدار متفاوتی به خود می‌گیرد. هم‌چنین سیارات و کرات مختلف نیز شتاب گرانشی متفاوتی دارند. در نتیجه یک جسم در سطح آن‌ها نیروی وزن متفاوتی دارد.

۲.۳.۵ نیروی عمودی سطح

فرض کنید کتابی روی میز قرار گرفته است. در قسمت قبل گفتیم که به هر جسمی در نزدیکی زمین نیروی وزن به سمت پایین وارد می‌شود. پس چرا کتاب روی میز به سمت زمین شتاب نمی‌گیرد؟ بنابر قانون دوم نیوتن نیروی به سمت پایین به کتاب وارد شده پس باید به سمت پایین شتاب بگیرد. ولی چرا این اتفاق نمی‌افتد؟
علت آن است که کتاب روی میز قرار دارد و از طرف میز نیرویی به صورت عمودی به آن وارد می‌شود. این نیرو را که از طرف سطح به هر جسمی که روی آن قرار گرفته وارد می‌شود، نیروی عمودی سطح گفته می‌شود. نیروی عمودی سطح همواره بر سطح عمود است. این نیرو را عموماً با $\vec{N}$ نشان می‌دهیم.

۳.۳.۵ نیروی کشش طناب

وقتی جسمی را با طناب می‌کشیم از طرف طناب نیرویی به آن جسم وارد می‌شود. این نیرو را نیروی کشش طناب می‌گویند و با حرف T نشان داده می‌شود. نیروی کشش طناب در تمام طول طناب یکسان است. در واقع علت آن است که در بیشتر مسائلی که ما مطالعه می‌کنیم طناب کِش نمی‌آید و هیچ‌گاه طناب شُل نمی‌شود؛ یعنی همواره طول طناب مقدار ثابتی دارد و این بدان معناست که دو جسمی که با طناب به هم متصل شده‌اند شتاب یکسانی دارند ولی باید در مسائل مختلف با دقت آن را تحلیل کنید.

۴.۳.۵ نیروی کشسانی فنر

همان‌طور که می‌دانید زمانی که یک فنر را کشیده و یا فشرده می‌کنیم، همواره فنر تمایل دارد به حالت اولیه خود برگردد که اصطلاحاً آن را نیروی کشسانی فنر می‌گویند و مقدار آن

$$F = -kx \tag{۳.۵}$$

است. منظور از علامت منفی آن است که فنر همواره تمایل دارد به حالت اولیه خود برگردد؛ یعنی اگر فنر فشرده شده می‌خواهد به حالت باز شده برگردد و اگر کشیده شده می خواهد به حالت فشرده‌ی اولیه‌ی خود بازگردد. k ثابت کشسانی فنر است که به ساختمان درونی فنر بستگی دارد و x میزان جابجایی فنر از حالت اولیه‌ی خود است. این رابطه را قانون هوک می‌گویند.

۵.۳.۵ نیروی اصطکاک

زمانی که یک جسم روی یک سطح حرکت می‌کند یا آن‌که در یک ماده‌ی ویسکوز مانند هوا یا آب حرکت می‌کند، مقاومتی در مقابل حرکت جسم وجود دارد که این مقاومت به خاطر برهم‌کنش بین سطوح اطراف آن جسم است. این نیروی مقاومتی را نیروی اصطکاک می‌گویند. در شکل فرض کنید جعبه‌ای روی میز قرار دارد و در حالت سکون است. نیروی $\vec{F}$ به آن وارد می‌شود. اما آن جسم حرکت نمی‌کند. در راستای y دو نیروی گرانش و نیروی عمودی سطح به جسم وارد می‌شود. در راستای x نیروی $\vec{F}$ وارد شده و باز هم جسم حرکت نمی‌کند. علت چیست؟ علت آن است که به خاطر برهم‌کنش بین جعبه و سطح نیروی اصطکاکی از طرف سطح در جهت مخالف به جسم وارد شده و مانع از حرکت آن می شود. این نیرو را با $\vec{f_s}$ نشان می‌دهیم. اگر جسم روی یک سطح صیقلی قرار داشته باشد و یا این‌که جسم روی یک سطح یخ‌زده باشد، با کوچک‌ترین نیرویی شروع به حرکت می‌کند. ولی چون در این‌جا نیروی اصطکاک وجود دارد، جسم حرکت نمی‌کند و همچنان در حالت سکون قرار دارد. این اصطکاک که جسم هم‌چنان در حالت سکون قرار دارد، را نیروی اصطکاک ایستایی می‌گویند. اگر مقدار نیروی $\vec{F}$ را زیاد کنید، هم‌چنان جسم ساکن است. پس نیروی اصطکاک نیز به همان مقدار اضافه می‌شود. این اضافه شدن تا جایی ادامه پیدا می‌کند که جسم در آستانه‌ی حرکت قرار می‌گیرد. منظور از آستانه‌ی حرکت آن است که پس از آن با تغییر نیروی بسیار کوچکی و اضافه شدن آن جسم شروع به حرکت می‌کند. برای اصطکاک ایستایی رابطه‌ی مشخصی وجود ندارد ولی در جایی که جسم در آستانه‌ی حرکت قرار می‌گیرد یک رابطه‌ی مشخص داریم که مقدار آن برابر

$$\vec{f_s} = \mu_s N \tag{۴.۵}$$

است که N نیروی عمودی سطح و μ_s ضریب اصطکاک ایستایی است. دقت کنید این رابطه فقط برای نقطه‌ای است که جسم در آستانه‌ی حرکت قرار دارد و پیش از آن نمی‌توانید از آن استفاده کنید. چون قبل از اینکه جسم در آستانه‌ی حرکت قرار بگیرد نیروی اصطکاک ایستایی مقدار مشخصی ندارد. از لحظه‌ای که به جسم نیرو وارد می شود تا زمانی که جسم در آستانه‌ی حرکت قرار می‌گیرد با اضافه شدن نیرو مقدار نیروی اصطکاک ایستایی هم اضافه می‌شود به همین خاطر در این بازه مقدار مشخصی برای نیروی اصطکاک ایستایی وجود ندارد و نیروی اصطکاک ایستایی فقط در لحظه‌ای که جسم به آستانه‌ی حرکت می‌رسد و اصطلاحاً نیروی اصطکاک ایستایی در بیشینه‌ی خود است رابطه‌ی ۴.۵ برای آن برقرار است.

اگر مقدار نیروی $\vec{F}$ را کمی بیشتر کنیم از آن‌جا به بعد جسم شروع به حرکت می‌کند. وقتی جسمی شروع به حرکت کرد هم‌چنان از طرف سطح با حرکت جسم مخالفت می‌شود. این نیروی مقاومت را نیروی اصطکاک جنبشی می‌گویند. مقدار این نیروی همواره در طول حرکت مقدار مشخصی است و از رابطه‌ی پیروی می‌کند

$$\vec{f_k} = \mu_k N \tag{۵.۵}$$

که در آن μ_k ضریب اصطکاک جنبشی است. هم ضریب اصطکاک ایستایی و هم ضریب اصطکاک جنبشی هر دو به ویژگی‌های سطح بستگی دارند. بار دیگر تاکید می‌کنیم که رابطه‌ی ۴.۵ در مورد نیروی اصطکاک ایستایی فقط

در نقطه‌ای که جسم در آستانه‌ی حرکت قرار می‌گیرد، صادق است.

۴.۵ حل مسائل و کاربرد قوانین نیوتن

در این فصل می‌خواهیم به حل مسائل دینامیک به کمک قوانین نیوتن بپردازیم. برای این کار کافی است چند مرحله‌ی اصلی را پشت سر بگذاریم. به کمک این مراحل حل مسائل، به فرآیندی جذاب و چالش‌برانگیز تبدیل می‌شود.

- انتخاب دستگاه مختصات: در نخستین گام دستگاه مختصات مورد نظر را انتخاب کرده و بردارهای پایه در آن را مشخص می‌کنیم. از آن‌جا که تمام کمیت‌های مورد علاقه‌ی مادر مسئله‌ی نیروها کمیت‌های برداری هستند، کمیت‌های در راستای بردارهای یکه را با مقدار مثبت و کمیت‌های در خلاف جهت بردار های یکه را با مقادیر منفی در مسئله وارد می‌کنیم.

- در گام دوم باید جسمی را که می‌خواهیم قوانین حرکت آن را بررسی کنیم مشخص نمایید منظور مشخص کردن جسمی است که نیروهای مختلف به آن وارد شده و می‌خواهیم حرکت آن را بررسی کنیم. دقت کنید فقط نیروهای وارد بر آن جسم را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نیروهایی که آن جسم به جسم‌های دیگر وارد می‌کنند، بسته به نیاز مسئله وارد خواهند شد. جسم مورد نظر ممکن است اشکال مختلفی داشته باشد. ولی آن‌چه ما در مسائل مکانیک و در این درس مورد بررسی قرار می‌دهیم، اجسام صلب هستند. جسم صلب جسمی است که نقاط مختلف آن نسبت به هم حرکت نمی‌کنند. در نتیجه به جای در نظر گرفتن جسم با شکل مختلف یک نقطه از آن که اصطلاحاً به آن مرکز جرم گفته می‌شود را مطالعه می‌کنیم. در واقع جسم را به صورت یک نقطه در نظر گرفته و همه نیروهای وارد بر آن را به آن نقطه که همان مرکز جرم است، وارد می‌کنیم.

- پس از انتخاب جسم باید نیروهای وارد بر آن جسم را مشخص کرده و آن‌ها را رسم نماییم این کار را اصطلاحاً رسم نمودار جسم آزاد گفته می‌شود. در واقع در نمودار جسم آزاد نیروهای وارد بر جسم را به طور مشخص و جدا رسم می‌کنیم. مهم‌ترین این نیروها شامل نیروی گرانشی که از طرف زمین وارد می‌شود، نیروی عمودی سطح و نیروهای تماسی است که بین سطوح مختلف و از طریق اجسام مختلف به یکدیگر وارد می‌شوند، هستند. برای تحلیل نیروهای تماسی استفاده از قانون سوم نیوتن بسیار اهمیت دارد.

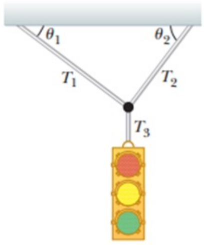
- پس از آن‌که نیروهای وارد بر جسم را به طور کامل مشخص کردیم، در هر راستایی قانون دوم نیوتن را می‌نویسیم. در قصمت‌های قبل گفتیم که حرکت جسم در ابعاد مختلف را می‌توان به راستاهای مختلف تجزیه کرده و در نهایت بردار برایند را به صورت برآیندی از کمیت‌های برداری نوشت. پس قانون دوم نیوتن را در هر راستا به صورت مجزا به کار برده، شتاب و دگر کمیت‌های مورد نظر را از آن محاسبه می‌کنیم.

- دقت کنید کمیت‌هایی که مقدار آن‌ها مشخص نیست را بدون جهت و فقط اندازه‌ی آن‌ها را در مسئله قرار می‌دهیم. از روی مقدار مثبت یا منفی به دست آمده برای کمیت‌های مجهول می توان جهت آن‌ها را مشخص کرد.

- ممکن است گاهی تعداد مجهولات مسئله از تعداد معادلاتی که از قانون دوم نیوتن به دست می‌آیند، بیشتر باشد. در این صورت باید به کمک دیگر فرض‌های مسئله و به کمک دیگر روابطی که در سوال وجود دارد، قیدهای دخیل در مسئله را پیدا کرده تا تعداد معادلات و مجهولات با یکدیگر برابر شوند.

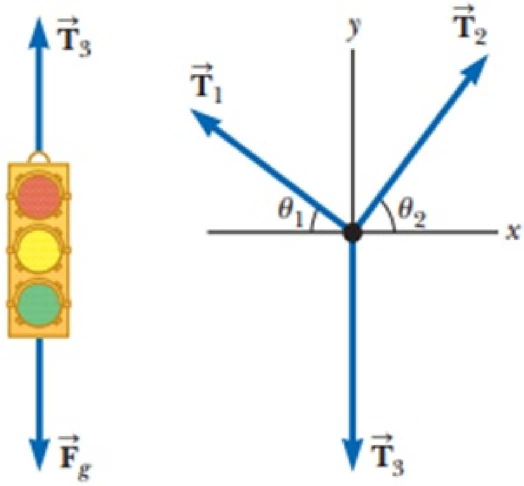
مثال‌های حل شده

مثال۱) چراغ راهنمایی به وزن $122N$ توسط دو کابل به صورت شکل ۱.۵ آویزان شده است. فرض کنید زاویه‌ها $\theta_1 = 37°, \theta_2 = 53°$ است. قدرت این کابل‌ها به اندازه‌ی کابل عمودی نیست و اگر کشش در آن‌ها از $100N$ بیش‌تر شود، پاره می‌شوند. آیا چراغ راهنما در این وضعیت باقی می‌ماند یا این‌که پاره می‌شود؟



شکل ۱.۵: شکل مربوط به مثال۱

برای حل این سوال، مطابق گام‌های گفته شده عمل کنید. بنابراین نمودار جسم آزاد آن به صورت شکل ۲.۵ خواهد بود. حال نیروها را تجزیه می‌کنیم



شکل ۲.۵: نمودار جسم آزاد

$$\begin{aligned} x :&\quad T_1 \cos\theta_1, T_2 \cos\theta_2 \\ y :&\quad T_1 \sin\theta_1, T_2 \sin\theta_2. \end{aligned}$$

حال قانون دوم نیوتن در دو راستا می‌نویسیم

$$\sum_x F_x = 0 = T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 = 0 \Rightarrow T_2 \cos\theta_2 = T_1 \cos\theta_1$$

$$\sum_y F_y = 0 = T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 - T_3 = 0 \Rightarrow T_3 = T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2$$

آن‌چه تاکنون به دست آوردیم نیروهای وارد بر نقطه‌ی اتصال طناب‌ها است. حال برآیند نیروهای وارد بر چراغ راهنمایی را در نظر می‌گیریم

$$\sum_y F_y = 0 = T_3 - W = 0 \Rightarrow T_3 = W = 122N \tag{۶.۵}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \\ T_3 &= T_1 \sin\theta_1 + T_1 \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \sin\theta_2 \Rightarrow \\ T_1 &= \frac{T_3}{\sin\theta_1 + \cos\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{W}{\sin\theta_1 + \cos\theta_1 \tan\theta_2} = 73/4N \\ T_2 &= 97/4N. \end{aligned}$$

هر دو نیرو از $100N$ کمتر هستند، پس چراغ راهنمایی به همین شکل آویزان می‌ماند.

مثال۲) جسمی به جرم m روی سطح شیبدار که با افق زاویه‌ی θ می‌سازد، قرار گرفته است، شکل ۳.۵.

الف) فرض کنید که سطح صیقلی است و جسم روی سطح اصطکاک ندارد. شتاب جسم در راستای سطح شیب‌دار چقدر است؟
ب) اگر جسم از حالت سکون رها شود، سرعت جسم وقتی به اندازه‌ی d روی سطح جابه‌جا شد، چقدر است؟
الف) نیروهای وارد بر جسم در دو راستا را مشخص می‌کنیم. در راستای y

$$\sum_y \vec{F}_y = ma_y \Longrightarrow N - mg\cos\theta = ma_y. \tag{۷.۵}$$

چون جسم روی سطح قرار دارد و از سطح جدا نمی‌شود $a_y = 0$ است. پس

$$N = mg\cos\theta. \tag{۸.۵}$$

در راستای x داریم

$$\sum_x \vec{F}_x = ma_x \Longrightarrow mg\sin\theta = ma_x. \tag{۹.۵}$$

بنابراین شتاب جسم برابر

$$a_x = g\sin\theta, \tag{۱۰.۵}$$

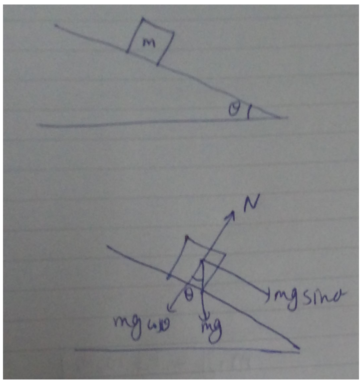
است.
ب) از رابطه‌ی

$$v^2 - v_0^2 = 2a_x d, \tag{۱۱.۵}$$

استفاده می‌کنیم. پس

$$v = \sqrt{2gd\sin\theta}. \tag{۱۲.۵}$$

مثال۳) در شکل ۴.۵ فرض کنید دو جسم m_1 و m_2 توسط طنابی از روی قرقره به هم متصل شده‌اند. طناب و قرقره بدون اصطکاک است و طناب جرم ندارد. شتاب دو جسم را محاسبه کنید.
به طور کلی در مسائلی که طناب، جسم و قرقره به شکل



شکل ۳.۵: نمودار جسم آزاد

وجود دارند، از رهیافت کلی ذیل استفاده می‌کنیم. ابتدا دستگاه مختصات را مشخص کرده و نیروهای وارد بر هر دو جسم به آن را مشخص کنید. به هر دو جسم نیروی گرانش و نیری کشش طناب وارد می‌شود. بنابراین از قانون دوم نیوتن داریم

$$m_1g - T = m_1a_{1y} \tag{۱۳.۵}$$

$$m_2g - T = m_2a_{2y} \tag{۱۴.۵}$$

دقت کنید چون طناب جرم ندارد، کشش در طول آن یکسان است. در این معادلات کشش طناب و شتاب دو جسم هر سه مجهول هستند. ولی فقط دو معادله داریم. چگونه می‌توان این سه مجهول را به کمک دو معادله حرکت کرد؟ روش آن است که ما باید از یک معادله‌ی دیگر نیز استفاده کنیم. معادله‌ای که استفاده می‌کنیم، ثابت بودن طول طناب است؛ یعنی چون طناب شُل و کشیده نمی‌شود، طول آن یکسان است. پس

$$y_1 + y_2 = L \tag{۱۵.۵}$$

که L طول طناب و مقدار آن ثابت است. از طرفین رابطه‌ی ۱۵.۵ دو بار مشتق می‌گیریم. بنابراین

$$a_{1y} + a_{2y} = 0 \Longrightarrow a_{1y} = -a_{2y} \tag{۱۶.۵}$$

است. پس بین شتاب‌های دو جسم رابطه بر قرار شد. حال این شتاب را در روابط ۱۳.۵ جای‌گذاری کرده و به دست می‌آوریم

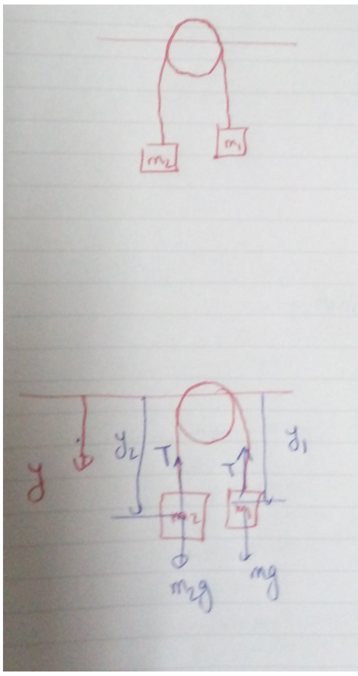
$$a_{2y} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g \tag{۱۷.۵}$$

$$a_{1y} = -\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g \tag{۱۸.۵}$$

دقت کنید همواره در مسائلی که از طناب و قرقره استفاده می‌شود باید به دنبال روابطی مانند ۱۵.۵ بگردیم. روابطی که در آن‌ها طول طناب ثابت است و سپس با مشتق گرفتن از آن بین شتاب‌ها رابطه برقرار کنیم.

۵.۵ تمرین

۱) به دلیلِ چرخش زمین، نخِ آونگ دقیقا در راستای نیروی گرانش زمین قرار نمی‌گیرد و ممکن است کمی از این راستا منحرف شود.



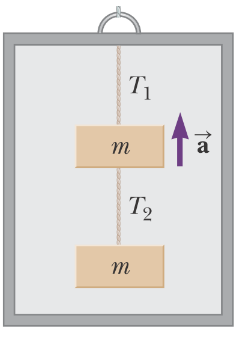
شکل ۴.۵: نمودار جسم آزاد

الف) نشان دهید زاویه‌ی انحراف θ بر حسب رادیان، در عرضِ جغرافیایی L برابر است با

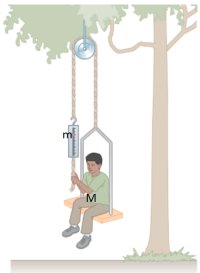
$$\theta = (\frac{2\pi^2 R}{gT^2}) \sin 2L$$

که در آن R شعاع زمین و T دوره‌ی تناوب چرخش زمین است.
ب) زاویه‌ی انحراف در کدام عرض جغرافیایی بیشینه است؟
ج) زاویه‌ی انحراف در دو قطبِ زمین و استوا چقدر است؟

۲) در شکل زیر، اگر آسانسور با شتاب $\vec{a}$ به سمت بالا حرکت کند، کشش هر طناب را پیدا کنید.

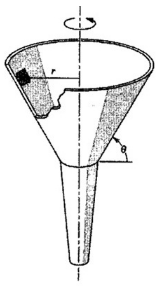


۳) در شکل ۵.۵ جرم شخص و نیروسنج به ترتیب M ، m و شتاب شخص a_0 به سمت بالا است. نیروسنج چه مقداری را نشان می‌دهد.
۴) مکعب بسیار کوچکی به جرم m در قیفی قرار دارد که با آهنگ ثابت v دور بر ثانیه حول یک محور قائم مانند



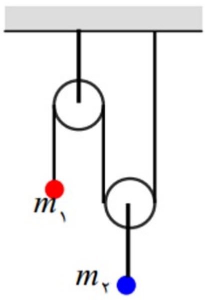
شکل ۵.۵: شکل مربوط به تمرین ۳

شکل ۵.۵ می‌چرخد. زاویه‌ی دیواره‌ی قیف با سطح افقی θ است. ضریب اصطکاک ایستایی بین مکعب و قیف μ_s ، و فاصله‌ی مرکز مکعب از محور دوران r است. بیشترین و کمترین مقدار v برای این‌که مکعب نسبت به قیف حرکت نکند، چقدر است؟



شکل ۶.۵: شکل مربوط به تمرین ۴

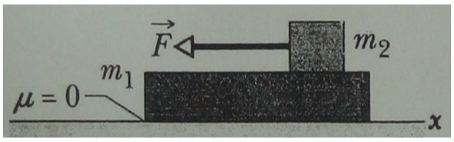
۵) در دستگاه شکل ۷.۵ از جرم قرقره و طناب صرف‌نظر کنید. هم‌چنین طناب با قرقره اصطکاک ندارد. شتاب دو جسم را بیابید.



شکل ۷.۵: شکل مربوط به سوال ۵

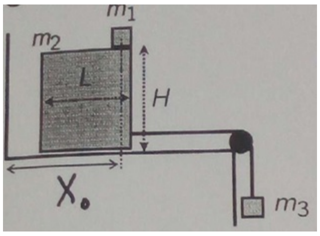
۶) بلوک m_1 به جرم $40kg$ مطابق شکل ۸.۵ بر روی یک سطح بدون اصطکاک قرار دارد. بلوک دیگری به جرم $m_2 = 10kg$ بر روی بلوک اول قرار گرفته است و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی مابین دو بلوک به ترتیب $0/6$ و $0/4$ است. مطابق شکل نیروی افقی به بزرگی $100N$ به بلوک بالایی وارد می‌شود. شتاب هر کدام از بلوک

ها را بیابید. (میان‌ترم دانشگاه صنعتی شریف)



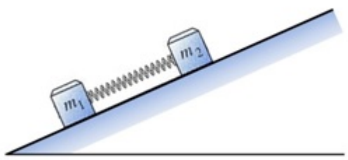
شکل ۸.۵: شکل مربوط به سوال ۶

۷) جسم کوچکی به جرم m_1 در لحظه $t = 0$ مطابق شکل ۹.۵ بر روی یک بلوک قرار داده شده است. بلوک مذکور به جرم m_2 بر روی میزی قرار داده شده و از طریق ریسمان بدون جرم و یک قرقره‌ی بدون اصطکاک به وزنه‌ی دیگری به جرم m_3 متصل است. هر سه جسم جرم یکسانی دارند $m_1 = m_2 = m_3$. هم‌چنین تمامی سطوح بدون اصطکاک هستند. اگر مجموعه را از حالت سکون رها کنیم:
الف) دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر هر کدام از جسم‌ها را ترسیم کنید.
ب) معادلات حرکت هر کدام از اجسام را بنویسید.
پ) محاسبه کنید جسم بالای بلوک (m_1) چه زمانی با سطح برخورد می‌کند؟
ت) مکان برخورد جسم بالای بلوک (m_1) با سطح را بیابید. (میان‌ترم دانشگاه صنعتی شریف)



شکل ۹.۵: شکل مربوط به سوال ۷

۸) مطابق شکل ۱۰.۵ دو جسم با یک فنر به هم متصل شده‌اند و روی یک سطح شیبدار با زاویه‌ی $\theta = 30$ قرار دارند. جرم جسم‌ها برابر است با $m_1 = 2/5kg$ و $m_2 = 4/0kg$ و هر یک با سطح ضریب اصطکاک ایستایی‌ای برابر با $\mu_{s1} = 0/8$ و $\mu_{s2} = 0/4$ و ضریب اصطکاک جنبشی‌ای برابر با $\mu_{k1} = 0/6$ و $\mu_{k1} = 0/3$ دارند. وقتی دو جسم را روی سطح شیبدار قرار دادیم، فنر در حالت آزاد، یعنی در حالت کشیده نشده و فشرده نشده، است. ثابت فنر برابر است با $k = 4/0 \times 10^2 N/m$
آ) شتاب حرکت هر کدام از جسم‌ها درست وقتی رهایشان می‌کنیم چه‌قدر است؟
ب) جسم m_2 چه‌قدر باید پایین بیاید که جسم m_1 شروع به حرکت کند؟ درست در لحظه‌ای که حرکت جسم m_1 شروع می‌شود، شتاب هر کدام از اجسام چه قدر است؟
پ) در همین لحظه سرعت هر کدام از اجسام چه‌قدر است؟
ت) فرض کنید طوری دو جسم را قرار داده‌ایم که همراه با هم به پایین سر می‌خورند، به این معنی که سرعت نسبی‌شان همواره صفر است. در این حالت فنر نسبت به حالت عادی چه‌قدر باید فشرده شده باشد؟(میان‌ترم دانشگاه صنعتی شریف)



شکل ۱۰.۵: شکل مربوط به سوال ۸

فصل ۶

انرژی جنبشی و پتانسیل، کار و پایستگی انرژی

در این بخش ابتدا انرژی جنبشی و نیز قضیه کار و انرژی جنبشی را معرفی می‌کنیم. سپس با تعریف نیروهای پایستار و غیر پایستار ارتباط میان کار با انرژی پتانسیل را استخراج می‌نماییم. در ادامه با استفاده از قضیه کار و انرژی، به بررسی پایستگی انرژی جنبشی و پتانسیل برای سیستم‌های منزوی و غیر منزوی می‌پردازیم.

۱.۶ انرژی جنبشی

در فیزیک انرژی یک کمیت عددی است که بایستی به یک جسم منتقل شود تا کاری انجام گیرد یا گرمایی تولید شود. همچنین انرژی یک کمیت پایسته است به طوری که از یک صورت به صورت دیگر تبدیل می‌شود ولی نابود یا خلق نمی‌شود. در واحد استاندارد، واحد آن ژول (j) است که در واقع یک ژول انرژی منتقل شده به جسم، میزان کاری است که برای حرکت آن به اندازه یک متر در مقابل اعمال نیروی یک نیوتن انجام می‌گیرد. صورت های مختلف انرژی شامل انرژی جنبشی ناشی از حرکت جسم، انرژی پتانسیل ذخیره شده با قرار دادن جسم در معرض یک میدان نیروی خارجی مثلا گرانش، نیروی الکتریکی و مغناطیسی، انرژی الاستیک ذخیره شده با منبسط کردن اجسام جامد، انرژی شیمیایی آزاد شده زمانی که سوخت می‌سوزد، انرژی تابشی که توسط نور حمل می‌شود، و نیز انرژی گرمایی که بخاطر دمای جسم است، هستند.
انرژی جنبشی K انرژی وابسته به حالت حرکت یک جسم است به طوری که هر چه جسم سریعتر حرکت کند انرژی جنبشی بیشتری دارد. بنابراین می‌توان رابطه انرژی جنبشی را به صورت زیر بیان کرد.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{۱.۶}$$

که m جرم جسم برحسب کیلوگرم و v سرعت جسم با واحد متر بر ثانیه است. برای یافتن ارتباط میان انرژی جنبشی و کار، اجازه دهید در ابتدا کار را تعریف کنیم. به بیانی ساده کار، انرژی منتقل شده به جسم یا انتقال یافته از آن توسط نیروی است که بر جسم وارد می‌شود. بنابراین کار W را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$W = \int \vec{F}.\vec{ds} = \int F ds \cos\theta \tag{۲.۶}$$

که $\vec{F}$ بردار نیروی وارد بر جسم و $\vec{ds}$ بردار جابجایی جسم است. همچنین θ زاویه میان بردار جابجایی و بردار نیرو است. در حالت کلی نیروی که ما به جسم وارد می‌کنیم نیروی متغییری (معمولا تابعی از جابجایی است مثلا نیوری بازگرداننده فنر $-kx$) است و در اغلب مسائل ارائه شده در فیزیک پایه نیرو ثابت فرض می‌شود مثلا

نیروی یکنواخت گرانشی mg یک نیروی ثابت است. بنابراین اگر بردار نیرو را به شکل موضعی (یعنی نیرو تابعی از مختصات باشد.) زیر فرض کنیم.

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \tag{۳.۶}$$

و اگر بردار جابجایی با

$$\vec{ds} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \tag{۴.۶}$$

داده شود. در این صورت کار انجام شده بر جسم

$$W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz \tag{۵.۶}$$

است. برای سادگی فرض می‌کنیم نیروی تنها در یک راستا بر جسم وارد شود بنابراین رابطه بالا به زیر کاهش می‌یابد.

$$W = \int F(x)dx \tag{۶.۶}$$

در موردی که نیرو ثابت در نظر گرفته شود نیز فرمول کار به شکل زیر قابل بیان است.

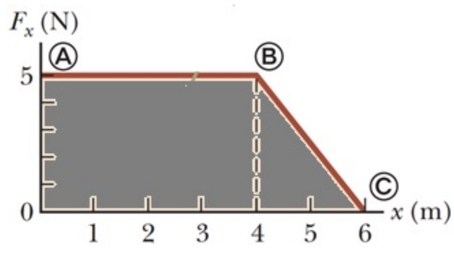
$$W = \vec{F}.\int \vec{ds} = \vec{F}.\vec{d} = Fd\cos\theta \tag{۷.۶}$$

اکنون اجازه دهید رابطه ۶.۶ را به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = m\int_{x_i}^{x_f} \frac{dv}{dt}dx = m\int_{v_i}^{v_f} \frac{dx}{dt}dv = m\int_{v_i}^{v_f} vdv \\ &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = K_f - K_i = \Delta K \end{aligned} \tag{۸.۶}$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که تغییرات انرژی جنبشی منجر به انجام کار می‌شود. همچنین زیر اندیس i حالت اولیه و f وضعیت نهایی جسم را نشان می‌دهند.

مثال ۱: نیروی وارد بر ذره بر حسب x به صورت نمودار ۱.۶ تغییر می‌کند. کار انجام شده بر روی ذره بین دو نقطه‌ی $x = 0$ تا $x = 6$ را بیابید.



شکل ۱.۶: نمودار مربوط به مثال۱

برای حل سوال کافی است از رابطه‌ی ۷.۶ که تعریف کار است، استفاده کنید. این رابطه بیان‌گر این حقیقت است که سطح زیر نمودار نیرو بر حسب جابه‌جایی کار است. پس کافی است سطح زیر نمودار ۱.۶ را حساب کنیم.

پس

$$W_{A-B} = (5N)(4m) = 20J \quad (۹.۶)$$

$$W_{B-C} = \frac{1}{2}(5N)(2m) = 5J \quad (۱۰.۶)$$

$$\Rightarrow W_{A-C} = W_{A-B} + W_{B-C} = 25J \quad (۱۱.۶)$$

مثال ۲: از روش‌های اندازه‌گیری انرژی جنبشی باریکه‌ی نوترونی که از یک رآکتور هسته‌ای خارج می‌شود، اندازه‌گیری مدت زمانی است که طول می‌کشد یکی از ذرات باریکه مسافت بین دو نقطه‌ی ثابت را می‌پیماید. این روش را روش زمان پرواز می‌نامند. فرض کنید نوترونی فاصله‌ی $d = 6/2m$ را در زمان $t = 160\mu s$ می‌پیماید. با فرض این که جرم نوترون $m = 1/67 \times 10^{-27}kg$ است، انرژی جنبشی آن را به دست آورید.

سرعت نوترون برابر با

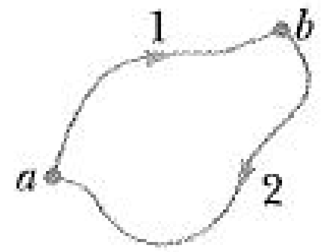
$$v = \frac{d}{t} = \frac{6/2m}{160 \times 10^{-6}s} = 3/88 \times 10^{3}m/s \quad (۱۲.۶)$$

است. پس انرژی جنبشی آن

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}(1/67 \times 10^{-27}kg)(3/88 \times 10^{3}m/s)^2 = 1/26 \times 10^{-18}J. \quad (۱۳.۶)$$

به دست می‌آید.

۲.۶ انرژی پتانسیل



شکل ۲.۶: مسیر رفت و برگشت ذره تحت تاثیر نیرو.

قبل از اینکه به تعریف انرژی پتانسیل بپردازیم لازم است در مورد نیروهای پایستار و ناپایستار قدری بحث کنیم. نیرو در صورتی پایستار است که کار خالص انجام شده توسط آن روی ذره‌ای که در مسیر بسته‌ای از یک نقطه‌ی اولیه حرکت می‌کند و سپس به همان نقطه باز می‌گردد صفر است. به عبارت دیگر نیروی پایستار است که که کار خالص آن روی ذره‌ای که میان دو نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی حرکت می‌کند به مسیر حرکت طی شده توسط ذره بستگی نداشته باشد و تنها به مکان حالت‌های ابتدایی و انتهای بستگی داشته باشد. نیروی گرانشی و نیروی بازگرداننده فنر نیروهای پایستار هستند در حالی که نیروی اصطحکاک نیروی ناپایستار هستند. برای اثبات این ادعا فرض کنید مطابق شکل ۲.۶ مسیر رفت و برگشت ذره‌ای تحت تاثیر نیروی رسم شده باشد. ذره از نقطه‌ی ابتدایی a در راستای مسیر ۱ به نقطه‌ی b می‌رسد و سپس مسیر ۲ را برای بازگشت به نقطه‌ی a انتخاب می‌کند. در هر کدام از مسیرها نیرو روی ذره کار انجام می‌دهد. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرضی بر مثبت بدون و منفی

بودن نیرو در مسیرها وجود ندارد. کار انجام شده در مسیر ۱ را $W_{ab,1}$ و کار انجام شده در مسیر ۲ را $W_{ab,2}$ در نظر می‌گیریم. اگر نیرو پاستار باشد انتظار داریم

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0 \Rightarrow W_{ab,1} = -W_{ba,2} \tag{۱۴.۶}$$

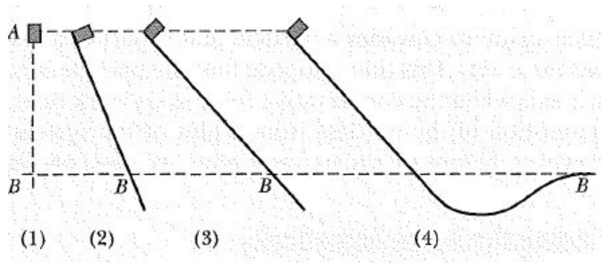
این بدان معنی است که کار انجام شده در مسیر رفت باید منفی کار انجام شده در مسیر برگشت باشد. از طرفی اگر نیرو پایستار باشد می‌توانیم کار در مسیر برگشت را به صورت زیر بنویسیم.

$$W_{ba,2} = -W_{ab,2} \tag{۱۵.۶}$$

با جایگزینی رابطه بالا در معادله ۱۴.۶ به رابطه زیر می‌رسیم.

$$W_{ab,1} = W_{ab,2} \tag{۱۶.۶}$$

که نشان می‌دهد کار انجام شده توسط نیروی پایستار مستقل از انتخاب مسیر است. مثلا همان گونه که در شکل ۳.۶ نشان داده شده کار انجام شده توسط نیروی گرانشی یکنواخت در هر سه مسیر برای گلوله یکسان است.



شکل ۳.۶: مسیرهای مختلف برای حرکت یک ذره.

اکنون انرژی پتانسیل را می‌توان تعریف نمود، انرژی است که به پیکربندی سیستم وابسته است که در آن یک نیروی پایستار وجود داشته باشد. مثلا انرژی پتانسیل برای گرد آوردن کرات منظومه شمسی همان‌گونه که وجود دارد. یا انرژی لازم برای قرار دادن بارهای الکتریکی در راس‌های یک پیکربندی مثلثی شکل و غیره. هرگاه نیروی پایستار روی ذره‌ای در سیستم کار انجام دهد، در این صورت تغییرات انرژی پتانسیل سیستم برابر با منفی کار انجام شده است، یعنی

$$\Delta U = -W \tag{۱۷.۶}$$

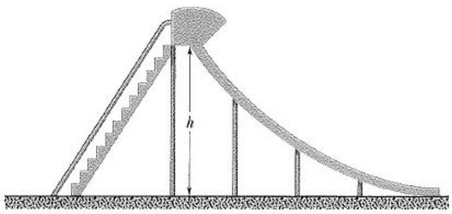
بنابراین اگر ذره از نقطه‌ی ابتدایی x_i به نقطه‌ی نهایی x_f بر اثر اعمال یک نیروی پایستار حرکت کند، در این صورت تغییرات انرژی پتانسیل با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \tag{۱۸.۶}$$

نکته‌ای که در مورد انرژی پتانسیل بایستی به آن توجه کرد انتخاب مبدا پتانسیل است یعنی جایی که در آن انرژی پتانسیل صفر در نظر گرفته می‌شود. انتخاب این مبدا انتخابی دلخواه‌است ما به گونه‌ای که مسئله را آسانتر کند. برای روشنتر شدن این نکته اجازه دهید ابتدا انرژی پتانسیل مربوط به نیروی پایستار گرانشی را بررسی کنیم.

۱.۲.۶ انرژی پتانسیل گرانشی

همانطور که قبلا اشاره شد انرژی پتانسیل گرانشی وابسته به سیستمی متشکل از کره زمین و ذره‌ای در نزدیکی آن است. به طوری که هرگاه ذره‌ای را از ارتفاع y_i به ارتفاع y_j حرکت کند $(y_f > y_i)$ در این صورت تغییرات مربوط به انرژی پتانسیل برای پیکربندی سیستمی متشکل از کره زمین و ذره با رابطه زیر به‌دست می‌آید.



شکل ۴.۶: سیستم فنر و جسم.

$$\Delta U = -\int_{y_i}^{y_f} \vec{F}_g.\vec{dy} = -\int_{y_i}^{y_f} (mg)dy\cos(\pi) = mgy_f - mgy_i \qquad (۱۹.۶)$$

توجه داشته باشد در رابطه بالا جهت بردار نیروی گرانش به سمت زمین ولی جهت بردار جابجایی به سمت بالا است. حال اگر نقطه مرجع (یعنی جایی که انرژی پتانسیل در آن نقطه صفر است.) را مثلا در $y_i = 0$ در نظر بگیریم در این صورت $U_i = 0$ است و انرژی پتانسیل گرانشی در هر ارتفاع دلخواهی با

$$U_g(y) = mgy \qquad (۲۰.۶)$$

داده می‌شود. توجه داشته باشد مثبت یا منفی بودن پتانسیل بستگی به انتخاب نقطه مرجع دارد. اگر ارتفاع مورد نظر بالای نقطه مرجع باشد ارتفاع را مثبت و در نتیجه انرژی پتانسیل مثبت است ولی در زیر نقطه مرجع پتانسیل منفی است. برای روشن شدن این موضوع سنگی را از ارتفاع h که در حال لغزیدن روی سطح شیبداری مانند شکل ۴.۶ را در نظر بگیرید. حالت اول اگر مبدا را در ارتفاع h یعنی در محل شروع سرخوردن سنگ در نظر بگیرید بنابراین پس از سرخوردن سنگ تا پایین سنگ ارتفاع $-h$ را نسبت به مرجع طی کرده در این صورت انرژی پتانسیل نهایی سنگ

$$U_f = -mgh \qquad (۲۱.۶)$$

و اولیه آن $U_i = 0$ (نقطه مرجع) است. حال اگر نقطه مرجع پتانسیل را روی زمین (در پایین سطح شیبدار) در نظر بگیریم در این صورت انرژی پتانسیل در نقطه شروع حرکت برابر با

$$U_i = mgh \qquad (۲۲.۶)$$

است زیرا نسبت به مرجع پتانسیل سنگ در لحظه ابتدای در ارتفاع $+h$ قرار دارد و در لحظه نهایی انرژی پتانسیل آن

$$U_f = 0 \qquad (۲۳.۶)$$

است. ولی نکته قابل تامل این است که تغییرات انرژی پتانسیل مستقل از انتخاب مرجع است در هر دو مورد

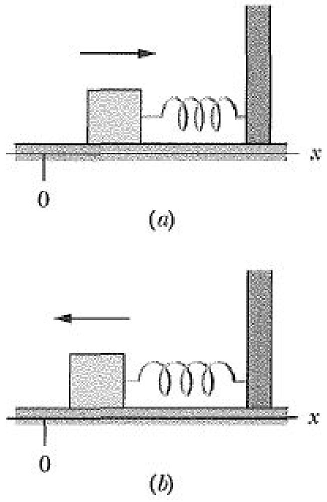
$$\Delta U = U_f - U_i = -mgh \qquad (۲۴.۶)$$

است.

۲.۲.۶ انرژی پتانسیل فنر

همانطور که گفتیم نیروی بازگرداننده فنر نیز یک نیروی پایستار است، بنابراین برای سیستمی متشکل از فنر و جسم همانند آنچه در شکل ۵.۶ نشان داده شده، وقتی جسم از نقطه x_i به نقطه‌ی x_f برود نیروی فنر روی آن کار انجام می‌دهد، در این صورت تغییرات انرژی پتانسیل با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} \vec{F}.\vec{dx} = -\int_{x_i}^{x_f} (kx)dx\cos(\pi) = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \qquad (۲۵.۶)$$



شکل ۵.۶: سیستم فنر و جسم.

لازم به ذکر است که جهت بردار نیروی بازگرداننده فنر همیشه خلاف جهت بردار جابجایی است. اکنون با انتخاب نقطه $x_i = 0$ به عنوان مرجع پتانسیل ($U_i = 0$) انرژی پتانسیل کشسانی عبارت است از

$$U_s(x) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (۲۶.۶)$$

۳.۶ پایستگی انرژی

پس از اینکه انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی را برای یک سیستم مشخص کردیم، اکنون می‌توان انرژی مکانیکی سیستم برابر با مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی است، یعنی

$$E_{mec} = K + U \qquad (۲۷.۶)$$

را مشخص کنیم. برای سیستم‌های منزوی یعنی سیستم‌های که ایزوله هستند و از بیرون به آنها هیچ نیروی خارجی وارد نمی‌شود و تنها نیروهای پایستار در آن حضور دارند تغییرات انرژی مکانیکی بین دو حالت ابتدایی و نهایی سیستم برابر با صفر است،

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = 0 \qquad (۲۸.۶)$$

البته این رابطه می‌توان از قضیه کار و نرژی جنبشی نیز به این رابطه رسید. اگر تنها نیروهای پایستار در سیستم حضور داشته باشند در این صورت

$$W = -\Delta U \qquad (۲۹.۶)$$

است از سوی دیگر طبق قضیه کار و انرژی داریم

$$W = \Delta K \qquad (۳۰.۶)$$

بنابراین به سادگی می‌توان نشان داد که برای یک سیستم منزوی مجموع تغییرات انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی صفر است.

$$\Delta U + \Delta K = 0 \qquad (۳۱.۶)$$

برای مثال اگر در یک سیستم هم نیروی پاستار فنر و هم نیروی گرانشی وجود داشته باشد رابطه بالا به صورت زیر تعمیم داده می‌شود.

$$\Delta U_g + \Delta U_s + \Delta K = 0 \qquad (۳۲.۶)$$

که ΔU_g تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی و ΔU_s تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی است. اما برای سیستم‌های غیر منزوی قضیه کمی متفاوت است در این سیستم‌ها علاوه بر نیروهای پایستار یکسر نیروهای خارجی اعم از نیروهای غیر پایستار مانند اصطحکاک وجود دارد. بنابراین برای این سیستم‌ها کار خاص انجام شده روی سیستم مجموع کار نیروهای پاستار و کار نیروهای خارجی است، یعنی

$$W = W_C + W_{ext} = -\Delta U + W_{ext} \qquad (۳۳.۶)$$

از طرف دیگر طبق قضیه کار و انرژی جنبشی

$$W = \Delta K \qquad (۳۴.۶)$$

می‌توان نتیجه گرفت که برای سیستم غیر منزوی همواره

$$\Delta U + \Delta K = W_{ext} \qquad (۳۵.۶)$$

است. البته کار نیروهای خارجی را می‌توان به انرژی‌های مانند انرژی گرمایی ΔE_{th} و انرژی درونی ΔE_{in} نسبت داد. در این صورت به طور کلی می‌توان سیستم‌ها منزوی در نظر گرفت به شرط آن که شرط پایستگی انرژی به صورت زیر بیان شود.

$$\Delta E_{mec} + \Delta E_{th} + \Delta E_{in} = 0 \qquad (۳۶.۶)$$

لازم به ذکر است چون در اثر اصطحکاک گرما تولید می‌شود معمولا انرژی ΔE_{th} به کار انجام شده توسط نیروی اصطحکاک مربوط است، یعنی

$$\Delta E_{th} = -W_{f_k} \qquad (۳۷.۶)$$

مثال۳: جسمی به جرم $m = 4/5g$ از ارتفاع $h = 10/5m$ بالای سطح زمین سقوط می‌کند. سرعت جسم در لحظه‌ی برخورد با زمین چقدر است؟

می‌دانیم

$$\Delta K + \Delta U = 0 \qquad (۳۸.۶)$$

بنابراین

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \qquad (۳۹.۶)$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times (9/8m/s^2)(10/5m)} = 14/3m/s. \qquad (۴۰.۶)$$

دقت کنید این نتیجه مستقل از جرم جسم است.

مثال۴: جسمی به جرم $m = 3/63kg$ با سرعت $v = 1/22m/s$ روی میز افقی بدون اصطکاکی می‌لغزد. این جسم به فنری برخورد کرده و آن را فشرده می‌سازد تا به سکون برسد. اگر ثابت فنر $k = 135N/m$ باشد، میزان فشردگی آن را به دست آورید.

تغییرات انرژی جنبشی جسم برابر است با

$$\Delta K = K_2 - K_1 = 0 - \frac{1}{2}mv^2. \qquad (۴۱.۶)$$

کار جسم روی فنر سبب فشردگی فنر می‌شود. بنابراین

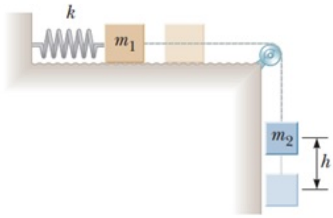
$$W = -\frac{1}{2}kd^2 \qquad (۴۲.۶)$$

است. پس

$$-\frac{1}{2}kd^2 = -\frac{1}{2}mv^2 \qquad (۴۳.۶)$$

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = 0/20m. \qquad (۴۴.۶)$$

مثال۵: دو بلوک با طنابی به هم وصل شده‌اند. طناب از روی قرقره‌ی بدون اصطکاکی مانند شکل ۶.۶ گذشته است. جسم m_1 به فنری با ثابت k متصل است. زمانی که طول فنر در حالت علدی قرار دارد، سیستم را از حالت تعادل خارج می‌کنیم. اگر جسم آویزان m_2 به اندازه‌ی h سقوط کند، مقدار ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم m_1 و سطح را به دست آورید.
چون مختصه‌ی عمودی جسمی که به صورت افقی روی سطح حرکت می‌کند، عوض نمی‌شود پس انرژی جنبشی



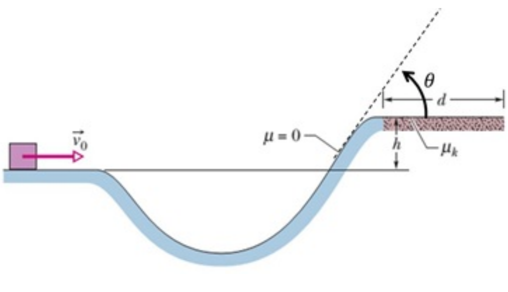
شکل ۶.۶: شکل مربوط به مثال ۵

آن صفر است $\Delta K = 0$.

$$\Delta U = W_{ext}$$
$$\Delta U_{\text{گرانش}} + \Delta U_{\text{فنر}} = W_{ext}$$
$$-m_2gh + \frac{1}{2}kh^2 = -\mu_k m_1 gh \Longrightarrow \mu_k = \frac{m_2g - \frac{1}{2}kh}{m_1g}$$

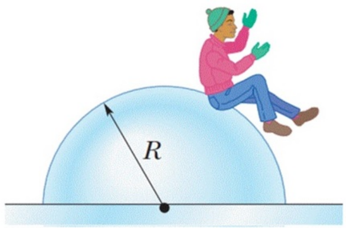
۴.۶ تمرین

۱) بلوکی کوچک از یک سطح افقی به سطح افقی بالاتری به ارتفاع h روی مسیر مشخصی مانند شکل ۷.۶ حرکت می کند. تمام طول مسیر بی اصطکاک است جز بخشی به طول d که در شکل نشان داده‌شده است. حرکت بلوک در این بخش از مسیر تحت ضریب اصطکاک جنبشی μ_k انجام می شود تا این که بلوک سرانجام در انتهای آن متوقف شود.
آ) اگر بلوک از مسیر جدا نشود، سرعت اولیه‌ی بلوک v_0 چه‌قدر باشد تا بلوک دقیقا در انتهای مسیر متوقف شود؟
ب) شرط این که جسم همواره باید روی سطح بماند را کنار می‌گذاریم. مطابق شکل زاویه ی امتداد پایانی مسیر خمیده و سطح افقی بالایی θ است. v_0 چه‌قدر باشد تا جسم بدون اتلاف انرژی مکانیکی به انتهای مسیر مشخص شده برسد.



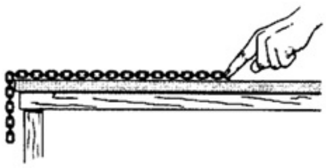
شکل ۷.۶: شکل مربوط به تمرین۱

۲) مطابق شکل ۸.۶ شخصی بر روی کره‌ی بدون اصطکاکی به شعاع R نشسته است و با سرعت اولیه‌ی v_0 از بالاترین نقطه‌ی کره به سمت پایین سُر می‌خورد. در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین این شخص تماس خود را با سطح کره از دست می‌دهد؟



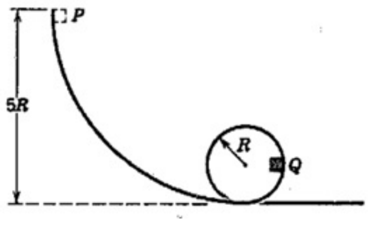
شکل ۸.۶: شکل مربوط به تمرین۲

۳) زنجیری به طول L و جرم m طوری روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد که یک چهارم آن مطابق شکل ۹.۶ از لبه‌ی میز آویزان است. چقدر کار لازم است تا بخش آویزان شده روی میز کشیده شود؟



شکل ۹.۶: شکل مربوط به تمرین۳

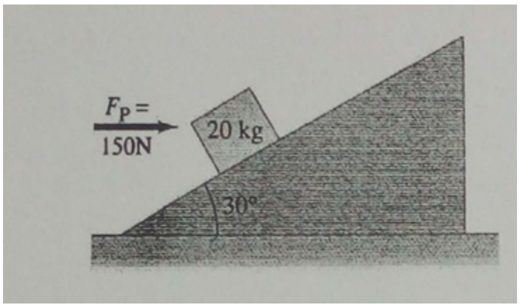
۴) جسمی به جرم m روی مسیر حلقوی بدون اصطکاک شکل ۱۰.۶ می‌لغزد.
الف) جسم از نقطه‌ی P رها می‌شود، نیروی خالص وارد بر آن در نقطه‌ی Q چقدر است؟
ب) جسم باید چه ارتفاعی نسبت به پایین حلقه رها شود تا در بالای دایره در آستانه‌ی جدا شدن از مسیر باشد.



شکل ۱۰.۶: شکل مربوط به تمرین۴

۵) نیروی $F_p = 150N$ مطابق شکل ۱۱.۶ به جعبه‌ای به جرم $20kg$ که روی سطح شیبداری با زاویه‌ی $30°$ وارد می‌شود و آن را $5m$ روی سطح جابه‌جا می‌کند.
الف) کار نیروی اصطکاک در این جابه‌جایی چقدر است؟
ب) کار نیروی F_p در این جابه‌جایی چقدر است؟
پ) کار نیروی جاذبه در این جابه‌جایی چقدر است؟

ت) کار نیروی عمودی سطح در این جابه‌جایی چقدر است؟
ث) اگر سرعت اولیه‌ی آن صفر باشد، سرعت آن در پایان این جابه‌جایی چقدر است؟
ج) چقدر گرما در این جابه‌جایی تولید می‌شود.



شکل ۱۱.۶: شکل مربوط به تمرین۵

۶) جسمی به جرم $4/26kg$ با سرعت $7/81m/s$ روی شیبی با زاویه‌ی $33°$ شروع به بالا رفتن می‌کند. با فرض این که $34/6J$ از انرژی‌اش صرف مقابله با اصطکاک شده است، تا چه مسافتی روی سطح بالا می‌رود.
۷) سنگی به جرم $524kg$ از حالت سکون روی شیب تپه‌ای شروع به لغزش می‌کند. اگر طول شیب $488m$ و ارتفاع آن $292m$ باشد، سرعت سنگ در پایین تپه $62/6m/s$ است. این سنگ چقدر از انرژی‌اش را به صورت اصطکاک از دست داده است.

فصل ۷

مرکز جرم و تکانه‌ی خطی

در فصل قبل با قوانین بقای انرژی آشنا شده و دیدیم که چگونه این قوانین بقا حل مسائل مکانیک را برای ما ساده‌تر می‌کنند. در ادامه به بیان قانون بقای مهم دیگری در فیزیک می‌پردازیم که به آن قانون بقای تکانه‌ی خطی می‌گویند. پیش از ورود به این بحث، ابتدا با مفهومی به نام مرکز جرم آشنا می‌شویم.

۱.۷ مرکز جرم

تا این‌جا همواره در مطالعه‌ی حرکت یک جسم آن را به صورت ذره‌ای در نظر گرفته‌ایم؛ مثلاً اگر جسم یک میز یا وزنه‌ی متصل به یک فنر بود، جسم را به صورت نقطه‌ای فرض کردیم که نیروهای وارد بر آن جسم، فقط به آن نقطه وارد می‌شوند. این فرض همواره برای اجسام صلب درست است. همان‌طور که قبلاً هم گفتیم، جسم صلب جسمی است که نقاط مختلف آن نسبت به هم حرکت نمی‌کنند مانند میز، صندلی، تخته‌پاک‌کن و.... طبیعی است که آب داخل لیوان یک جسم صلب نیست چون اگر لیوان را وارونه کنیم، نقاط مختلف آب در هنگام سقوط نسبت به هم حرکت می‌کنند. به جای آن‌که حرکت همه‌ی نقاط جسم را مطالعه کنیم، جسم را به صورت یک ذره در نظر گرفته و فرض می‌کنیم تمام جرم جسم در آن نقطه متمرکز شده است. این نقطه که همه‌ی جرم جسم در آن متمرکز شده است و نیروهای خارجی به آن وارد می‌شود، مرکز جرم [۱] نام دارد، که آن را x_{CM} نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال حرکت شناگری را در نظر بگیرید که از روی تخته به داخل آب شیرجه می‌زند. اگر حرکت آن را از نزدیک نگاه کنیم متوجه می‌شویم که شناگر حرکت‌های پیچیده‌ای به دست و پای خود داده و خود را در فضا می‌چرخاند. ولی اگر حرکت شناگر را از راه دور ببینیم، حرکات جزئی دست و پای او را نخواهیم دید و از دور متوجه می‌شویم که شناگر روی یک سهمی حرکت می‌کند. این سهمی همان مسیر حرکت مرکز جرم شناگر است؛ یعنی هر چند که دست و پای شناگر نسبت به هم حرکت‌های مختلفی دارند ولی یک نقطه از بدن او روی یک سهمی حرکت می‌کند که این نقطه همان مرکز جرم شناگر است، شکل ۱.۷. در ادامه به محاسبه‌ی مرکز جرم اجسام می‌پردازیم. این کار را برای اجسامی که جرم‌های مختلف به صورت گسسته از یکدیگر قرار دارند و دیگری اجسامی که جرم به صورت پیوسته در آن‌ها پخش شده است، انجام می‌دهیم.

[۱] center of mass

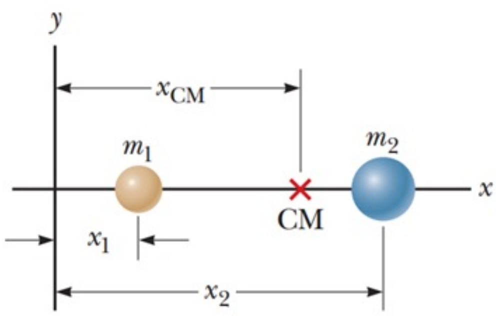
شکل ۱.۷: شیرجه‌ی شناگر در آب؛ هر چند دست و پای شناگر حرکت پیچیده‌ای دارد ولی مرکز جرم آن روی یک سهمی حرکت می‌کند.

۱.۱.۷ محاسبه‌ی مرکز جرم

در این قسمت به محاسبه‌ی مرکز جرم اجسامی می‌پردازیم که در آن‌ها جرم به صورت گسسته از یکدیگر قرار گرفته‌اند. در ساده‌ترین مثال ممکن فرض کنید دو جسم در فاصله‌ای از یکدیگر روی محور x قرار دارند. می‌خواهیم مرکز جرم این سیستم را بیابیم، شکل ۲.۷. به صورت شهودی می‌دانیم که مرکز جرم باید به جسمی که جرم بیشتری دارد، نزدیک‌تر باشد. پس به گونه‌ای میانگین‌گیری می‌کنیم ولی میانگین‌گیری باید به صورت میانگین‌گیری وزن‌دار باشد؛ یعنی اولاً مرکز جرم باید بُعد مکان داشته باشد و دوماً باید به جسمی که جرم آن بیشتر است، نزدیک‌تر باشد. از این رو برای شکل ۲.۷ رابطه مرکز جرم به صورت

$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{۱.۷}$$

است که در آن مکان x_1 جسم اول، x_2 مکان جسم دوم، و m_1 و m_2 جرم های دو جسم هستند. دقت کنید اگر $m_1 = m_2$ باشد، در این صورت مرکز جرم دقیقاً در نقطه‌ی وسط دو جسم قرار دارد.



شکل ۲.۷: مرکز جرم دو جسم با جرم‌های مختلف؛ مرکز جرم به جسمی با جرم بیشتر نزدیک‌تر است.

رابطه‌ی ۱.۷ را به سادگی می‌توان برای هر تعداد جسم در نظر گرفت. در نتیجه رابطه‌ی مرکز جرم در حالت کلی به صورت

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad (۲.۷)$$

به دست می‌آید. رابطه‌ی ۲.۷ برای اجسامی است که فقط در یک راستا قرار دارند. به سادگی می‌توان این رابطه را برای هر راستای دلخواهی به کار برد. کافی است که مرکز جرم را در هر راستایی به صورت جدا و به کمک رابطه‌ی محاسبه کنیم. مرکز جرم، نقطه‌ای در فضای سه بُعدی است. پس مختصات آن با (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}) داده می‌شود. بنابراین مرکز جرم مجموعه‌ای از اجسام در سه بُعد از روابط

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad (۳.۷)$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad (۴.۷)$$

$$z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad (۵.۷)$$

به دست می‌آید. برای محاسبه‌ی مکان مرکز جرم به این صورت عمل کنید: دستگاه مختصات دل‌خواهی را انتخاب می‌کنیم. مهم نیست این دستگاه مختصات به چه صورت انتخاب شده است. فقط همه‌ی نقاط باید نسبت به آن دستگاه تعیین مختصات شوند. معمولاً برای سادگی مبدا مختصات را مکان یکی از اجسام قرار می‌دهیم تا محاسبات‌مان ساده‌تر شود. از این رو که مکان آن نقطه صفر است. پس از انتخاب دستگاه مختصات، مختصات هر نقطه را نسبت به آن پیدا می‌کنیم. به کمک روابط ۵.۷،۴.۷،۳.۷ مختصات مرکز جرم را در هر راستا محاسبه می‌کنیم.

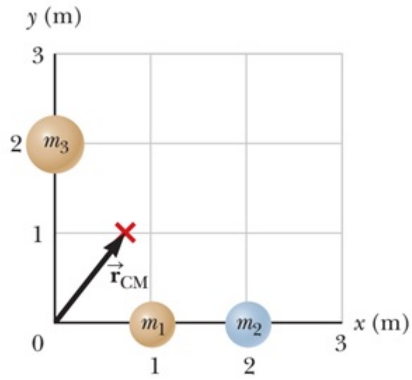
مثال۱: فرض کنید سه نفر با جرم‌های تقریباً برابر بر روی قایقی نشسته‌اند که مختصات مکانی آن‌ها نسبت به محور x به صورت $x_A = 1m, x_B = 5m, x_C = 6m$ و از سمت چپ اندازه‌گیری شده است، شکل ۳.۷ مکان مرکز جرم را بیابید. از جرم قایق صرف نظر کنید.

شکل ۳.۷: مثال ۱

برای حل این مثال از رابطه‌ی مرکز جرم کمک می‌گیریم. در نتیجه داریم

$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m(1m + 5m + 6m)}{3m} = 4m. \qquad (۶.۷)$$

مثال۲: در شکل ۴.۷ جرم اجسام به صورت $m_1 = m_2 = 1kg, m_3 = 2kg$ مکان مرکز جرم را محاسبه نمایید.



شکل ۴.۷: مثال ۲

برای محاسبه‌ی مرکز جرم در راستای x داریم:

$$x_{CM} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1m * 1kg + 2m * 1kg + 0 * 2kg}{4kg} = 0/75m. \qquad (۷.۷)$$

در راستای y داریم

$$y_{CM} = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0 * 1kg + 0 * 1kg + 2 * 2kg}{4kg} = 1m. \qquad (۸.۷)$$

در نتیجه مرکز جرم آن $x_{CM} = 0/75m, y_{CM} = 1m$ است.

اگر تعداد اجسام زیاد باشد می‌توان حد رابطه‌ی مرکز جرم را گرفت. در واقع جرم‌های بی نهایت کوچک را کنار همدیگر قرار داده و یک جمع‌بندی روی همه‌ی آن جرم‌ها انجام می‌دهیم. در نتیجه‌ی جمع به انتگرال تبدیل می‌شود. پس داریم

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m \qquad (۹.۷)$$

که در $\mathrm{d}m$ المان بی‌نهایت کوچک جرم است. مجدداً این رابطه قابل تعمیم به همه‌ی راستاها است.

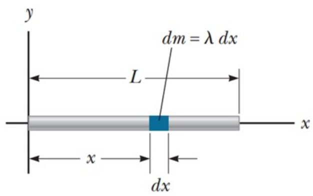
مثال۳: مرکز جرم میله‌ای به جرم M و طول L را که جرم به صورت یکسان در آن پخش شده است، محاسبه کنید.

چون جرم به صورت یکسان در آن پخش شده است، پس می‌توانیم کمیتی به نام چگالی طولیِ جرم را تعریف کنیم که در آن $\lambda = \frac{M}{L}$ است. پس جزء جرم کوچک $\mathrm{d}m$ برابر $\lambda\mathrm{d}x$ است، شکل ۵.۷ . پس بنابراین

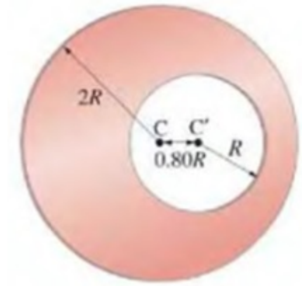
$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\lambda\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{L}{2}. \qquad (۱۰.۷)$$

مثال۴: صفحه‌ای دایره‌ای یکنواخت به شعاع $2R$ سوراخی به شعاع R دارد. مرکز این سوراخ در فاصله‌ی $0/8R$ از مرکز دایره بزرگتر قرار دارد، شکل ۶.۷ . مکان مرکز جرم صفحه را پیدا کنید.

برای به دست آوردن مرکز جرم از تقارن استفاده می‌کنیم. در مسائلی مانند هم این سوال که با تقارن‌های خاص سروکار داریم از ایده‌ی جالبی کمک می‌گیریم. دقت کنید در این وضعیت با توجه به این‌که هر دو، هم سوراخ و هم دایره‌ی بزرگتر به شکل دایره ای هستند، می‌توان از این روش استفاده کرد. در این روش سوراخ را می‌توان به عنوان بخشی با جرم منفی در نظر گرفت. یعنی فرض کنیم یک دایره کامل (صفحه دایره‌ای کامل) داریم و به جای سوراخ دایره‌ای با جرم منفی در نظر می‌گیریم. وقتی این جرم منفی به جرم اصلی اضافه شود. سوراخ به وجود خواهد آمد.



شکل ۵.۷: مثال ۳



شکل ۶.۷: مثال ۴

اصطلاحاً به این فرایند بر هم‌نهی گفته می‌شود. پس ما می‌توانیم مرکز جرم جسم بدون سوراخ را حساب کرده و سوراخ را به عنوان جسمی با جرم منفی در نظر بگیریم. پس مبدا مختصات را مرکز جرم دایره‌ی بزرگتر انتخاب کرده

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{MX_{cm} - mx_{cm}}{M - m} \\ &= \frac{\sigma 4\pi (2R)^2 0 - \sigma 4\pi (R)^2 (0/8R)}{\sigma 4\pi (2R)^2 - \sigma 4\pi (R)^2} = -\frac{0/8R}{3} = -0/27R \end{aligned} \tag{۱۱.۷}$$

۲.۱.۷ تمرین مرکز جرم

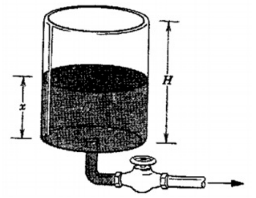
۱) بشکه‌ای استوانه‌ای شکل پر از بنزین هواپیماست،شکل ۷.۷ . این بشکه را از طریقِ شیری که در ته آن تعبیه شده است، تخلیه می‌کنیم.
الف) حرکت مرکز جرم بشکه و محتوای باقی‌مانده را در حین تخلیه‌ی بنزین، به طور کیفی بیان کنید.
ب) زمانی که مرکز جرم بشکه و باقی‌مانده‌ی محتوای آن به پایین‌ترین جایِ ممکن می‌رسد، عمق (x) بنزین باقی‌مانده در بشکه چقدر است؟ جواب را برحسب ارتفاعِ بشکه (H) ، جرم بشکه (M) و جرم بنزینی که بشکه را پر می‌کند (m) بیان کنید.

۲) مرکز جرم یک ورقه‌ی نیم‌دایره‌ای همگن به شعاعِ R را بیابید.

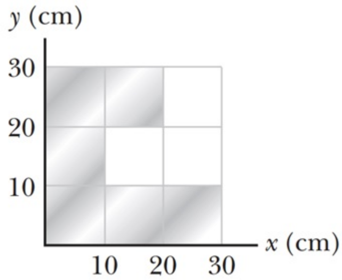
۳) چهار جسم در راستای محور y به این صورت قرار گرفته‌اند: جسم $2kg$ در $+3m$ ، جسم $3kg$ در $+2/5m$ ، جسم $2/5kg$ در مبدا مختصات، و جسم $4kg$ در $-3m$. مرکز جرم این مجموعه کجاست؟

۴) جرم زمین $5/9 * 10^{24}kg$ و جرم ماه $7/3 * 10^{22}kg$ است. فاصله‌ی آن‌ها از مرکزشان برابر $3/8 * 10^8m$ است. مرکز جرم مجموعه‌ی ماه و زمین در چه فاصله‌ای از مرکز زمین قرار دارد؟

۵) شش صفحه‌ی فلزی با شکل و جرم یکسان همانند شکل ۸.۷ در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. مرکز جرم مجموعه کجاست؟



شکل ۷.۷: شکل تمرین ۱



شکل ۸.۷: شکل تمرین ۵

۶) یک مولکول آب از یک اتم اکسیژن و دو اتم هیدروژن شکیل شده است. زاویه‌ی بین دو پیوند اتم هیدروژن $106°$ و طول پیوند اکسیژن-هیدروژن $0/100nm$ است. مرکز جرم مولکول در کجا قرار دارد؟

۲.۷ تکانه‌ی خطی

در ادامه‌ی مبحث مکانیک نیوتنی به مفهوم مهمی به نام تکانه خطی می‌پردازیم. منظور از تکانه خطی حاصل ضرب جرم یک جسم در سرعت آن است که به صورت

$$\vec{p} = m\vec{v}, \tag{۱۲.۷}$$

تعریف می‌شود. در این رابطه، $\vec{p}$ تکانه خطی، m جرم، و $\vec{v}$ سرعت ذره است. تحلیل ابعادی این کمیت به‌صورت MLT^{-1} و واحد آن در SI، $kg\, m/s$ است. آن‌چه در زندگی روزمره هم از مفهوم تکانه استفاده می‌کنیم، در توافق با تعریف فوق است. برای دو خودرو که جرم یکسانی دارند، خودرویی که سرعت بیشتری دارد، تکانه آن بیشتر است. کامیونی با سرعت پایین از خودروِی سواری با سرعت بیشتر، تکانه بیشتری خواهد داشت.

برای تغییر تکانه یک جسم، باید به آن جسم نیرو وارد شود؛ در واقع اعمال نیرو سبب تغییر تکانه جسم می‌شود. نیوتن قانون‌دوم خود را بر حسب تکانه هم بیان کرد. بیان قانون دوم نیوتن به شکل پیشرفته خود و به زبان تکانه به صورت زیر ارائه می شود:

تغییرات تکانه در واحد زمان، برابر با نیروِی خالص وارد بر جسم است. بنابراین

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{۱۳.۷}$$

که $\sum \vec{F}$ نیروی خالص وارد بر جسم است. اگر جرم جسم ثابت باشد به سادگی می‌توان به شکل معروف قانون دوم نیوتن رسید:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{md\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \tag{۱۴.۷}$$

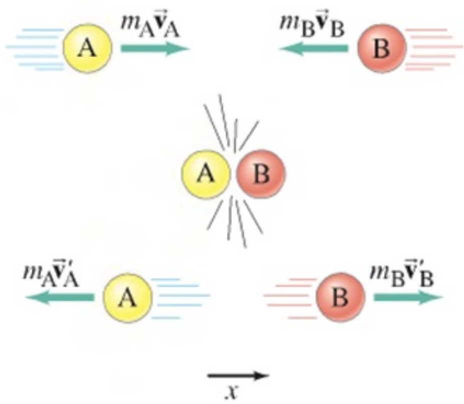
دقت کنید رابطه‌ی جدید ارائه شده برای قانون دوم نیوتن کلی‌تر از آن چیزی است که قبلاً دیده‌اید؛ چرا که برای دستگاه‌هایی که در آن‌ها جرم تغییر می‌کند، هم این رابطه برقرار است.
مثال: فوتبالیستی به جرم $60kg$ توپی به جرم $0/5kg$ را روی نقطه‌ی پنالتی قرار می‌دهد. توپ ساکن است و قرار است بازیکن فوتبال به آن ضربه وارد کند. اگر بخواهیم توپ پس از ضربه‌ی فوتبالیست با سرعت $60m/s$ به حرکت درآید و مدت زمان تماس بازیکن با توپ فوتبال $0/4s$ باشد، آیا بازیکن می‌تواند این نیرو را به توپ وارد کند یا خیر؟
ابتدا نیروی وارد بر توپ را حساب می‌کنیم

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{mp_2 - mp_1}{\Delta t} = \frac{(0/5kg)(60m/s)}{(0/4s)} = 75kgm/s^2 = 75N. \tag{۱۵.۷}$$

فردی که وزن آن در حدود $600N((60kg)(10m/s^2))$ است می‌تواند این نیرو را وارد کند.

۱.۲.۷ بقای تکانه

مفهوم تکانه به صورت منحصربه‌فرد مفهوم مهمی است، چرا که اگر برآیند نیروهای خارجی وارد برای یک جسم صفر باشد، در این صورت با توجه به رابطه‌ی ۱۳.۷ تکانه خطی برابر با صفر است؛ یعنی که تکانه خطی یک کمیت بقادار است. به عنوان مثال دو توپ بیلیارد را در نظر بگیرید که روی میز بیلیارد با یکدیگر برخورد سربه‌سر انجام می‌دهند. اگر سیستم کل برابر دو گلوله توپ باشد، می‌توان تکانه دو توپ را قبل و بعد از برخورد نوشت. در این صورت کمیت $m_A\vec{v}_A$ تکانه توپ A و $m_B\vec{v}_B$ تکانه توپ B باشد، می‌توان این دو کمیت را قبل و بعد از برخورد محاسبه کرد، شکل ۹.۷. چون برآیند نیروهای وارد بر کل سیستم صفر است بنابراین تغییرات تکانه خطی قبل و



شکل ۹.۷: چون برآیند نیروهای خارجی صفر است، تکانه خطی کمیتی بقادار است.

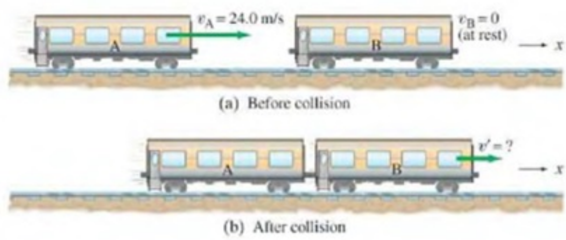
بعد از برخورد برابر است. بنابراین می‌توان قانون بقای تکانه خطی را نوشت؛

$$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{v'}_A + m_B\vec{v'}_B, \qquad \sum \vec{F} = 0, \tag{۱۶.۷}$$

که $\vec{v'}_A$ و $\vec{v'}_B$ به ترتیب سرعت دو توپ بعد از برخورد است. رابطه‌ی ۱۶.۷ را می‌توان به سیستمی با هر تعداد جسم تعمیم داد. در این صورت قانون بقای تکانه خطی به صورت

$$\sum_i \frac{dp_i}{dt}. \tag{۱۷.۷}$$

است. اگر نیروی خالص بر سیستمی از ذرات برابر با صفر باشد، تکانه خطی کل سیستم ثابت باقی می‌ماند. این قانون را قانون بقای تکانه خطی می‌گویند؛ در واقع تکانه خطی کل یک سیستم منزوی همواره ثابت است. هر چند که قانون بقای تکانه خطی را می‌توان از قانون دوم نیوتن به دست آورد ولی قانون بقای تکانه خطی کلی‌تر از قانون دوم نیوتن است؛ چرا که در دنیای کوچک که قوانین نیوتن کار نمی‌کنند، قوانین بقا مانند بقای تکانه خطی و بقای انرژی هم‌چنان پرکاربرد است و می‌توان در برخورد ذرات زیر اتمی از آن‌ها استفاده کرد. به همین خاطر است که قوانین بقا همواره در فیزیک برای ما از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.
مثال: واگنی به جرم ده تُن را در نظر بگیرید که با سرعت $24m/s$ حرکت می‌کند. اگر این واگن به واگن ساکن دیگری به همین جرم برخورد کند و پس از برخورد دو واگن به هم بچسبند، سرعت مشترک دو واگن پس از برخورد چقدر است، شکل ۱۰.۷.



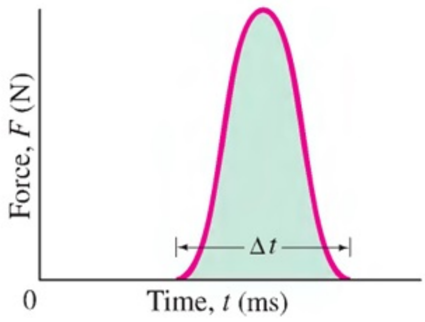
شکل ۱۰.۷: تصویر مربوط به مثال؛ دو واگن پس از برخورد با سرعت مشترک با هم حرکت می‌کنند.

چون نیروی خالص وارد بر سیستم کل که شامل دو واگن است، صفر است از قانون بقای تکانه‌ی خطی کمک می‌گیریم. واگن اول سرعت دارد ولی واگن دوم ساکن است پس تکانه‌ی آن صفر است. پس از برخورد دو واگن به هم چسبیده و با سرعت یکسان حرکت می‌کنند. بنابراین

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \sum \vec{F} = 0$$
$$\Rightarrow d\vec{p} = 0$$
$$p_{\text{ابتدایی}} = p_{\text{نهایی}}$$
$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$
$$(10000kg)(24m/s) + 0 = (10000kg + 10000kg)v' \Rightarrow v' = 12m/s. \tag{۱۸.۷}$$

۲.۲.۷ برخورد و ضربه

قانون بقای تکانه خطی ابزار سودمندی است که روزانه با آن سروکار داریم. از ضربه‌ای که بازیکن تنیس به راکت وارد می‌کند، ضربه‌ای که بازیکن بیسبال با آن توپ بیسبال را به حرکت در می‌آورد، حرکت دو توپ بیلیارد روی میز، و ضربه‌ی چکش به میخ همگی از مثال‌های ضربه در مثال‌های روزمره هستند. در ابعاد اتمی هم قانون بقای تکانه خطی کمک شایانی به ما برای فهم خواص ذرات زیراتمی می‌کند.
در طول برخورد دو جسم با یکدیگر دو جسم دچار تغییر شکل نیز می‌شوند که اغلب به خاطر نیروی بزرگی که در هنگام برخورد به یکدیگر وارد می‌کنند. این نیرو معمولاً در مدت زمان بسیار کوتاهی وارد می‌شود. زمانی که یک بازیکن فوتبال توپ را شوت می‌کند، نیروی بزرگی را در زمان بسیار کوتاهی به توپ وارد می‌کند. در نتیجه می‌توانیم نیرو را بر حسب تابعی از زمان رسم کنیم که در آن نیرو مقدار بزرگی دارد ولی بازه‌ی زمانی بسیار کوچک



شکل ۱۱.۷: انتگرال نیرو بر حسب تغییرات زمان؛ سطح زیر این نمدار ضربه است.

است، مانند شکل ۱۱.۷ . از قانون دوم نیوتن دانستیم که نیروی خالص به اجسام از رابطه ۱۳.۷ تبعیت می کند. در بازه زمانی بسیار کوچک تغییرات تکانه خطی برابر

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \tag{۱۹.۷}$$

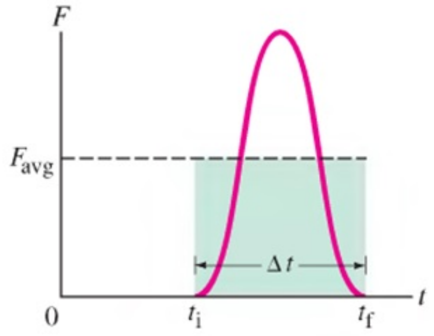
است. اگر از طرفین رابطه انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \tag{۲۰.۷}$$

در این رابطه سمت راست تغییرات تکانه و سمت چپ انتگرال نیرو بر حسب تغییرات زمان است. به این کمیت؛ یعنی انتگرال نیرو در واحد زمان، را ضربه می‌نامیم. بنابراین تعریف ضربه برابر است با

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt. \tag{۲۱.۷}$$

به سطح زیر نمودار شکل ۱۱.۷ ضربه گفته می‌شود. دقت کنید چون سطح زیر نمودار برابر با ضربه است می‌توان نیروی کمتری را در بازه زمانی بیشتری وارد کرد که همان سطح زیر نمودار را داشته باشد، مانند شکل ۱۲.۷ .



شکل ۱۲.۷: میانگین نیرو در بازه‌ی زمانی مشخص معادل ضربه برای نیروی واقعی است.

مثال: ضربه‌ی دست یک کاراته‌کار را حساب کنید. فرض کنید سرعت دست او $10m/s$ است. اگر این ضربه در مدت زمان $2ms$ وارد شود، چه نیرویی به جسم وارد می‌کند؟

برای حل این سوال از تغییرات تکانه‌ی خطی استفاده می‌کنیم. جرم دست انسان در حدود $1kg$ در نظر می‌گیریم.

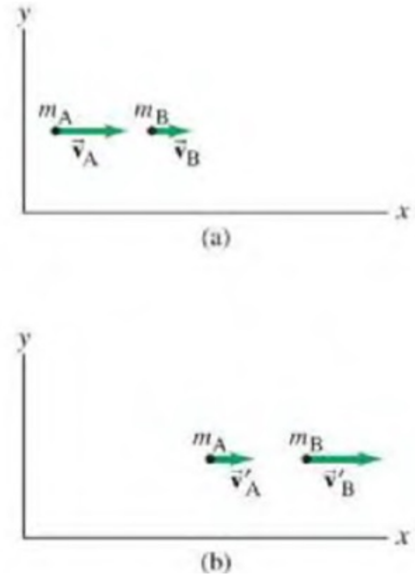
$$J = \Delta p = p_2 - p_1 = (1kg)(10m/s) = 10kgm/s. \tag{۲۲.۷}$$

برای محاسبه نیرو داریم

$$J = F\Delta t \Rightarrow F = \frac{J}{\Delta t} = \frac{10kgm/s}{2\times 10^{-3}s} = 5000N. \quad (۲۳.۷)$$

۳.۷ بقای انرژی و تکانه‌ی خطی

در طول فرآیند برخورد مقدار نیرو در بازه‌ی زمانی کوچکی تغییر می‌کند. در نتیجه استفاده از قانون دوم نیوتن کار را سخت و غیر ممکن می‌سازد. اما به کمک قوانین بقا مانند قانون بقای تکانه خطی و قانون بقای انرژی حل مسائل تا حد بسیار زیادی ساده می‌شود. یعنی در طول فرآیند برخورد اگر نیروی خالص صفر باشد، تکانه خطی بقادار است. گاهاً انرژی جنبشی هم در طول برخورد بقادار است. این نوع برخوردها که در آن انرژی جنبشی بقادار است، را برخورد کشسان یا الاستیک می‌نامند. در طول این برخورد انرژی جنبشی بقادار است و هیچ انرژی جنبشی تلف نمی‌شود. دقت کنید اگر در یک فرآیند برخورد انرژی تلف شود و در اصطلاح گرما تولید شود، دیگر برخورد از نوع برخورد الاستیک نیست و انرژی جنبشی در آن بقادار نخواهد بود.
فرض کنید دو جسم به جرم‌های m_A و m_B با هم برخورد می‌کنند. اگر سرعت آن‌ها قبل از برخورد v_A و v_B و سرعت آن‌ها بعد از برخورد v'_A و v'_B باشد، حالت‌های مختلف زیر به وجود می‌آید:



شکل ۱۳.۷: دو جسم به جرم‌های m_A و m_B با هم برخورد می‌کنند. قبل و بعد از برخورد در تصویر آمده است.

- برخورد غیر الاستیک است. فرض کنید جسم B ساکن و $v_B = 0$ است. پس از برخورد دو جسم به هم می‌چسبند.

$$p_i = p_f \quad (۲۴.۷)$$

$$m_Av_A + m_Bv_B = m_Av'_A + m_Bv'_B \quad (۲۵.۷)$$

$$m_Av_A + 0 = m_Av' + m_Bv' \Rightarrow v' = \frac{m_Av_A}{m_A+m_B}. \quad (۲۶.۷)$$

• فرض کنید جسم B ساکن و $v_B = 0$ است و برخورد الاستیک است. در این صورت

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow m_A v_A + 0 = m_A v'_A + m_B v'_B \tag{۲۷.۷}$$

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A v_A'^2 + \frac{1}{2}m_B v_B'^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_A v_A^2 + 0 = \frac{1}{2}m_A v_A'^2 + \frac{1}{2}m_B v_B'^2 \tag{۲۸.۷}$$

با جای‌گذاری این روابط خواهیم داشت

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A \tag{۲۹.۷}$$

$$v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A. \tag{۳۰.۷}$$

بر اساس این روابط موارد زیر می‌تواند رخ دهد:
۱) اگر دو جسم جرم برابر داشته باشند، آن‌گاه $m_A = m_B$ در این صورت

$$v'_A = 0 \tag{۳۱.۷}$$

$$v'_B = v_A. \tag{۳۲.۷}$$

۲) اگر هدف سنگین باشد، آن‌گاه $m_B \gg m_A$ در این صورت

$$v'_A \approx -v_A \tag{۳۳.۷}$$

$$v'_B \approx (\frac{2m_A}{m_B}) v_A. \tag{۳۴.۷}$$

۳) اگر پرتابه سنگین باشد، آن‌گاه $m_A \gg m_B$ در این صورت

$$v'_A \approx v_A \tag{۳۵.۷}$$

$$v'_B \approx 2v_A. \tag{۳۶.۷}$$

• اگر هر دو جسم قبل از برخورد سرعت داشته و برخورد از نوع کشسان باشد، در این صورت

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B) \tag{۳۷.۷}$$

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A v_A'^2 + \frac{1}{2}m_B v_B'^2 \Rightarrow m_A(v_A^2 - v_A'^2) = m_B(v_B'^2 - v_B^2) \tag{۳۸.۷}$$

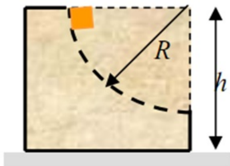
با جای‌گذاری این روابط خواهیم داشت

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A + \frac{2m_B}{m_A + m_B} v_B \tag{۳۹.۷}$$

$$v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A + \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_B. \tag{۴۰.۷}$$

۱.۳.۷ تمرین

۱) در مثال‌های بالا، رهیافت کلی حل ارائه شده است و جواب پایانی هم وجود دارد ولی مراحل اثبات کامل نیست. برای همه‌ی موارد فوق روند اثبات را به صورت کامل بنویسید.
۲) از گوشه‌ی مکعبی به جرمِ M و به ضلعِ h ربعِ دایره‌ای به شعاعِ R بریده شده است. قطعه‌ای به جرمِ m از بالایِ بریدگی روی مسیر دایره‌ای می‌لغزد. مکعب رویِ میزِ هموار قرار دارد و هردویِ قطعه و مکعب بدون اصطکاک حرکت می‌کنند. مکعب در آغاز بی‌حرکت و قطعه از حالت سکون شروع به لغزیدن می‌کند. وقتی قطعه از مکعب جدا می‌شود، سرعتش را حساب کنید، شکل ۱۴.۷.

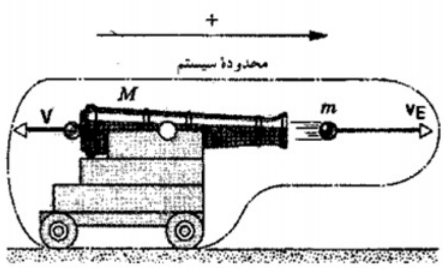


شکل ۱۴.۷: شکل مربوط به تمرین ۲

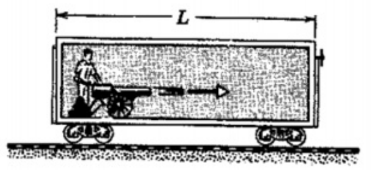
۳) رگباری از گلوله‌ها به جرم $3/8g$ به طور افقی با سرعت $1100m/s$ به به قطعه چوبی به جرم $12kg$ که در ابتدا روی میز افقی ساکن است، شلیک می‌شود، شکل ۱۵.۷. اگر قطعه چوب بتواند روی سطح بلغزد، سرعت آن پس از برخورد هشت گلوله چقدر است.

شکل ۱۵.۷: شکل مربوط به تمرین ۳

۴) شکل ۱۶.۷ توپی به جرم $1300kg$ را نشان می‌دهد که گلوله‌ای به جرم $72kg$ را در راستای افق با سرعت دهانه‌ای v برابر $55m/s$ شلیک می‌کند.توپ چنان مستقر شده است که می‌تواند آزادانه حرکت کند.
الف) سرعت پس‌زنی توپ نسبت به زمین چقدر است؟
ب) سرعت اولیه‌ی گلوله‌ی توپ نسبت به زمین چقدر است؟
۵) یک توپ و انبوهی گلوله در یک واگن قطار در بسته به طول L مطابق شکل ۱۷.۷ قرار دارد. توپ به سمت راست شلیک می‌کند و واگن به سمت چپ پس می‌زند. گلوله‌ها پس از برخورد به دیواره واگن در داخل واگن باقی می‌مانند. الف) پس از شلیک همه‌ی گلوله‌ها، بیشترین فاصله واگن از مکان اولیه‌اش چقدر است؟
ب) سرعت واگن پس از شلیک همه‌ی گلوله‌ها چقدر است؟



شکل ۱۶.۷: شکل مربوط به تمرین ۴



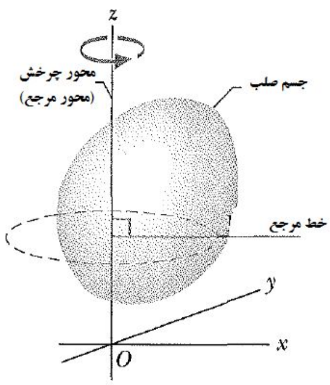
شکل ۲۸. مسئلهٔ ۹

شکل ۱۷.۷: شکل مربوط به تمرین ۵

فصل ۸

حرکت چرخشی محض

هرچه تاکنون در فصل‌های قبل مطالعه کردیم اعم از سرعت، شتاب، جابه‌جایی، نیرو و انرژی جنبشی مربوط به حرکت انتقالی محض بود، یعنی جسم نقطه‌ای یا صلب (که در نقطه مرکز جرم را در نظر می‌گرفتید.) از یک نقطه از فضا به نقطه‌ای دیگر بدون هیچ گونه چرخشی منتقل می‌شدند. حال می‌خواهیم ببینین اگر جسم صلبی را حول یک محور فقط بچرخانیم به طوری که محور چرخش ثابت باشد (یعنی در آن هیچ گونه حرکت انتقالی وجود نداشته باشد) چه نوع کمیت‌های قابل تعریف هستند. به بیانی دیگر در حرکت چرخشی محض کمیت متناظر با جابجایی x ، سرعت v و دیگر متغییرها چیست؟



شکل ۱.۸: چرخش جسم صلب حول محوری ثابت.

ابتدا اجازه دهید مانند شکل ۱.۸ جسم صلبی که حول محوری ثابت (محور مرجع) می‌چرخد، را در نظر بگیریم. در حرکت چرخشی محض تغییرات زاویه چرخش یعنی θ معرف جابجایی در حرکت چرخشی است که با واحد رادیان داده می‌شود. [1] به عبارتی دیگر جسمی که حول یک محور می‌چرخد، با تغییر مکان زاویه‌ای خود از θ_1 به θ_2 به میزان $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ جابه‌جایی زاویه‌ای دارد به طور که این جابه‌جایی برای چرخش ساعتگرد منفی و

[1] ارتباط درجه با رادیان با رابطه زیر داده می‌شود.
$$1\pi rad = 180^0 \Rightarrow 360^0 = 2\pi rad \quad (۱.۸)$$

برای چرخش ساعتگرد مثبت است. همچنین اگر جسمی در بازه زمانی Δt جابه‌جایی زاویه‌ای به میزان $\Delta\theta$ در این صورت سرعت زاویه‌ای متوسط و سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای با روابط زیر داده می‌شوند.

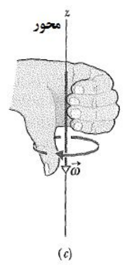
$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \tag{۲.۸}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{۳.۸}$$

از طرفی دیگر می‌توان شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای جسم را با

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{۴.۸}$$

تعریف کرد که با مقدار شتاب زاویه‌ای متوسط $\bar{\alpha}$ برابر است. ممکن است این سوال مطرح شود که آیا کمیت‌های زاویه‌ای برداری هستند. در مورد جابه‌جایی زاویه قدری بایستی محتاط بود معنی جهت در این کمیت در جهت ساعتگرد یا پادساعتگرد تعریف می‌شود به طوری که در جهت ساعتگر مقدار آن منفی ولی در جهت پادساعت‌گرد مثبت است. اما در مورد بردار سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ با قرار دادن انگشتان دست راست در جهت چرخش همانند آنچه در شکل ۲.۸ نشان داده شده، انگشت شست کشیده‌ی ما جهت آن را نشان می‌دهد. به علت اینکه باگرفتن مشتق زمانی (کمیتی اسکالر) از بردار سرعت زاویه‌ای به شتاب زاویه‌ای می‌رسیم، در این صورت جهت بردار شتاب زاویه‌ای در جهت بردار سرعت زاویه‌ای است. لازم به ذکر است در واحد SI واحد سرعت زاویه‌ای rad/s و واحد شتاب زاویه‌ای rad/s^2 است.



شکل ۲.۸: مشخص کردن جهت بردار سرعت زوایه‌ای با استفاده از قاعده دست راست.

۱.۸ حرکت چرخشی با شتاب زاویه‌ای ثابت

در مورد حرکت چرخشی با شتاب زاویه‌ای ثابت نیازمند روابطی مشابه با معادلات شتاب ثابت در حرکت انتقالی هستیم. به طور کلی با جایگزین کردن

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \theta \\ v &\rightarrow \omega \\ a &\rightarrow \alpha \end{aligned} \tag{۵.۸}$$

در روابط شتاب ثابت (شتاب خطی) به روابط زیر خواهیم رسید.

$$\begin{aligned} \omega &= \alpha t + \omega_0 \\ \omega^2 - \omega_0^2 &= 2\alpha(\theta - \theta_0) \\ \theta - \theta_0 &= \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \theta - \theta_0 &= \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t \end{aligned} \tag{۶.۸}$$

مثال۱: پنکه‌ای با سرعت زاویه‌ای اولیه‌ی $48/6rpm$ (rpm=revolution per minute) (دور در دقیقه) می‌چرخد. این پنکه به آرامی کُند شده و پس از $32s$ به حالت سکون می‌رسد و در این مدت در کل $8/8$ دور می‌چرخد. الف) سرعت زاویه‌ای میانگین و ب) شتاب زاویه میانگین پنکه را حساب کنید.
حل: چون در بازه‌ی زمانی $\Delta t = 32s$ به مقدار $\Delta\theta = 8/8rev$ چرخیده پس

$$\omega_{ave} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{8/8}{32} = 0/28rev/s. \tag{۷.۸}$$

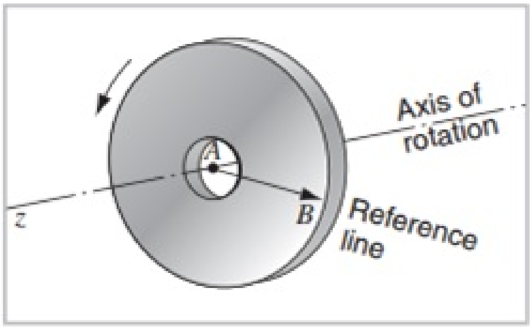
با توجه به این که سرعت زاویه‌ای اولیه‌ی $48/6rpm$ بوده پس

$$48/6\frac{rev}{min} \times \frac{1min}{60s} = 0/81rev/s. \tag{۸.۸}$$

سرعت زاویه‌ای نهایی صفر است. پس

$$\alpha_{ave} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0 - 0/81rev/s}{32s} = -0/025rev/s^2. \tag{۹.۸}$$

مثال۲: یک سنگ آسیاب با شتاب زاویه‌ای ثابت $32rad/s^2$ از حالت سکون در زمان $t = 0$ شروع به حرکت می‌کند. در زمان $t = 0$ خط مرجع AB در شکل ۳.۸ افقی است الف) جابه‌جایی زاویه خط را حساب کنید. ب) سرعت زاویه‌ای سنگ آسیاب $2/7s$ بعد چقدر است؟



شکل ۳.۸: شکل مربوط به مثال۲

حل: چون حرکت با شتاب زاویه‌ای ثابت است پس

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ &= 0 + (0)(2/7s) + \frac{1}{2}(3/2rad/s^2)(2/7s)^2 \\ &= 11/7rad = 1/9rev. \end{aligned} \tag{۱۰.۸}$$

برای محاسبه‌ی سرعت داریم

$$\begin{aligned}\omega &= \alpha t + \omega_0 \\ &= 3/2 rad/s^2)(2/7s) + 0 = 88/8 rad/s = 1/4 rev/s.\end{aligned} \quad (۱۱.۸)$$

مثال۳: در مثال قبل فرض کنید که توان خروجی متصل به سنگ آسیاب صفر شده و سنگ آسیاب با سرعت زاویه‌ای $8/6rad/s$ حرکت می‌کند. بخاطر یک نیروی اصطکاکی کوچک که به شَفَت سنگ آسیاب وارد می‌شود. بنابراین سنگ آسیاب با شتاب زاویه‌ای ثابتِ کُند شونده متوقف خواهد شد. اگر این بازه زمانی $\Delta t = 192s$ طول بکشد، الف) شتاب زاویه‌ای ثابت چقدر است؟ ب) در این مدت زمان سنگ آسیاب چند دور خواهد چرخید؟
حل: شتاب زاویه‌ای به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} \\ &= \frac{0 - (8/6 rad/s)}{(192s)} = -0/045 rad/s^2.\end{aligned} \quad (۱۲.۸)$$

برای به دست آوردن جابه‌جایی زاویه‌ای

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \theta &= 0 + (8/6 rad/s)(192s) + \frac{1}{2}(-0/045 rad/s^2)(192s)^2 \\ &= 822 rad = 131 rev.\end{aligned} \quad (۱۳.۸)$$

۲.۸ رابطه‌ی میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای

اگر خط مرجعی روی یک جسم صلب را تحت زاویه‌ی θ بچرخانیم در این صورت هر نقطه‌ی P از این جسم که روی این محور و به فاصله‌ی r از محور چرخش قرار دارد یک مسیر دایره‌ای و کمانی به مسافت

$$s = r\theta \quad (۱۴.۸)$$

را طی می‌کند (شکل ۴.۸ را ببینید.) . حال با گرفتن مشتق زمانی از رابطه بالا در حالی که r را ثابت در نظر بگیریم، تندی خطی با رابطه زیر به سرعت زاویه‌ای مربوط می‌شود.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dr} \Rightarrow v = \omega r \quad (۱۵.۸)$$

همچنین دوره تناوب این حرکت دایره‌ای

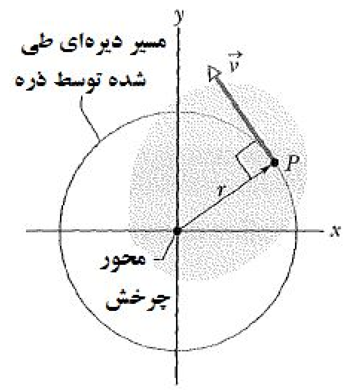
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (۱۶.۸)$$

است. بار دیگر با گرفتن مشتق زمانی می‌توان رابطه میان شتاب خطی (که از تغییر سرعت خطی ناشی می‌شود) و شتاب زاویه‌ای را به صورت زیر یافت.

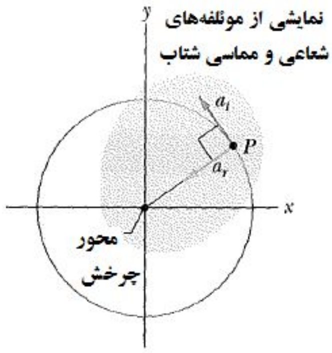
$$a_t = \alpha r \quad (۱۷.۸)$$

در رابطه بالا a_t موئلفه‌ی مماسی بردار سرعت خطی در حرکت دایره‌ای است (شکل ۵.۸ را مشاهده نمایید.). علاوه بر این مولفه‌ی شعاعی بردار شتاب در حرکت دایره‌ای

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (۱۸.۸)$$



شکل ۴.۸: در حرکت چرخشی حول یک محور، مسیر حرکت هر نقطه از جسم صلب مسیر دایره‌ای است.



شکل ۵.۸: نمایشی از موئلفه‌های شعاعی و مماسی شتاب.

است. بنابراین بزرگی بردار شتاب با رابطه زیر داده می‌شود.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} \qquad (۱۹.۸)$$

مثال۴: اگر شعاع سنگ آسیاب در مثال۲ $r = 0/24m$ باشد، الف) سرعت خطی نقطه‌ای بر روی لبه آن را حساب کنید. ب) شتاب خطی مماسی آن روی لبه را حساب کنید. پ) شتاب شعاعی روی لبه‌ی سنگ پس از $2/7s$ را حساب کنید. ت) همه‌ی محاسبات بالا را برای نقطه‌ای در وسط شعاع برابر با $r = 0/12m$ حساب کنید.
حل: با توجه به این که $\alpha = 3/2rad/s^2, \quad \omega = 8/6rad/s, \quad t = 2/7s$ است. پس

$$\begin{aligned} v_t &= \omega r = (8/6rad/s)(0/24m) = 2/1m/s \\ a_t &= \alpha r = (3/2rad/s^2)(0/24m) = 0/77m/s^2 \\ a_r &= \omega^2 r = (8/6rad/s)^2(0/24m) = 18m/s^2. \end{aligned} \qquad (۲۰.۸)$$

با تکرار روابط فوق به سادگی می‌توان به دست آورد که برای نصف شعاع داریم

$$\begin{aligned} v_t &= 1m/s \\ a_t &= 0/38m/s^2 \\ a_r &= 8/9m/s^2. \end{aligned} \qquad (۲۱.۸)$$

۳.۸ انرژی جنبشی چرخشی و لختی چرخشی

ابتدا سیستمی از توزیعی گسسته از جسم‌های نقطه‌ای به جرم‌های m_i را در نظر بگیرید که همگی حول محور ثابتی که از آن در فاصله‌های r_i که $i = 1, 2, ..., n$ است، در حال چرخش هستند. به علت اینکه مسیر هر یک از این اجسام دایره‌ای به شعاع r_i است که جسم با سرعت خطی v_i در این مسیر حرکت می‌کند، بنابراین انرژی جنبشی این سیستم برابر با

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + ... + \frac{1}{2}m_nv_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2 \qquad (۲۲.۸)$$

حال به این دلیل که همگی حول یک محور در حال چرخش هستند سرعت زاویه‌ای تمامی برابر با ω و سرعت خطی آنها $v_i = r_i\omega$ است. در این صورت رابطه انرژی جنبشی را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$K = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(m_ir_i^2)\omega^2 = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2\Big)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (۲۳.۸)$$

که $I = \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2$ لختی چرخشی نامیده می‌شود. با نامتناهی کردن (توزیعی پیوسته) این اجسام نقطه‌ای که خود تشکیل یک جسم صلب می‌دهند، لختی دورانی با رابطه انتگرال گیری زیر داده می‌شود.

$$I = \int r^2dm \qquad (۲۴.۸)$$

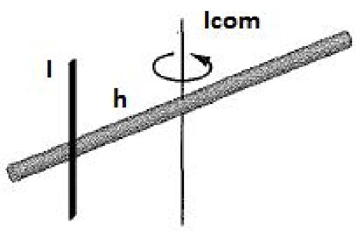
که در این رابطه dm المان جرمی بسیار کوچکی که به فاصله r از محور چرخش جسم صلب قرار گرفته است، در نظر می‌گیریم. در مورد محاسبه این کمیت از چند قضیه ساده اعم از قضیه محورهای موازی و قضیه‌ی محورهای عمود می‌توان بهره برد.

مجید: یک مثال حل کن

- قضیه محورهای موازی: لختی دوران I حول هر محوری که موازی با محور عبوری از مرکز جرم باشد با رابطه زیر داده می‌شود (شکل ۶.۸).

$$I = I_{com} + Mh^2 \qquad (۲۵.۸)$$

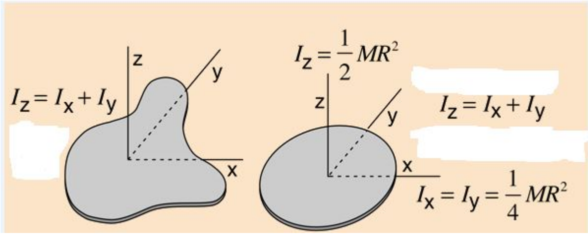
که I_{com} لختی دورانی حول محور عبوری از مرکز جرم و h فاصله دو محور و M جرم کل جسم است.



شکل ۶.۸: قضیه محورهای موازی.

- قضیه محورهای عمود: اگر سه محور Oz، Oy و Ox که بر هم عمود هستند را درنظر بگیریم در این صورت لختی دوارانی حول یکی از آنها با رابطه زیر به لختی دروانی دیگر محورها مربوط می‌شود (شکل ۷.۸).

$$I_{Oz} = I_{Ox} + I_{Oy} \qquad (۲۶.۸)$$



شکل ۷.۸: قضیه محورهای عمود.

به نظر می‌رسید با لحاظ کردن تناظر یک به یک

$$\begin{aligned} v &\to \omega \\ m &\to I \end{aligned} \tag{۲۷.۸}$$

می‌توان از انرژی جنبشی انتقالی $K = \frac{1}{2}mv^2$ به انرژی جنبشی چرخشی $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ رسید.
مثال۵: در شکل ۸.۸ جسمی را می‌بینید که از دو جسم m_1 و m_2 تشکیل شده است که با میله‌ی صلبی به طول L بهم وصل شده‌اند. از جرم میله صرف نظر کنید. الف) لختی دورانی سیستم را حول محوری که عمود بر میله است و در فاصله‌ی x از جرم m_1 قرار دارد، حساب کنید. ب) نشان دهید لختی دورانی کمینه در $x = x_{cm}$ اتفاق می‌افتد.
حل: برای محاسبه‌ی لختی دورانی داریم

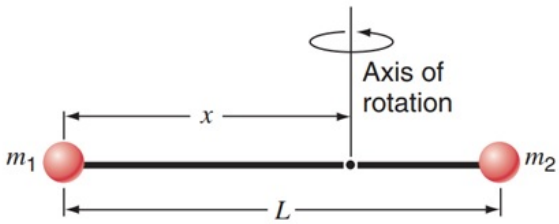
$$I = m_1x^2 + m_2(L-x)^2 \tag{۲۸.۸}$$

برای محاسبه‌ی کمینه‌ی لختی داریم

$$\frac{dI}{dx} = 2m_1x + 2m_2(L-x)(-1) = 0 \tag{۲۹.۸}$$

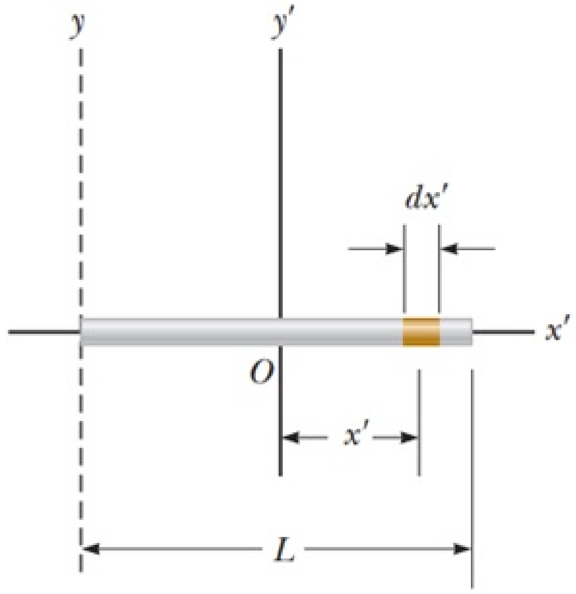
بنابراین نقطه‌ی کمینه همان مرکز جرم است

$$x = \frac{m_2L}{m_1+m_2} = x_{cm}. \tag{۳۰.۸}$$



شکل ۸.۸: شکل مربوط به مثال ۵

مثال۶: لختی دورانی میله‌ای یکنواخت به طول L و جرم M حول محوری که از مرکز میله می‌گذرد. ب) حول محور عمودی که در یک انتهای میله قرار دارد، حساب کنید، شکل ۹.۸.



شکل ۹.۸: شکل مربوط به مثال ۶

چون جرم به صورت یکنواخت پخش شده است، چگالی طولی جرم ثابت است در نتیجه

$$\lambda = \frac{M}{L}, \quad dm = \lambda dx,$$
$$\Rightarrow I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx$$
$$= \frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{ML^2}{12} \tag{۳۱.۸}$$

ب) برای به دست آوردن لختی دورانی حول محوری در یک انتهای میله قرار دارد از قضیه‌ی محورهای موازی استفاده می‌کنیم:

$$I = I_{cm} + Mh^2$$
$$= \frac{ML^2}{12} + M(\frac{L}{2})^2$$
$$= \frac{ML^2}{3}. \tag{۳۲.۸}$$

۴.۸ گشتاور نیرو

گشتاور نیرو همان عمل چرخانیدن یک جسم حول یک محور توسط نیروی $\vec{F}$ است. همان‌طور که در شکل ۱۰.۸ نشان داده شده است نیروی $\vec{F}$ بر نقطه‌ای که مکان آن $\vec{r}$ تا محور چرخش است باعث چرخش جسم می‌شود. در

این صورت بردار گشتاور نیرو

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (۳۳.۸)$$

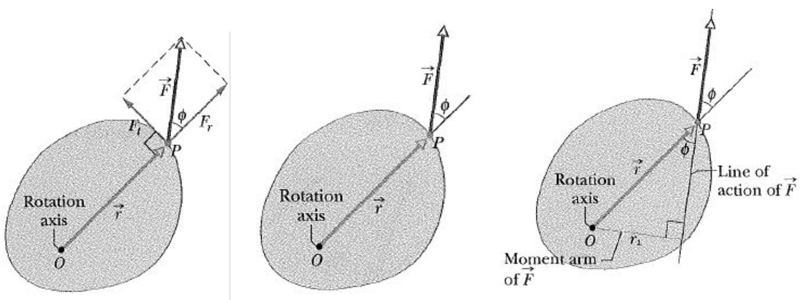
است که جهت این بردار با استفاده از قاعده دست راست مشخص می‌شود به طوری که چهار انگشت دست راست در جهت بردار $\vec{r}$ و کف دست راست در جهت بردار نیرو $\vec{F}$ قرار گیرد در این صورت انگشت شست جهت بردار گشتاور نیرو را نشان می‌دهد. همچنین بزرگی گشتاور با رابطه زیر داده می‌شود.

$$|\tau| = \tau = rF\sin\phi \quad (۳۴.۸)$$

که ϕ زاویه میان امتداد بردار $\vec{r}$ و بردار نیرو $\vec{F}$ است. علاوه براین با تعریف بردار مکان عمود $r_\perp = r\sin\phi$ و نیز نیرو مماسی $F_t = F\sin\phi$ می‌توان رابطه بزرگی گشتاور را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\tau = r_\perp F = rF_t \quad (۳۵.۸)$$

واحد گشتاور در SI نیوتن متر ($N.m$ است. لازم به ذکر است کار نیز واحدی مشابه دارد ولی واحد اصلی کار ژول است. حال با داشتن گشتاور نیرو می‌توان قانون مشابه با قانون دوم نیوتن برای گشتاورها نوشت که به صورت



شکل ۱۰.۸: تعاریف متفاوت از گشتاور نیرو.

زیر تعریف می‌شود.

$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \quad (۳۶.۸)$$

این رابطه بیان می‌کند که برایند تمام گشتاورها وارد بر جسم برابر با حاصلضرب لختی دورانی جسم در شتاب زاویه‌ای است. آشکارا می‌توان با در نظر گرفتن تناظر زیر در قانون دوم نیروها یعنی $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ به قانون دوم برای گشتاورها رسید.

$$\begin{aligned} F &\Rightarrow \tau \\ m &\Rightarrow I \\ a &\Rightarrow \alpha \end{aligned} \quad (۳۷.۸)$$

۵.۸ کار و انرژی جنبشی چرخشی

همان‌گونه که در فصل قبل گفته شد اختلاف انرژی جنبشی برای دو حالت ابتدایی و نهایی برابر با کار انجام شده توسط نیروی اعمالی است یعنی

$$\Delta K = K_f - K_i = W \quad (۳۸.۸)$$

که کار و انرژی جنبشی با روابط زیر تعریف می‌شدند.

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx \qquad K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (۳۹.۸)$$

اما به سادگی می‌توان با استفاده از تناظرهای گفته شده در قسمت قبل قانون کار و انرژی جنبشی برای حرکت چرخشی محض به صورت زیر بیان کرد.

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W \quad (۴۰.۸)$$

که کار با رابطه زیر داده می‌شود.

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \quad (۴۱.۸)$$

همچنین اگر در سیستمی تنها نیروهای پایستار وجو داشته باشد (سیستم منزوی) می‌توان بقای انرژی را به صورت زیر بیان کرد.

$$\Delta K_{rot} + \Delta K_{tran} + \Delta U = 0 \quad (۴۲.۸)$$

که ΔK_{rot} مربوط به انرژی جنبشی چرخشی و ΔK_{tran} مربوط به انرژی جنبشی انتقالی است. همچنین ΔU انرژی پتانسیل مربوط به نیروهای پایستار است.

مثال۷: پوسته‌ی کروی یکنواختی به جرم $M = 4/5kg$ و شعاع $R = 8/5cm$ می‌تواند حول محور عمود، بدون اصطکاک بچرخد، شکل ۱۱.۸. طناب بدون جرمی از استوای پوسته کروی گذشته و بر روی قرقره بدون اصطکاکی با لختی دورانی $I = 3 \times 10^{-3} kg.m^2$ و شعاع $r = 5cm$ قرار گرفته و از سوی دیگر به جرمی کوچکی به جرم $m = 0/6kg$ متصل است. هیچ اصطکاکی در سیستم وجود ندارد. سرعت جسم کوچک زمانی که $h = 82cm$ سقوط آزاد کرده و پس از آزاد شدن سیستم از حالت سکون محاسبه کنید. از تحلیل انرژی استفاده نمایید.

حل: از تحلیل انرژی کمک می‌گیریم. قبل از سقوط سیستم ساکن بوده در نتیجه فقط جسم کوچک انرژی پتانسیل گرانشی دارد. پس از سقوط جسم کوچک انرژی جنبشی، پوسته انرژی جنبشی دورانی، و قرقره انرژی جنبشی دورانی دارند. پس

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ mgh &= \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}I_{\text{پوسته}}\omega_{\text{پوسته}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{قرقره}}\omega_{\text{قرقره}}^2 \end{aligned} \quad (۴۳.۸)$$

در این رابطه $\omega_{\text{پوسته}}$، $\omega_{\text{قرقره}}$، v_y، $I_{\text{پوسته}}$ مجهول هستند. $I_{\text{پوسته}}$ را می‌توان از روی جرم و شعاع آن و به کمک رابطه‌ی لختی برای پوسته حساب کرد. هم‌چنین می‌دانیم چون طناب به پوسته و قرقره متصل است بین کمیت‌های خطی و زاویه‌ای روابط زیر برقرار است:

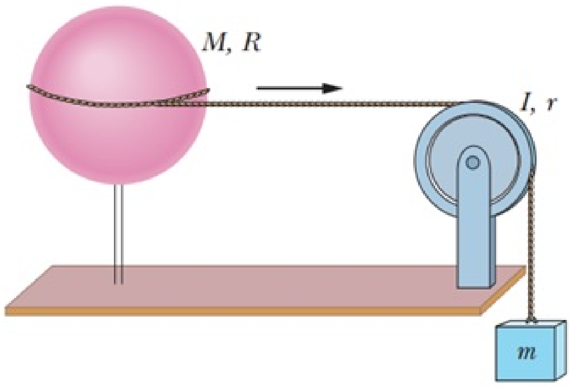
$$\begin{aligned} v_y &= r\omega_{\text{قرقره}} \\ v_y &= R\omega_{\text{پوسته}} \end{aligned} \quad (۴۴.۸)$$

بنابراین می‌توان مساله را حل کرد. به عنوان تمرین فرآیند حل را کامل کرده و عدد گذاری کنید.

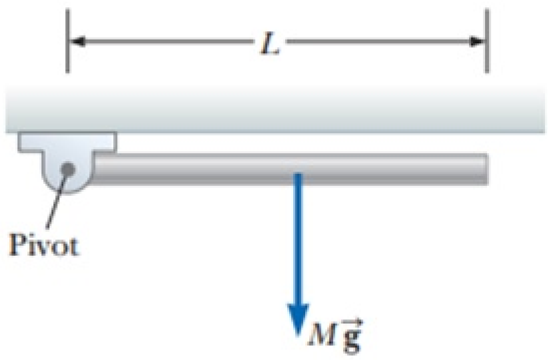
مثال۸: میله‌ی یکنواختی به طول L و جرم M از یک انتهای آن به لولای بدون اصطکاکی متصل شده و می‌تواند به طور آزادانه حول این لوله بچرخد، شکل ۱۲.۸. میله از حالت افقی رها می‌شود. شتاب زاویه‌ای اولیه‌ی میله و شتاب خطی اولیه‌ی انتهای سمت راست میله را محاسبه نمایید.

ابتدا گشتاور وارد بر میله که به خاطر نیروی وزن است، را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \tau &= I\alpha \\ (Mg)(\frac{L}{2}) &= \frac{ML^2}{3}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{(Mg)(\frac{L}{2})}{\frac{ML^2}{3}} = \frac{3g}{2L}. \\ a &= L\alpha = \frac{3g}{2}. \end{aligned} \quad (۴۵.۸)$$



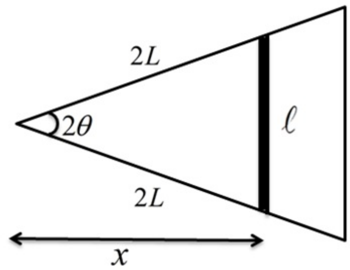
شکل ۱۱.۸: شکل مثال۷



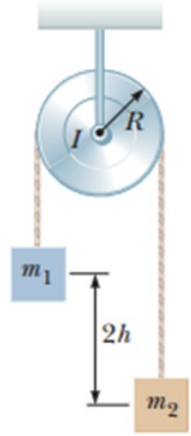
شکل ۱۲.۸: شکل مثال۸

۶.۸ تمرین

۱) الف) لختی دورانی مثلث متساوی‌الساقین با جرم M و طول ساق L و زاویه‌ی راس 2θ را نسبت به محوری که از راس مثلث می‌گذرد و بر صفحه‌ی آن عمود است، را بیابید M ۱۳.۸.
ب) لختی دورانی شش ضلعی منتظمی را بیابید که جرم آن M و فاصله‌ی مرکز تا راس آن R است. این لختی دورانی را حول محوری که از مرکز گذشته و بر صفحه‌ی آن عمود است، بیابید.
ج) فرآیند بالا را این بار برای N ضلعی منتظم تکرار کنید.
د) برای $N \to \infty$ نتایج را با لختی دورانی دیسک مقایسه کنید.
۲) دو جسم m_1 و m_2 را که $m_1 > m_1$ ، توسط طنابی نازک که از روی قرقره‌ای با لختی دورانی I آویزان شده‌اند، در نظر بگیرید. طناب روی قرقره نمی‌لغزد و قرقره بدون اصطکاک می‌چرخد. دو جسم در حالی که فاصله‌ی عمودی‌شان $2h$ است، از حالت سکون رها می‌شوند، شکل ۱۴.۸ .
الف) سرعت دو جسم در هنگام عبور از کنار هم را بدست آورید.
ب) سرعت زاویه‌ای قرقره در این زمان چقدر است.
۳) جرمی ۴ کیلوگرمی و ۳ کیلوگرمی به دو انتهای میله‌ای نازک به طول ۴۲ سانتی‌متر متصل شده‌اند. این سیستم با سرعت زاویه‌ای $\omega = 5/60 rad/s$ حول محور عمودی که از مرکز میله می‌گذرد، دوران می‌کند، شکل ۱۵.۸ .
الف) انرژی جنبشی سیستم و نیروی خالص بر هر جرم چقدر است.



شکل ۱۳.۸: شکل مربوط به تمرین۱

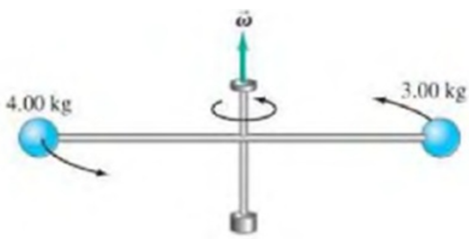


شکل ۱۴.۸: شکل تمرین۲

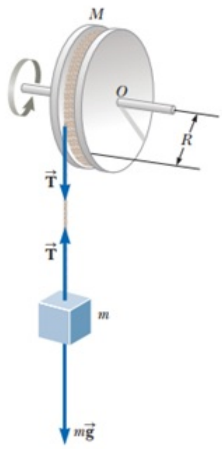
ب) حالت قبل را برای زمانی که سیستم حول مرکز جرم آن می‌چرخد، محاسبه نمایید.
۴) میله‌ی نازکِ یکنواختی به جرم m و طول $2a$ به صورت عمودی روی سطح ناهموار ایستاده است. میله می‌تواند بدون این که انتهای آن روی زمین بلغزد، سقوط کند.
الف) هنگامی که میله با راستای قائم بر زمین زاویه‌ی θ می‌سازد، نشان دهید که سرعت زاویه‌ای آن برابر است با

$$\omega^2 = \frac{3g}{2a}(1-\cos(\theta)).$$

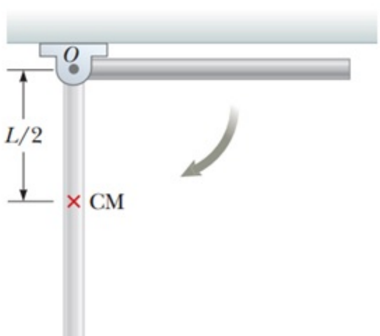
ب) نیروی عمودی که سطح در این وضعیت به میله وارد می‌کند، چقدر است.
۵) مکان زاویه‌ای بر روی لبه یک چرخ توسط رابطه‌ی $\theta = 4t - 3t^2 + t^3$ توصیف می‌شود. الف) سرعت را در زمان‌های $t = 2s$ و $t = 4s$ به دست آورید. ب) شتاب زاویه‌ای میانگین برای این بازه را در زمان شروع $t = 2s$ و پایان $t = 4s$ به دست آورید. پ) شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای در ابتدا و انتهای بازه‌ی فوق را به دست آورید.
۶) چرخی به شعاع R و جرم M و لختی دورانی I بر روی محور افقی مانند شکل ۱۶.۸ سوار شده است. طناب نازکی دور چرخ پیچیده شده و از سوی دیگر به جسمی به جرم m متصل است. زمانی که چرخ آزاد می‌شود، جسم به سمت پایین شتاب می‌گیرد و چرخ با شتاب زاویه‌ای می‌چرخد. عبارتی را برای الف) شتاب زاویه‌ای چرخ، ب) شتاب خطی جسم و پ) کشش در طناب به دست آورید.
۷) میله‌ی یکنواختی به طول L و جرم M به صورت آزاد به دور محور بدون اصطکاکی مانند شکل ۱۷.۸ می‌چرخد. میله از حالت افقی رها می‌شود. سرعت زاویه‌ای میله زمانی که به پایین‌ترین حالت خود می‌رسد چقدر است؟



شکل ۱۵.۸: شکل تمرین۳



شکل ۱۶.۸: شکل تمرین۶



شکل ۱۷.۸: شکل تمرین۷