معادله ریکاتی: هر معادله به صورت $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = g(x)$ را ریکاتی گوییم که برای حل بایستی جواب خصوصی

به صورت $y_1 = u(x)$ را داشته باشیم.

$$\underbrace{y = y_1 + \frac{1}{v}} \longrightarrow v = ? \longrightarrow y = ?$$

$y' + P(x)y = g(x) \leftarrow Q(x) = 0$ اگر . $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = 0$ اگر $g(x) = 0$

معادله ریکاتی تبدیل به معادله خطی مرتبه اول می‌شود.

$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = g(x)$ و y_1

$y = y_1 + \frac{1}{v} \longrightarrow v = ?$ $\longrightarrow$ خطی مرتبه اول $v' - (2y_1Q(x) + P(x))v = Q(x)$

$v = ? \longrightarrow y = ?$

مثال $y' = x^3 + \frac{2}{x} y - \frac{1}{x} y^2$, $y_1 = -x^2$

$y = y_1 + \frac{1}{v} \rightarrow \boxed{y = -x^2 + \frac{1}{v}}$

$y' = -2x + \frac{-v'}{v^2}$

$x^4 + \frac{1}{v^2} - \frac{2x^2}{v}$

$\xrightarrow{\text{در معادله}} -2x - \frac{v'}{v^2} = x^3 + \frac{2}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{v}\right) - \frac{1}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{v}\right)^2$

$\cancel{-2x} - \frac{v'}{v^2} = \cancel{x^3} - \cancel{2x} + \frac{2}{xv} - \cancel{x^3} - \frac{1}{xv^2} + \frac{2x}{v}$

$\xrightarrow[\text{ضرب}]{-v^2 \text{ در}} v' = -\frac{2v}{x} + \frac{1}{x} - 2xv \longrightarrow \boxed{v' + \left(\frac{2}{x} + 2x\right)v = \frac{1}{x}}$ خطی مرتبه اول

(۲۰۱۱) اول

$$\begin{cases} y' + P(x)y + Q(x)y^2 = g(x) \\ y' - \frac{2}{x}y + \frac{1}{x}y^2 = x^3 \end{cases}$$

$v' - (2y_1 Q(x) + P(x))v = Q(x)$

$v' - \left(2(-x^2)\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{2}{x}\right)\right)v = \frac{1}{x} \rightarrow v' + \left(\frac{2}{x} + 2x\right)v = 1/x$

$v' + \underbrace{\left(\frac{2}{x} + 2x\right)}_{P(x)} v = \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)}$ خطی مرتبه اول

$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int\left(\frac{2}{x} + 2x\right)dx}$

$= e^{(2\ln x + x^2)} = e^{\ln x^2} \cdot e^{x^2} = x^2 e^{x^2}$

$$v = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\, g(x)\, dx + c\right) = \frac{1}{x^2 e^{x^2}}\left(\int \frac{1}{2} 2x^{\cancel{2}} \cdot e^{x^2} \cdot \frac{1}{x}\, dx + c\right)$$

$$v = \frac{1}{x^2 e^{x^2}}\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right) \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{2x^2} + \frac{c}{x^2 e^{x^2}}} \quad (2) \longrightarrow y = -x^2 + \frac{1}{v} \quad (1)$$

$$y + x^2 = \frac{1}{v} \longrightarrow \boxed{v = \frac{1}{y + x^2}}$$

$$(1), (2) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{y + x^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{c}{x^2 e^{x^2}}}$$

تمرین $y' + 2y^2 - \frac{1}{x} y = 2x^2$, $y_1(x) = x \longrightarrow y = x + \frac{1}{v}$ (1)

$$y - x = \frac{1}{v} \longrightarrow \boxed{v = \frac{1}{y - x}}$$

جواب. $\boxed{v = -\frac{1}{2x} + \frac{c}{x e^{-2x^2}}}$ (2)

$$y' = 2\tan x \sec x - y^2 \sin x, \quad y_1 = \sec x$$

$$\begin{cases} \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \\ (\sec x)' = \sec x . \tan x \end{cases}$$

$$y = y_1 + \frac{1}{v} = \sec x + \frac{1}{v} \longrightarrow y' = \sec x . \tan x - \frac{v'}{v^2}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \sec x . \cancel{\tan x} - \frac{v'}{v^2} = 2\cancel{\tan x} . \sec x - \left(\sec x + \frac{1}{v}\right)^2 \sin x$$

$$\sec^2 x + \frac{1}{v^2} + 2\frac{\sec x}{v}$$

$$-\frac{v'}{v^2} = \cancel{\sec x . \tan x} - \underbrace{\sec^2 x . \sin x}_{\sec x . \frac{1}{\cos x} . \sin x \;=\; \tan x} + \frac{\sin x}{v^2} + \frac{2\sec x . \sin x}{v}$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{در } -v^2} v' = -\sin x - 2\sec x . \sin x \, v \longrightarrow v' + 2\frac{\sin x}{\cos x} v = -\sin x$$

معادله خطی مرتبه اول

$\vdots$

معادله کلرو: فرم کلی این معادله به صورت $y = xy' + f(y')$. برای حل

$y' = p$

مشتق

$\cancel{y'} = \cancel{1 \times y'} + xy'' + y'' f'(y') \longrightarrow y''\left(x + f'(y')\right) = 0$ $\quad y' = p$, $y'' = p'$

$p'\left(x + f'(p)\right) = 0$

$p' = 0 \longrightarrow p = m \longrightarrow y' = m \longrightarrow \underbrace{y = mx + \underbrace{f(m)}_{\text{عدد}}}_{\text{خطی}}$

$x + f'(p) = 0 \longrightarrow \overbrace{x = -f'(p)}$

$y = xy' + f(y') \xrightarrow[x = -f'(p)]{y' = p} \underbrace{y = -pf'(p) + f(p)}$

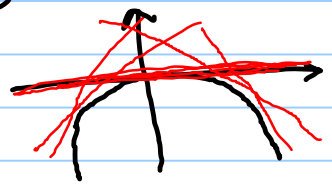
مثال $y = xy' + (y')^2 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \cancel{y'} = \cancel{1 \times y'} + xy'' + 2y'y''$

$y' = p \longrightarrow y'' = p' \longrightarrow xp' + 2pp' = 0 \longrightarrow p'(x + 2p) = 0$

$p' = 0 \longrightarrow p = m$, $y = m$, $\underbrace{y = mx + m^2}_{\text{خطی}}$

$x + 2p = 0 \longrightarrow p = -\frac{x}{2}$

$p = y' \longrightarrow y' = -x/2 \xrightarrow{\int} \boxed{y = -\frac{x^2}{4}}$



معادلات قابل تبدیل به معادلات همگن یا جداپذیر

معادلاتی به صورت $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$

۱) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ (دو خط موازیند) آنگاه با تغییر متغیر $ax+by=u$ معادله به یک معادله جداپذیر تبدیل می‌شود.

۲) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ آنگاه دو خط متقاطعند و محل برخورد دو خط را نقطه (x_0, y_0) می‌نامیم و با تغییر متغیر

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

معادله به یک معادله همگن تبدیل می‌شود.

مثال $y' = \frac{x+y}{1-x-y}$ $\qquad \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1}$ موازی

$$\begin{cases} x+y=u \longrightarrow y = u-x \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = u'-1 \\ \Downarrow \\ -x-y=u \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} u'-1 = \frac{u}{1-u} \longrightarrow u' = \frac{u}{1-u}+1$$

$$u' = \frac{1}{1-u} \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-u} \xrightarrow{\text{جداسازی}}$$

$$\int (1-u)\,du = \int dx \longrightarrow \begin{cases} u - \frac{u^2}{2} = x + C \\ u = x+y \end{cases}$$

مثال $(4x+2y+1)\frac{dx}{dx} + (2x+y+5)\frac{dy}{dx} = 0$

$$y' = -\frac{4x+2y+1}{2x+y+5} \qquad \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$ موازی

$$\begin{cases} 4x+2y=u \\ \Downarrow \\ 2x+y=u \end{cases}$$

$$\text{حل}\quad (3x-y-1)\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'}-(x+2y-5)\frac{dx}{dx}=0 \longrightarrow \boxed{y'=\frac{x+2y-5}{3x-y-1}} \qquad \frac{1}{3}\neq\frac{2}{-1}$$

دو خط متقاطعند

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=X+x_0=X+1 \longrightarrow dx=dX \\ y=Y+y_0=Y+2 \longrightarrow dy=dY \end{cases}$$

$$\longrightarrow y'=Y'$$

$$Y'=\frac{X+1+2(Y+2)-5}{3(X+1)-(Y+2)-1}=\boxed{\frac{X+2Y}{3X-Y}}$$

همگن

$$Y=Xv \xrightarrow{\text{مشتق}} Y'=1\times v+Xv' \longrightarrow v+Xv'=\frac{X+2Xv}{3X-Xv}=\frac{1+2v}{3-v}$$

$$Xv'=\frac{1+2v}{3-v}-\frac{v}{1}=\frac{1+2v-3v+v^2}{3-v}=\frac{v^2-v+1}{3-v} \longrightarrow X\frac{dv}{dX}=\frac{v^2-v+1}{3-v}$$

جدانویس

$$\longrightarrow \int\frac{3-v}{v^2-v+1}\,dv=\int\frac{dX}{X} \longrightarrow v=? \longrightarrow v=\frac{Y}{X} \longrightarrow \begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-2 \end{cases}$$

با تغییر متغیر $z = \sin y$ معادله زیر را حل کنید.

$$(x-2\sin y+3)\,dx + (2x-4\sin y-3)\underbrace{\cos y\,dy}=0$$

$$z=\sin y \xrightarrow{\text{مشتق}} dz=\cos y\,dy \longrightarrow (x-2z+3)\frac{dx}{dx}+(2x-4z-3)\frac{dz}{dx}=0$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{dz}{dx}=-\frac{x-2z+3}{2x-4z-3}} \qquad \frac{1}{2}=\frac{-2}{-4} \quad \text{موازیند}$$

$$x-2z=u \longrightarrow \frac{x-u}{2}=z \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1-u'}{2}=z'$$

$$\longrightarrow \frac{1-u'}{2}=-\frac{u+3}{2u-3} \longrightarrow \cdots\ u'=\frac{du}{dx}$$

معادله دیفرانسیل دسته منحنی و سهمی‌های کانونی.

$$y=cx^2 \longrightarrow \frac{y}{x^2}=c \xrightarrow[\text{مشتق}]{\text{نسبت به } x}$$

$$\frac{y'\cdot x^2-2xy}{x^4}=0 \longrightarrow x^{\cancel{2}}y'=2\cancel{x}y \longrightarrow \boxed{y'=\frac{2y}{x}}$$

راه دوم $y=cx^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=2cx$

$$c=\frac{y'}{2x} \longrightarrow y=\frac{y'}{2x}\cdot x^2 \Rightarrow y'=2y/x$$

مثال

$$\underbrace{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x}_{y'' + y = 0} \longrightarrow y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x \longrightarrow y'' = -c_1 \cos x - c_2 \sin x$$

نکته: برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل منحنی‌های به صورت $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0$ می‌توان دترمینان زیر را مساوی صفر گرفت.

$$\begin{vmatrix} y & y' & \cdots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n)} \\ \vdots & & & \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

$$y = c_1 \underbrace{\cos x}_{y_1} + c_2 \underbrace{\sin x}_{y_2}$$

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ \cos x & -\sin x & -\cos x \\ \sin x & \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow y + y'' = 0$$

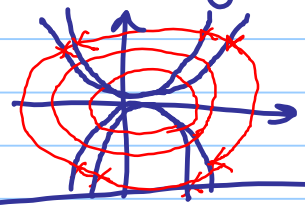
مثال

$$y = c_1 \underbrace{e^x}_{y_1} + c_2 \underbrace{x^2}_{y_2} \longrightarrow \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ e^x & e^x & e^x \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow y(2e^x + 2xe^x) - y'(2e^x - x^2 e^x) + y''(2xe^x - x^2 e^x) = 0$$

یافتن مسیرهای عمود بر دسته منحنی‌ها:

$y = Cx^2 \longrightarrow y' = \frac{2y}{x} \longrightarrow$ مسیر قائم $y' = \frac{-x}{2y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{2y} \xrightarrow{\text{جدا کنیم}} 2y\,dy = -x\,dx \longrightarrow \frac{y^2}{2} + x^2 = C \longrightarrow \underbrace{y^2 + x^2 = C}_{\text{دایره}}$



مثال $x^2 + y^2 = 2Cx \longrightarrow \frac{x^2+y^2}{x} = 2C \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{(2x+2yy')x - (x^2+y^2)}{x^2} = 0$

$y' = \frac{y^2-x^2}{2xy} \xrightarrow{\text{مسیر قائم}} y' = -\frac{2xy}{y^2-x^2} \Rightarrow y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} \xrightarrow{\text{همگن}} y = xv$

$y' = 1 \times v + xv'$

$\longrightarrow v + xv' = \frac{2x \cdot xv}{x^2 - x^2v^2} \Rightarrow xv' = \frac{2v}{1-v^2} - \frac{v}{1} = \frac{2v - v + v^3}{1-v^2} = \frac{v^3+v}{1-v^2}$

$\longrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^3+v}{1-v^2} \xrightarrow{\text{جدا کنیم}} \int \frac{1-v^2}{v^3+v}\,dv = \int \frac{dx}{x}$

$$\underbrace{\ln v - \ln(1+v^2)}_{\ln \frac{v}{1+v^2}} = \underbrace{\ln x + \ln c}_{\ln cx} \longrightarrow \frac{v}{1+v^2} = cx \xrightarrow{v = y/x}$$

معادلات مرتبه دوم قابل تبدیل به مرتبه اول

معادله‌ی مرتبه دوم در حالت کلی به صورت $y'' = f(x, y, y')$ یا $f(x, y, y', y'') = 0$ می‌باشد. برای حل این معادله می‌توان با حل دو معادله‌ی مرتبه اول متوالی جواب را به دست آورد. دو حالت کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- اگر در معادله متغیر y ظاهر نشده باشد و معادله به صورت $f(x, y', y'') = 0$ باشد در این صورت

$$y'' = u' \longleftarrow y' = u$$

مثال $xy'' = 2(y'^2 - y')$ با فرض $y' = u \longrightarrow y'' = u'$

$$xu' = 2(u^2 - u) \longrightarrow x\frac{du}{dx} = 2(u^2 - u) \longrightarrow \int \frac{du}{u^2 - u} = \int 2\frac{dx}{x}$$

$A = -1 \qquad B = 1$

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{\underbrace{u}_{u=0}} + \frac{B}{\underbrace{u-1}_{u=1}} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \qquad \Rightarrow \underbrace{\ln(u-1) - \ln u}_{\ln \frac{u-1}{u}} = \underbrace{2\ln x + \ln C^2}_{\underbrace{\ln x^2 + \ln C^2}_{\ln C^2 x^2}}$$

$$\longrightarrow \frac{u-1}{u} = C^2x^2 \longrightarrow 1 - \frac{1}{u} = C^2x^2 \longrightarrow 1 - C^2x^2 = \frac{1}{u} \longrightarrow u = \frac{1}{1 - C^2x^2}$$

$$y' = \frac{1}{1 - C^2x^2}$$

$$\xrightarrow{y' = dy/dx} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - C^2x^2} \xrightarrow{\text{جدا پذیر}} \int dy = \int \frac{dx}{\underbrace{1 - C^2x^2}_{(1 - Cx)(1 + Cx)}} \longrightarrow y = ?$$

حالت دوم: معادله فاقد متغیر x است. $y' = u$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \times \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y' = u} = u \cdot \frac{du}{dy}$$

$$y' = u \Rightarrow y'' = u'$$

$$\cancel{x} \quad y' = u \longrightarrow \cancel{y'' = u'} \quad y'' = u\frac{du}{dy}$$

مثال $y y'' = (y')^2$ فاقد x است $\longrightarrow y' = u \longrightarrow y'' = u\frac{du}{dy}$

$$y \cdot u \frac{du}{dy} = u^2 \xrightarrow{u \neq 0} y\frac{du}{dy} = u \longrightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dy}{y} \longrightarrow \ln u = \ln y + \ln C_1$$

$$u = c_1 y \xrightarrow{u = y' = dy/dx} \frac{dy}{dx} = c_1 y \longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int c_1 \, dx \longrightarrow \boxed{\ln y = c_1 x + c}$$