معادلات مرتبه اول

1. معادله جداپذیر (جداشدنی) 2. معادلات همگن 3. معادلات کامل 4. معادله خطی مرتبه اول

1. معادله جداپذیر: هر معادله به صورت $M(x)dx + N(y)dy = 0$ را جداشدنی گویند هرگاه بتوان

$$\int M(x)\,dx = -\int N(y)\,dy$$

$$M(x) + N(y)\,y' = 0 \rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$$

مثال $2x(y+1) - yy' = 0 \longrightarrow 2x(y+1) - y\frac{dy}{dx} = 0 \longrightarrow 2x(y+1)\,dx = y\,dy$

$$\longrightarrow \int 2x\,dx = \int \frac{y+1-1}{y+1}\,dy \longrightarrow x^2 = \int\left(1 - \frac{1}{y+1}\right)dy \longrightarrow x^2 = y - \ln|y+1| + C$$

مثال $x\cos y + \sqrt{x+1}\,\sin y\,\underbrace{y'}_{dy/dx} = 0 \longrightarrow \underbrace{x\cancel{\cos y}}_{\sqrt{x+1}\,\cancel{\cos y}}\,dx = -\underbrace{(\cancel{\sqrt{x+1}}\,\sin y)}_{\cancel{\sqrt{x+1}}\,\cos y}\,dy$

$$\longrightarrow \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx}_{} = \underbrace{\int \frac{\overset{\text{مشتق مخرج}}{\sin y}}{\cos y}\,dy}_{\ln|\cos y|+C} \longrightarrow$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \int \frac{t^2-1}{\cancel{t}} \times 2\cancel{t}\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)$$

$$x+1 = t^2 \longrightarrow dx = 2t\,dt$$

$f(x,y)$ را همگن از درجه n گوییم هرگاه

معادله تابع همگن:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

مثال: $f(x,y) = \sqrt{y}\,\sin\frac{x}{y} \longrightarrow f(tx,ty) = \underbrace{\sqrt{ty}}_{\sqrt{t}\cdot\sqrt{y}}\,\sin\frac{tx}{ty} = \sqrt{t}\cdot\left(\sqrt{y}\,\sin\frac{x}{y}\right) = \sqrt{t}\,f(x,y)$ $\quad n=\frac{1}{2}$

$$f(x,y)=\frac{x+1}{y-x} \longrightarrow f(tx,ty)=\frac{tx+1}{ty-tx}=\frac{tx+1}{t(y-x)}$$ همگن نیست.

مثال $f(x,y)=\dfrac{e^{x/y}}{y^2}-\dfrac{x+5y}{x^3}$ $\quad$ $\boxed{n=-2}$ $\quad$ $f(tx,ty)=\dfrac{1}{t^2}f(x,y)$

$\underbrace{f(x,y)}dx+\underbrace{g(x,y)}dy=0$ $\quad$ مثال: $(\sqrt{x^2-y^2}+y)\dfrac{dx}{dx}-x\dfrac{dy}{dx}=0$, $x>0$ $\quad$ ($\dfrac{dy}{dx}=y'$)

برای حل معادله همگن اینطور معادله را به صورت $y'=f(x,y)$ درآورده و سپس از تغییر متغیر $y=xv$ استفاده می‌کنیم.

$\dfrac{y}{x}=v$ $\quad$ $(\sqrt{x^2-y^2}+y)=xy' \longrightarrow y'=\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$

$$y = xv \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 1\times v + xv' \xrightarrow{\text{در معادله}} v + xv' = \frac{\sqrt{x^2 - x^2v^2} + xv}{x}$$

$v = y/x$

$$v + xv' = \frac{\cancel{|x|}^{\,x}\sqrt{1-v^2} + xv}{x} = \frac{\cancel{x}(\sqrt{1-v^2} + v)}{\cancel{x}}$$

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{v} + xv' = \sqrt{1-v^2} + \cancel{v} \xrightarrow{v' = \frac{dv}{dx}}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1-v^2} \xrightarrow{\text{جدا کردن}} \int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \int \frac{dx}{x} \longrightarrow \sin^{-1} v = \underbrace{\ln x + \ln c}_{\ln cx}$$

$$\underbrace{\sin(\sin^{-1} v)} = \sin(\ln cx) \longrightarrow v = \sin(\ln cx) \longrightarrow y = x \cdot \sin(\ln cx)$$

y/x

حل $(y^2+x^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ $\quad y(1)=2$

$$\frac{dx}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = y' \longrightarrow y' = \frac{y^2+x^2}{2xy}$$

$y = xv$

$y' = 1\times v + x v'$

$$v + xv' = \frac{x^2v^2+x^2}{2x\cdot xv} = \frac{x^2(v^2+1)}{2x^2v}$$

$$xv' = \frac{v^2+1}{2v} - \frac{v}{1} = \frac{v^2+1-2v^2}{2v} = \frac{1-v^2}{2v} \longrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v}$$ جدایی

$$\longrightarrow \int \frac{\overbrace{-2v}^{\text{مشتق}}}{1-v^2}\,dv = \int \frac{dx}{x} \longrightarrow \ln|1-v^2| = \underbrace{\ln x + \ln c}_{\ln cx}$$

$$\ln(1-v^2)^{-1} = \ln cx \longrightarrow \frac{1}{1-v^2} = cx \longrightarrow \frac{1}{1-(y/x)^2} = cx$$ جواب

$$y(1)=2 \longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{1-\left(\frac{2}{1}\right)^2} = c(1) \longrightarrow \boxed{c=?}$$

تمرین $(x^2-y^2)dx-(x^2+4y^2)\,dy=0$

تمرین $\sqrt{x}\,y' = 2\sqrt{-x+y} \longrightarrow y' = 2\frac{\sqrt{-x+y}}{\sqrt{x}} \longrightarrow y = xv \longrightarrow y' = v + xv'$

معادلات کامل: هر معادله به صورت $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ را کامل تعریف می‌کنیم هرگاه داشته باشیم

$(M(x,y)+N(x,y)y'=0)$

$M_y = N_x \longrightarrow$ مشتق نسبت به x $\longrightarrow$ مشتق نسبت به y

$$f(x,y)=\int M\,dx = \bigcirc + h(y)^{?} \longrightarrow f_y = N \longrightarrow h'(y)=? \xrightarrow{\int} h(y)=?$$

بازیابی:

مثال: $\underbrace{y}_{M}\,dx + \underbrace{(x+y^2)}_{N}\,dy = 0$

$M_y = 1 \quad , N_x = 1 \longrightarrow M_y = N_x \longrightarrow$ کامل است

$$f(x,y) = \int y\,dx = \underbrace{yx + h(y)^{?}} \xrightarrow[y]{\text{مشتق نسبت}} f_y = N \longrightarrow \cancel{x} + h'(y) = \cancel{x} + y^2$$

$$h'(y) = y^2 \xrightarrow{\int} h(y) = \frac{y^3}{3} + C$$

جواب: $yx + \frac{y^3}{3} = C$

$$\int y\,dx + \int (x+y^2)\,dy = 0 \longrightarrow \cancel{yx} + xy + y^3/3 = C$$

$$d\ \ \underbrace{(xe^y+2y)}_{N}y' + \underbrace{e^y}_{M} = 0 \qquad M_y = e^y,\ N_x = e^y \longrightarrow M_y = N_x \longrightarrow \text{exact}$$

$$(xe^y+2y)\,dy + \underbrace{e^y dx} = 0$$

$$f(x,y) = \int e^y dx = \underbrace{xe^y + h(y)}_{?} \longrightarrow f_y = N \longrightarrow \cancel{xe^y} + h'(y) = \cancel{xe^y} + 2y$$

$$\longrightarrow h(y) = y^2 \longrightarrow \text{Ç.: } xe^y + y^2 = C$$

$$\int (xe^y + 2y)\,dy + \int e^y dx = 0 \longrightarrow xe^y + y^2 + \cancel{xe^y} = C$$

$$\cancel{} + h'(y) = \cancel{} \longrightarrow h'(y) = 0 \longrightarrow h(y) = C$$

اگر معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل نباشد و بتوان تابعی مانند $\mu(x,y)$ یافت به قسمی که اگر در طرفین معادله ضرب شود، معادله کامل شود، آنگاه به $\mu(x,y)$ فاکتور انتگرال یا عامل انتگرال ساز گفته می‌شود.

$\mu(x,y)$

دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم

الف) $\mu(x)$ تابعی از x باشد در این صورت:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

ب) $\mu(y)$ تابعی از y باشد در این صورت:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

$$\underbrace{(y^2+y)}_{M}dx \underbrace{-x}_{N}dy = 0 \qquad M_y = 2y+1 \,,\; N_x = -1 \longrightarrow M_y \neq N_x$$

غير تامة

$$M_y - N_x = 2y+1+1 = 2y+2 = 2(y+1)$$

$$\cancel{\rho(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx} = e^{\int \frac{2(y+1)}{x}dx}}$$

$$\rho(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}dy} = e^{\int \frac{-2(y+1)}{y^2+y}dy} = e^{-2\int \frac{\cancel{y+1}}{y\cancel{(y+1)}}dy} = \underbrace{e^{-2\ln y}}_{} = e^{\ln y^{-2}}$$

$$= y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

تكعيبية

$$\xrightarrow{\text{ضرب } \frac{1}{y^2}} \underbrace{\left(1+\frac{1}{y}\right)}_{M} dx \underbrace{-\frac{x}{y^2}}_{N} dy = 0 \longrightarrow \begin{cases} M_y = -1/y^2 \\ N_x = -\frac{1}{y^2} \end{cases} \Big\} \; M_y = N_x \quad \text{کامل}$$

$$f(x,y) = \int \left(1+\frac{1}{y}\right) dx = x + \frac{1}{y}x + \overset{?}{h(y)} \longrightarrow f_y = N \longrightarrow \cancel{\frac{-x}{y^2}} + h'(y) = \cancel{\frac{-x}{y^2}}$$

$$\longrightarrow h'(y) = 0 \longrightarrow h(y) = C \longrightarrow \mathcal{C}: x + \frac{x}{y} = C$$

$$f(x,y)\,d: \int \left(1+\frac{1}{y}\right) dx + \int -\frac{x}{y^2} dy = 0$$

$$(y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0 \longrightarrow y^2 dx + y\,dx - x\,dy = 0$$

$$dx + \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0 \longrightarrow \int dx + \int d\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \longrightarrow x + \frac{x}{y} = C$$

$$\underbrace{d(xy)} = \underbrace{y\,dx + x\,dy} \qquad \cancel{\int d}(xy) = xy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

$$d(x^2+y^2) = 2x\,dx + 2y\,dy$$
$$= 2(x\,dx + y\,dy)$$

حل: $(\underbrace{3xy+y^2}_{M}) + (\underbrace{x^2+xy}_{N})\,y' = 0$ $\qquad M_y = 3x+2y,\ N_x = 2x+y$

$M_y \neq N_x \longrightarrow$ غیر تام

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x+y}{x^2+xy} = \frac{\cancel{(x+y)}}{x\cancel{(x+y)}}$$

$$\cancel{\frac{N_x - M_y}{M}} = \cancel{\frac{(x+y)}{3xy+y^2}} = \frac{\cancel{-(x+y)}}{y(3x+y)}$$

$$\varphi(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

طرفین را در x ضرب می‌کنیم تا معادله کامل شود.

$$\rightarrow \underbrace{(3x^2y + xy^2)}_{M} + \underbrace{(x^3 + x^2y)}_{N} y' = 0$$

$$\begin{cases} M_y = 3x^2 + 2xy \\ N_x = 3x^2 + 2xy \end{cases} \Big\} \; M_y = N_x$$

کامل است

$$\rightarrow f(x,y) = \int (3x^2y + xy^2)\,dx = \frac{3x^3}{3}y + \frac{x^2y^2}{2} + h(y)$$

$$f_y = N \longrightarrow \cancel{x^3} + \cancel{x^2y} + h'(y) = \cancel{x^3} + \cancel{x^2y} \longrightarrow h'(y) = 0 \longrightarrow h(y) = C$$

$$\rightarrow 2x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + C = 0$$

$$\underbrace{y}_{M}dx + \underbrace{(2x-2e^{y})}_{N}\,dy = 0 \longrightarrow M_y = 1,\ N_x = 2 \longrightarrow M_y \neq N_x$$

کامل نیست

$$\rho(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy} = e^{\int \frac{2-1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

$\longrightarrow$ هر فرض معادله را در y ضرب می‌کنیم و معادله کامل می‌شود.

$$\underbrace{(e^{x} - \sin y)}_{M}\,dx + \underbrace{\cos y}_{N}\,dy = 0 \qquad M_y = -\cos y,\ N_x = 0$$

$$\rho(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{\int \frac{-\cos y - 0}{\cos y} dx} = e^{-x} \longrightarrow$$