معادلات کامل: به معادله‌ی $\underbrace{M(x,y)} + \underbrace{N(x,y)}\,\underbrace{y'} = 0$ $\left(M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0\right)$

کامل گوییم هرگاه داشته باشیم

$$M_y = N_x$$

مشتق M نسبت به y ← M_y ، N_x → مشتق N نسبت به x

برای حل ابتدا از $M(x,y)$ نسبت به x انتگرال می‌گیریم و به جای ثابت C تابع $h(y)$ را جایگزین می‌کنیم سپس از جواب بدست آمده نسبت به y مشتق گرفته و برابر با N قرار می‌دهیم با این کار $h(y)$ با حل معادله به دست می‌آید.

مثال: $\underbrace{y}_{M}\,dx + (\underbrace{x+y^2}_{N})\,dy = 0 \qquad y(1)=2$

$M_y = 1 \quad , \quad N_x = 1 \longrightarrow M_y = N_x \longrightarrow$ معادله کامل است.

$$f(x,y) = \int y\,dx = \underbrace{yx + \cancel{\varnothing}^{\,h(y)\,?}} \longrightarrow f_y = N \longrightarrow \cancel{x} + h'(y) = \cancel{x} + y^2 \int \longrightarrow$$

$$h(y) = y^3/3$$

جواب ع. $yx + y^3/3 = C$ $\qquad y(1) = 2 \longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

$$2 \times 1 + \frac{8}{3} = C \longrightarrow C = \frac{14}{3}$$

جواب خ.: $yx + y^3/3 = \frac{14}{3}$

$$\int y\,\underline{dx} + \int (x+y^2)\,\underline{dy} = 0 \longrightarrow M_y = N_x$$

$$yx + \cancel{xy} + y^3/3 = C$$

$$\underbrace{(x e^{y}+2)}_{N}dy+\underbrace{e^{y}}_{M}dx=0 \quad \left\{\begin{array}{l} M_y=e^{y} \\ N_x=e^{y} \end{array}\right\} M_y=N_x \longrightarrow \text{معادله کامل است}$$

$$f(x,y)=\int e^{y}dx=x e^{y}+h(y) \longrightarrow f_y=N \longrightarrow \cancel{x e^{y}}+h'(y)=\cancel{x e^{y}}+2$$

$$h(y)=2y \longrightarrow \text{جواب.}\ x e^{y}+2y=c$$

عامل انتگرال یا فاکتور انتگرال: اگر معادله $M(x,y)+N(x,y)\,y'=0$ کامل نباشد به دنبال تابعی مانند $\mu(x,y)$ یافت بشیم که اگر در طرفین معادله ضرب شود، معادله کامل گردد در اینصورت تابع $\mu(x,y)$ عامل انتگرال ساز گفته می‌شود برای یافتن $\mu(x,y)$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) $\mu(x,y)$ تابعی از x به صورت $\mu(x)$ باشد در اینصورت:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

ب) $\mu(x,y)$ فقط تابعی از y به صورت $\mu(y)$ باشد داریم:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

مثال:

$$\underbrace{(3xy + y^2)}_{M} + \underbrace{(x^2 + xy)}_{N} y' = 0 \quad \begin{cases} M_y = 3x + 2y \\ N_x = 2x + y \end{cases} \quad M_y \neq N_x \rightarrow \text{کامل نیست}$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x + y}{x^2 + xy} = \frac{\cancel{x+y}}{x\cancel{(x+y)}} \qquad \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

طرفین معادله را در x ضرب می‌کنیم تا معادله کامل شود و سپس حل می‌کنیم.

$$x\left[(3xy+y^2)+(x^2+xy)\,y'=0\right] \longrightarrow (\underbrace{3x^2y+xy^2}_{M})+(\underbrace{x^3+x^2y}_{N})\,y'=0$$

$$\begin{cases} M_y = 3x^2+2xy \\ N_x = 3x^2+2xy \end{cases} \Big\rangle\; M_y = N_x \longrightarrow$$ كامل

$$f(x,y)=\int(3x^2y+xy^2)\,dx = \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}}y + \frac{x^2y^2}{2} + \overset{?}{h}(y)$$

$$f_y = N \longrightarrow \cancel{x^3} + \cancel{x^2y} + h'(y) = \cancel{x^3+x^2y} \longrightarrow h'(y)=0 \longrightarrow h(y)=C$$

ج عام: $x^3y+\dfrac{x^2y^2}{2}+C=0$

$$\int(3x^2y+xy^2)\,dx+\int(x^3+x^2y)\,dy=0 \longrightarrow \cancel{\frac{3x^3}{3}y}+\cancel{\frac{x^2y^2}{2}} \underbrace{+x^3y+\frac{x^2y^2}{2}}=C$$

$$\underbrace{y}_{M}\,dx+(2x-2e^{y})\,dy=0 \qquad \left\{\begin{array}{l} M_y=1 \\ N_x=2 \end{array}\right\} \; M_y\neq N_x \longrightarrow$$ کامل نیست

$$\mu(y)=e^{\int\frac{N_x-M_y}{M}dy}=e^{\int\frac{2-1}{y}dy}=e^{\ln y}=y$$ ادامه به فصلها تمرین

مثال $$\underbrace{xy}_{M}\,dx+\underbrace{(1+x^{2})}_{N}\,dy=0 \qquad \left\{\begin{array}{l} M_y=x \\ N_x=2x \end{array}\right\} \; M_y\neq N_x$$

$$\mu(x)=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N}dx}=e^{\int\frac{x-2x}{1+x^{2}}dx}=e^{\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1+x^{2}}dx}=e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^{2})}=e^{\ln(1+x^{2})^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\mu(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}$$

$$\mu(y)=e^{\int\frac{N_x-M_y}{M}dy}=e^{\int\frac{2x-x}{xy}dy}=e^{\int\frac{dy}{y}}=e^{\ln y}=y\to\mu(y)=y$$

$$\underbrace{(e^x - \sin y)}_{M}\,dx + \underbrace{\cos y}_{N}\,dy = 0 \quad \begin{cases} M_y = -\cos y \\ N_x = 0 \end{cases} \rightarrow M_y \neq N_x$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx} = e^{\int \frac{-\cos y - 0}{\cos y}dx} = e^{\int -dx} = e^{-x}$$

: طرفین معادله را در e^{-x} ضرب

تمرین: $\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2 y} + \frac{1}{x^3 y^3}\right)dx + \left(\frac{1}{y^3} + \frac{1}{x y^2} + \frac{3}{2x^2 y^4}\right)dy = 0$

معادلات زیر دارای عامل انتگرال سازی به صورت $\mu(x,y) = \underline{x^m y^n}$ می‌باشد جواب معادله را بیابید.

الف) تمرین $(3y + 4xy^2)dx + (2x + 3x^2 y)dy = 0 \xrightarrow{\text{حل}} m = 2, n = 1 \rightarrow \mu(x,y) = x^2 y$

ب) $\underbrace{(x^2+xy)}_{N}y' + \underbrace{(3xy+2y^2)}_{M} = 0 \to \begin{cases} M_y = 3x+4y \\ N_x = 2x+y \end{cases} \to M_y \neq N_x$

غیردقیق

$\mu(x,y) = \underbrace{x^m y^n} \longrightarrow \underbrace{x^m y^n \Big((x^2+xy)}y' + (3xy+2y^2)\Big) = 0$

$\longrightarrow \big(\underbrace{x^{m+2}y^n + x^{m+1}y^{n+1}}_{N}\big)y' + \big(\underbrace{3x^{m+1}y^{n+1} + 2x^m y^{n+2}}_{M}\big) = 0$

$M_y = N_x \longrightarrow \begin{cases} M_y = 3(n+1)x^{m+1}y^n + 2(n+2)x^m y^{n+1} \\ N_x = (m+2)x^{m+1}y^n + (m+1)x^m y^{n+1} \end{cases} \to \underbrace{M_y = N_x} \to \begin{cases} 3(n+1) = m+2 \\ 2(n+2) = m+1 \end{cases}$

$m = 7, \; n = 2$

$\mu(x,y) = x^m y^n = \underbrace{x^7 y^2}$

با اعمال تغییر متغیر $z = \sin y$ معادله زیر را حل کنید.

$$\underbrace{(4x^3 \sin^3 y - 2x \sin y)}_{M} dx + (\underbrace{3x^4 \sin^2 y - x^2}_{N}) \underbrace{\cos y \, dy}_{} = 0$$

$M_y = N_x \longrightarrow$ کامل است $\longrightarrow f(x,y) = \int M \, dx = \text{———} \; - - .$

حل

$$\sin y = z \longrightarrow \cos y \, dy = dz$$

$$\longrightarrow (\underbrace{4x^3 z^3 - 2xz}_{M}) dx + (\underbrace{3x^4 z^2 - x^2}_{N}) dz = 0$$

$$M_z = N_x \longrightarrow \begin{cases} M_z = 12x^3 z^2 - 2x \\ N_x = 12x^3 z^2 - 2x \end{cases} \rangle \; . - - - .$$

معادله زیر را حل کنید.

$$\overbrace{\cos x(2\sin y-\sin x)}^{M}\,dx-\overbrace{(\sin x\cos y)}^{N}\,dy=0$$

$$y\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

$$M_y=\cos x(2\cos y)\qquad,\ N_x=-\cos x\cos y$$

$$\mu(x)=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N}dx}=e^{\int\frac{2\cos x\cos y+\cos x\cos y}{-\sin x\cos y}dx}=e^{-3\int\frac{\cos x}{\sin x}dx}$$

مشتق مخرج

$$=e^{-3\ln\sin x}=e^{\ln\sin^{-3}x}=\frac{1}{\sin^3 x}$$

طرفین معادله را در $\mu(x)$ ضرب می کنیم و

$$-\frac{\sin y}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin x}=C\longrightarrow \sin x-\sin y=2\sin^2 x$$

معادلات خطی مرتبه اول: هر معادله به صورت $\boxed{y' + P(x)y = g(x)}$ را معادله خطی مرتبه اول می‌نامیم

که برای حل آن داریم:

$$\underbrace{\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}}\ ,\qquad \underbrace{y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\, g(x)\, dx + c\right)}$$

مثال
$$x\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} + 3y = \frac{\sin x}{x^2} \xrightarrow{y(\pi)=1} y' + \underbrace{\frac{3}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{\sin x}{x^3}}_{g(x)}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}\,dx} = e^{\overbrace{3\ln x}} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\, g(x)\, dx + c\right) = \frac{1}{x^3}\left(\int \cancel{x^3} \cdot \frac{\sin x}{\cancel{x^3}}\, dx\right) = \underbrace{\frac{1}{x^3}(-\cos x + c)}_{\text{ج. عمومی}}$$

$$y(\pi) = 1 \to \begin{cases} x = \pi \\ y = 1 \end{cases} \longrightarrow 1 = \frac{1}{\pi^3}\left(-\overset{-1}{\cancel{\cos}\pi} + c\right) \longrightarrow c = ?$$

$$\begin{cases} y' + P(x)y = g(x) \longrightarrow y = ? \longrightarrow \mu(x) = e^{\int P(x)dx} \longrightarrow y = \dfrac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\, g(x)\, dx + c\right) \\ x' + \underbrace{P(y)}\, x = g(y) \longrightarrow x = ? \longrightarrow \mu(y) = e^{\int P(y)dy} \longrightarrow x = \dfrac{1}{\mu(y)}\left(\int \mu(y)\, g(y)\, dy + c\right) \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{x'} + \underbrace{2xy}_{P(y)=2y} = \underbrace{e^{-y^2}}_{g(y)} \longrightarrow x = ? \longrightarrow \mu(y) = e^{\int P(y)dy} = e^{\int 2y\,dy} = e^{y^2}$$

$$x = \frac{1}{\mu(y)}\left(\int \mu(y)\, g(y)\, dy + c\right) = \frac{1}{e^{y^2}}\left(\int \underbrace{e^{y^2} \cdot e^{-y^2}}_{e^0} dy + c\right) = e^{-y^2}(y + c)$$

به معادلات برنولی غیرخطی معادله به صورت $y' + P(x)y = g(x)y^n$ است. برای حل آن

از تغییر متغیر $v = y^{1-n}$ استفاده کرده و معادله را به یک معادله خطی مرتبه اول برحسب v تبدیل می‌شود.

مثال $x^2y' + 2xy = y^3 \longrightarrow \begin{cases} y' + \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)}y = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)}\underbrace{y^3}_{y^n} \\ y' + p(x)y = g(x)\,y^n \end{cases}$ $\quad n=3$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم کنیم}]{\text{طرفین را بر } y^3} \underbrace{y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^2}}_{(*)} \quad , \quad v = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2} \xrightarrow{\text{مشتق}} v' = -2y^{-3}y' \;\Rightarrow\; y^{-3}y' = \frac{v'}{-2}$$

$$\xrightarrow{\text{در } (*) \text{ جایگذاری}} \frac{v'}{-2} + \frac{2}{x}v = \frac{1}{x^2} \xrightarrow{\text{در } -2 \text{ ضرب}} v' \underbrace{- \frac{4}{x}}_{p(x)}v = \underbrace{-\frac{2}{x^2}}_{g(x)}$$ خطی مرتبه اول

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = \frac{1}{x^4}$$

$$\cancel{y}^{\,v} = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\, g(x)\, dx + c\right) = \frac{1}{\frac{1}{x^4}}\left(\int \underbrace{\frac{1}{x^4}\left(\frac{-2}{x^2}\right)}_{-2x^{-6}} dx + c\right) = x^4\left(\frac{-2x^{-5}}{-5} + c\right)$$

$$\begin{cases} v = \dfrac{2}{5x} + cx^4 \\ v = y^{-2} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{y^{-2} = \frac{2}{5x} + cx^4}$$ جواب عمومی

مثال $y' + xy = \dfrac{x}{y^3} \longrightarrow n = -3 \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{طرفین را در } y^3} y^3 y' + x y^4 = x \quad (*)$

$$v = y^{1-n} = y^{1-(-3)} = y^4 \xrightarrow{\text{مشتق}} \underline{v' = 4y^3 y'}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{v'}{4} + xv = x \longrightarrow v' + \underbrace{4x}_{P(x)} v = \underbrace{4x}_{g(x)}$$ خطی مرتبه اول $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ ....

حل:

$$(x^2-1)\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} - 2(1+x)y = y^{5/2} \longrightarrow y' - \frac{2\cancel{(1+x)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}\, y = \frac{1}{x^2-1}\, y^{5/2}$$

$$\frac{y'}{y^{5/2}} - \frac{2}{(x-1)} \times \frac{y}{y^{5/2}} = \frac{1}{x^2-1} \longrightarrow y^{-5/2}\, y' - \frac{2}{(x-1)}\, y^{-3/2} = \frac{1}{x^2-1} \quad (*)$$

$$v = y^{1-n} = y^{1-5/2} = y^{-3/2} \xrightarrow{\text{مشتق}} v' = -\frac{3}{2}\, y^{-5/2}\, y'$$

$$\begin{cases} y' + P(x)\, y = g(x)\, y^n \longrightarrow y = f(x) \\ x' + P(y)\, x = g(y)\, x^n \longrightarrow x = f(y) \end{cases}$$

حل $y' = \dfrac{y}{x^3y^2\ln y - x} \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x^3y^2\ln y - x}$

$\longrightarrow \underset{x'}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{x^3y^2\ln y - x}{y} \longrightarrow x' = x^3\, y^{\cancel{2}\,1}\ln y - \dfrac{1}{y}x$

$x' + P(y)x = g(y)\, y^n$

$x' + \underbrace{\dfrac{1}{y}}_{p(y)} x = \underbrace{y^{\cancel{2}\,1}\ln y}_{g(y)}\, \underbrace{x^3}_{x^n}$ $\boxed{n=3}$

$\longrightarrow x^{-3}x' + \dfrac{1}{y}\overset{v}{x^{-2}} = y^{\cancel{2}\,1}\ln y$

x

$\longrightarrow v = x^{1-n} = x^{1-3} = x^{-2}$

$$v = x^{-2} \xrightarrow{\text{مشتق}} v' = -2x^{-3}x' \xrightarrow{\text{در (*) جایگذاری}} \frac{v'}{-2} + \frac{1}{y}v = y^{\cancel{2}}\ln y$$

خطی مرتبه اول

$$\underbrace{v' - \frac{2}{y}}_{p(y)}v = \underbrace{-2y^{\cancel{2}}\ln y}_{g(y)} \longrightarrow \mu(y) = e^{\int p(y)\,dy} = e^{\int -\frac{2}{y}\,dy} = e^{-2\ln y}$$

$$= e^{\ln y^{-2}} = \frac{1}{y^2} \longrightarrow v = \frac{1}{\mu(y)}\left(\int \mu(y)g(y)\,dy + c\right) = y^2\left(\int \frac{1}{y^2}\left(-2y^{\cancel{2}}\ln y\right)dy + c\right)$$

$$\longrightarrow v = y^2\left(\int -2\frac{\ln y}{y}\,dy + c\right) \Rightarrow v = y^2\left(-2\frac{\ln^2 y}{2} + c\right)$$

$$\int \frac{\ln y}{y}\,dy \qquad \ln y = u \to \frac{1}{y}dy = du \to \int u\,du$$

$$\left\{ v = x^{-2} \right. \Rightarrow \frac{1}{x^2} = y^2\left(-\ln^2 y + c\right)$$