

مثال: معادله ریاضی تمام دایره‌ها را می‌نویسد که مرکز آن‌ها روی محور y ها قرار دارد را بیابید.

$$x^2 + (y-b)^2 = r^2 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} 2x + 2y'(y-b) = 0 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} 2 + 2(y''(y-b) + y'^2) = 0 \quad (II)$$

با یک رابطه (I) داریم:

$$y-b = \frac{-x}{y'} \quad (*)$$

حال با جایگزینی (*) در (II) داریم:

$$2 + 2\left(y''\left(\frac{-x}{y'}\right) + y'^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{y' - xy'' + y'^3 = 0}$$

مثال: معادله ریاضی رسته منحنی $y = \ln \cos(x-c_1) + c_2$ را بیابید.

$$\begin{cases} y = \ln \cos(x-c_1) + c_2 \\ y' = \frac{-\sin(x-c_1)}{\cos(x-c_1)} = -\tan(x-c_1) \\ y'' = -(1 + \tan^2(x-c_1)) \end{cases}$$

حال با جایگزینی در (*) داریم:

$$y'' = -(1 + y'^2) \leadsto \underline{y'' + y'^2 + 1 = 0}$$

مثال: معادله ریاضی رسته منحنی $x \sin \alpha + y \cos \alpha = 1$ را بیابید.

$$\begin{cases} x \sin \alpha + y \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha + y' \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

با استقلازه دستور کرامر، حل دستگاه فوق نتیجه می‌دهد:

$$\sin \alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y \\ 0 & y' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix}} = \frac{y'}{xy' - y}$$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix}} = \frac{-1}{xy' - y}$$

برای حذف α می‌توانیم بنویسیم

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{y'}{xy' - y}\right)^2 + \left(\frac{-1}{xy' - y}\right)^2 = 1 \quad \leadsto \quad \frac{y'^2 + 1}{(xy' - y)^2} = 1$$

$$\underline{y'^2 + 1 = (xy' - y)^2}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید. $r = c(1 + \sin \theta)$ را به r تبدیل کنید.

نیت: θ مشتق کنیم. برابر را می‌گذاریم.

$$c = \frac{r}{1 + \sin \theta} \quad \xrightarrow[\theta \text{ نیت}]{\text{مشتق}} \quad 0 = \frac{\frac{dr}{d\theta}(1 + \sin \theta) - \cos \theta (r)}{(1 + \sin \theta)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dr}{d\theta}}{1 + \sin \theta} = \frac{r \cos \theta}{(1 + \sin \theta)^2} \Rightarrow (1 + \sin \theta) \frac{dr}{d\theta} = r \cos \theta$$

معادلات ریاضی مرتبه اول :

فرم کلی یک معادله ریاضی مرتبه اول بصورت $y' = f(x, y)$ است یا بصورت $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ نشان داده می شود

به عنوان مثال $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$ یا $(\sin y)dx + (x + y)dy = 0$ معادلاتی مرتبه اول هستند.

تعیین وجود جواب - معادله ریاضی مرتبه اول :

اگر تابع (درست) $f(x, y)$ در ناحیه ای که می خواهیم بررسی کنیم مشتقات مرتبه اول آن نیز پیوسته باشد در این صورت $y' = f(x, y)$ را می توان حل کرد.
 گفته : اگر معادله ریاضی مرتبه اول $y' = f(x, y)$ را در شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ دقیقاً یک جواب دارد. (تئوری)

روش در حل معادله ریاضی مرتبه اول :

روش اول : معادله جدایی پذیر (تفکیک پذیر)

فرم کلی $M(x)dx + N(y)dy = 0$ است. این معادله را می توان جواب داد.

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

مثال : معادله جدایی پذیر

$$1) y' = e^{x+y} \quad y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y \rightarrow \frac{dy}{e^y} = e^x dx \rightarrow -e^{-y} = e^x + C \rightarrow e^x + e^{-y} = C$$

$$\text{وہ } y(0) = 0 \leadsto e + e = c \leadsto \underline{c = 2} \leadsto$$

$$\underline{e^x + e^{-y} = 2}$$

جواب: حضور و محضر

$$2) y' = 1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2$$

$$y' = (1+x^2)(1+y^2) \leadsto \frac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2) \leadsto$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = (1+x^2) dx \xrightarrow{\text{انٹیگرل}} \tan^{-1} y = x + \frac{x^3}{3} + C$$

جواب: حضور و محضر

$$3) xy' + x^2 = 4 \leadsto xy' = 4 - x^2 \leadsto y' = \frac{4-x^2}{x} \leadsto \frac{dy}{dx} = \frac{4-x^2}{x}$$

$$\leadsto dy = \frac{4-x^2}{x} dx \leadsto dy = \left(\frac{4}{x} - x\right) dx \xrightarrow{\text{انٹیگرل}}$$

$$y = 4 \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$4) y' = \sqrt{1+x+y+xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1+x)(1+y)} \leadsto \frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x} \sqrt{1+y} \leadsto$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y}} = \sqrt{1+x} dx \leadsto (1+y)^{-\frac{1}{2}} dy = (1+x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\xrightarrow{\text{انٹیگرل}} 2(1+y)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} + C$$

۱۳

$$5) ny' + y^2 = 4 \leadsto ny' = 4 - y^2 \leadsto \text{divide } n \frac{dy}{dn} = 4 - y^2$$

$$\frac{dy}{4 - y^2} = \frac{dn}{n} \leadsto \int \frac{dy}{(2-y)(2+y)} = \int \frac{dn}{n} \leadsto$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{4}}{2-y} + \frac{\frac{1}{4}}{2+y} \right) dy = \int \frac{dn}{n} \leadsto -\frac{1}{4} \ln(2-y) + \frac{1}{4} \ln(2+y) =$$

$$\ln x + \ln c \leadsto \ln(2-y)^{-\frac{1}{4}} + \ln(2+y)^{\frac{1}{4}} = \ln ne$$

$$\ln(2-y)^{-\frac{1}{4}} (2+y)^{\frac{1}{4}} = \ln cn \leadsto \sqrt[4]{\frac{2+y}{2-y}} = cn$$

$$\leadsto \frac{2+y}{2-y} = c' x^4$$

$$\text{برای } \int \frac{dy}{(2-y)(2+y)} = ?$$

$$\frac{A}{2-y} + \frac{B}{2+y} = \frac{1}{(2-y)(2+y)} \Rightarrow 2A + Ay + 2B - By = 1$$

$$\Rightarrow (A-B)y + 2A + 2B = 1 \leadsto \begin{matrix} A=B \\ 4A=1 \end{matrix} \leadsto A=B=\frac{1}{4}$$

تمرین : مسائل زیر را حل کنید

$$1) (y+1)dx - \tan y dy = 0$$

$$2) (1+x^3)dy - x^2 y dx = 0$$

$$3) (4x + xy^2)dx + (y + x^2 y)dy = 0$$

$$4) y' = e^{3x-2y} + x^2 e^{-2y}$$

$$5) y' = \frac{y \ln y}{x}$$

$$6) y' = y$$

$$7) y' = x$$

$$8) y \ln y dx + (1 + x^2) dy = 0$$

$$9) e^x dy + y e^x dx + x^2 dy + 2xy dx = 0 \quad y(0) = 1$$

~~10)~~

نشان دهیم: مقدار $f(x, y)$ همواره
 تابع $f(x, y)$ از درجه n است.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

مثال $f(x, y) = x^2 + y^2$ هم از درجه 2 است

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2) = \lambda^2 f(x, y) \quad \checkmark$$

مثال $f(x, y) = xy^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) + x^3 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ هم از درجه 3 است

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)(\lambda y)^2 \ln\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) + (\lambda x)^3 \sin\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) \\ &= \lambda^3 xy^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \lambda^3 x^3 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \lambda^3 \left(xy^2 \ln\frac{y}{x} + x^3 \sin\frac{x}{y} \right) = \lambda^3 f(x, y) \quad \checkmark \end{aligned}$$

در واقع برای اینکه یک تابع هم از درجه تمام چند جمله‌ای که آن از درجه یک باشد باشد.

معماریه اینست: $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ از هم یکدست گردد، M, N نتایج هم از درجه یک است.

در حالتی که $f(x, y)$ در زمان هم است که $f(x, y)$ هم از درجه یک است.

مثال

$$(x^2 + y^2) dx + (2xy) dy = 0$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 درجه 2 درجه 2
 توان 1 + توان 1 = 2
 درجه

معادله برائین جهت درجه 2

چون هم x^2 و y^2 درجه 2 و هم $2xy$ درجه 2 است
 معادله برائین جهت درجه 2 است.

$$(x^2 + y) dx + 2xy dy = 0$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 درجه 2 درجه 1
 درجه 2

جهت 2

$$\frac{(x^2 + y^2)}{2} dx + \frac{2x^2 y}{3} dy = 0$$

درجه 3

جهت 2

$$\frac{x}{1} \sin\left(\frac{y}{x}\right) y' = \frac{y}{1} \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{1}$$

جهت درجه 1

$$\left(y + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1} \right) dx - x dy = 0$$

$$\sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \sqrt{\lambda^2 (x^2 + y^2)} = \lambda \sqrt{x^2 + y^2} = \lambda f(x, y)$$

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{0}{-}$$

درجه 1

۱۴

$$y' = \frac{-3x^2y + y^3}{x^3 + 3xy^2}$$

این معادله از رده همگونی است.

حل معادله از این روش:

برای حل این نوع معادله از تغییر متغیر $y = vx$ استفاده می‌کنیم در این صورت

$$y' = v + xv' \quad \text{I} \quad dy = v dx + x dv \quad \text{II} \quad \text{با جایگزینی I و II در معادله اصلی}$$

به یک معادله جدایی پذیر می‌رسیم و آنرا حل می‌کنیم.

$$(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0 \quad y(1) = -1$$

$$y = vx \rightarrow (x^2 + x^2v^2) dx + 2x(xv)(v dx + x dv) = 0$$

$$\Rightarrow x^2(1+v^2) dx + 2x^3v(v dx + x dv) = 0$$

$$\Rightarrow x^2(1+v^2) dx + 2x^3v^2 dx + 2x^4v dv = 0$$

$$\Rightarrow x^2(1+3v^2) dx + 2x^4v dv = 0$$

$$\Rightarrow (1+3v^2) dx + 2xv dv = 0$$

$$\Rightarrow (1+3v^2) dx = -2xv dv$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-2v dv}{1+3v^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{-2v dv}{1+3v^2}$$

$$\Rightarrow \ln|x| = -\frac{1}{3} \ln|1+3v^2| + \ln C$$

$$\Rightarrow 3 \ln|x| = \ln \frac{C}{1+3v^2} \Rightarrow \ln|x^3| = \ln \left| \frac{C}{1+3v^2} \right|$$

$$\Rightarrow x^3(1+3v^2) = C \Rightarrow x^3(1+3\frac{y^2}{x^2}) = C \Rightarrow x^3 + 3xy^2 = C$$

۱۱

$$\Rightarrow 1 + 3(1)(-1)^2 = C \Rightarrow \underline{C = 4}$$

$$y(1) = -1$$

$$\Rightarrow \underline{x^3 + 3xy^2 = 4}$$

جواب - حفره ها

سؤال: معادله را حل کنید.

$$x \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) y' = y \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x$$

$$y = vx, \quad y' = v + v'x$$

$$x \cdot \sin\left(\frac{vx}{x}\right) (v + v'x) = vx \sin\left(\frac{vx}{x}\right) + x \Rightarrow$$

$$x \sin v (v + v'x) = vx \sin v + x \Rightarrow$$

$$xv \sin v + x^2 v' \sin v = vx \sin v + x \Rightarrow$$

$$x^2 v' \sin v = x \Rightarrow x v' \sin v = 1 \Rightarrow$$

$$x \frac{dv}{dx} \sin v = 1 \Rightarrow \sin v dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \sin v dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\cos v = \ln x + C$$

$$\Rightarrow \underline{-\cos \frac{y}{x} = \ln x + C}$$

سؤال: معادله را حل کنید.

$$y' = \frac{y+x}{y-x}$$

$$y = vx \Rightarrow y' = v + v'x$$

$$v + v'x = \frac{vx+x}{vx-x} \Rightarrow v + v'x = \frac{v+1}{v-1} \Rightarrow v'x = \frac{v+1}{v-1} - v$$

$$\Rightarrow v'x = \frac{v+1-v^2+v}{v-1} \Rightarrow v'x = \frac{-v^2+2v+1}{v-1} \Rightarrow \frac{dv}{dx} x = \frac{-v^2+2v+1}{v-1}$$

$$\Rightarrow \frac{v-1}{-v^2+2v+1} dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{v-1}{-v^2+2v+1} dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$-v^2 + 2v + 1 = 4 \xrightarrow{\text{عوض}} (-2v + 2) dv = du \Rightarrow -2(v-1)dv = du$$

$$(v-1)dv = \frac{du}{-2}$$

$$\int \frac{v-1}{-v^2+2v+1} dv = \int \frac{du}{n} \Rightarrow \int \frac{dv}{-2u} = \int \frac{dn}{n} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \ln u = \ln n + \ln c \Rightarrow \ln u^{-\frac{1}{2}} = \ln cn \Rightarrow$$

$$u^{-\frac{1}{2}} = cn \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-v^2+2v+1}} = cn \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{-\frac{y^2}{n^2} + \frac{2y}{n} + 1}} = cn$$

با استفاده از تغییر متغیر $y = z^\alpha$ معادله را به یک معادله همبند تبدیل کرده و آنرا حل کنید.

$$(y^4 - 3n^2)dy + nydn = 0$$

$$y = z^\alpha \rightarrow y' = \alpha z' z^{\alpha-1}$$

$$(z^{4\alpha} - 3n^2)(\alpha z^{\alpha-1} dz) + n z^\alpha dn = 0 \quad \text{و} \quad dy = \alpha z^{\alpha-1} dz$$

$$\Rightarrow (\alpha z^{5\alpha-1} - 3\alpha n^2 z^{\alpha-1}) dz + n z^\alpha dn = 0 \quad (*)$$

برای همبند بودن باید M, N درجه یکسانی داشته باشند.

$$5\alpha - 1 = \alpha + 1 \Rightarrow 4\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

پس با جایگزینی $\alpha = \frac{1}{2}$ داریم:

$$\left(\frac{1}{2} z^{\frac{5}{2}-1} - 3 \frac{1}{2} n^2 z^{\frac{1}{2}-1}\right) dz + n z^{\frac{1}{2}} dn = 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} (z^{\frac{3}{2}} - 3n^2 z^{-\frac{1}{2}}) dz + 2nz^{\frac{1}{2}} dn = 0$$

$$\xrightarrow{\times z^{\frac{1}{2}}} (z^2 - 3n^2) dz + 2nz dn = 0 \quad (*)$$

$$z = nv \rightarrow dz = vdn + ndv$$

$$((nv)^2 - 3n^2)(vdn + ndv) + 2n^2v dn = 0$$

$$\Rightarrow (n^2v^3 - 3n^2v)dn + (n^3v^2 - 3n^3)dv + 2n^2v dn = 0$$

$$\Rightarrow (n^2v^3 - n^2v)dn + (n^3v^2 - 3n^3)dv = 0 \Rightarrow$$

$$n^2(v^3 - v)dn + n^3(v^2 - 3)dv = 0 \Rightarrow$$

$$(v^3 - v)dn + n(v^2 - 3)dv = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{n}dn = \frac{v^2 - 3}{-v + v^3} dv \Rightarrow$$

$$\int -\frac{1}{n}dn = \int \frac{v^2 - 3}{v^3 - v} dv \Rightarrow$$

$$-\int \frac{1}{n}dn = \int \left(\frac{3}{v} - \frac{2v}{v^2 - 1} \right) dv \Rightarrow -\ln n = 3\ln v - \ln(v^2 - 1) +$$

$$\Rightarrow \ln \frac{1}{n} = \ln \left(\frac{cv^3}{v^2 - 1} \right) \Rightarrow v^2 - 1 = cnv^3 \Rightarrow v = \frac{z}{n}$$

$$\left(\frac{z}{n} \right)^2 - 1 = cn \left(\frac{z}{n} \right)^3 \Rightarrow \frac{z^2 - n^2}{n^2} = \frac{cz^3}{n^2} \Rightarrow$$

$$z^2 - n^2 = cz^3$$

1)

$$\int \frac{v^2-3}{\underbrace{v^3-v}_{v(v^2-1)}} dv \stackrel{?}{=} \int \left(\frac{3}{v} - \frac{2v}{v^2-1} \right) dv$$

$$\frac{A}{v} + \frac{Bv+C}{v^2-1} = \frac{v^2-3}{v(v^2-1)} \Rightarrow Av^2 - A + Bv^2 + Cv = v^2 - 3$$

$$\Rightarrow (A+B)v^2 + Cv - A = v^2 - 3$$

$$\Rightarrow A+B=1, \quad C=0, \quad \underline{A=3} \Rightarrow \underline{B=-2}$$

$$\int \frac{v^2-3}{v^3-v} dv = \int \left(\frac{3}{v} + \frac{-2v}{v^2-1} \right) dv$$