بسم الله الرحمن الرحیم

تعریف معادله دیفرانسیل: فرض کنید F تابعی $n+2$ متغیره باشد در این صورت معادله‌ای به فرم $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ را یک معادله دیفرانسیل مرتبه n گویند که رابطه بین متغیر مستقل x و متغیر وابسته y و مشتقات آن یعنی $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ را بیان می‌کند.

مثال:

۱- معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' + 3y = 0$، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با متغیر مستقل x و وابسته y است.

۲- $\frac{dv}{dt} + t.v = v^3$. معادله دیفرانسیل مرتبه اول با متغیر مستقل t و وابسته v است.

۳- $(y^{(3)})^2 + (y'')^5 + (\sin x) y = \cos x$، معادله دیفرانسیل مرتبه سوم با متغیر مستقل x و وابسته y است.

تعریف درجه: به بزرگترین توان مرتبه یک معادله دیفرانسیل، درجه آن معادله گویند.

$\sin y' + 2y = 0$. معادله دیفرانسیل مرتبه اول که درجه ندارد.

$y'' - 2y' + 3y = 0$: درجه $\underline{1}$ ، $y^{(3)} + (y'')^2 = x$: مرتبه $\underline{3}$، درجه $\underline{1}$

$\frac{dv}{dt} + t.v = v^3$: درجه $\underline{1}$ ، $(y')^3 + y^4 = x^5$: مرتبه اول، درجه سوم

$(y^{(3)})^2 + (y'')^5 + (\sin x) y = \cos x$. دارای درجه $\underline{2}$ می‌باشد

جواب یک معادله دیفرانسیل :

تابع $y=\varphi(x)$ که در آن $\alpha<x<\beta$ ، را یک جواب

معادله دیفرانسیل $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$ گویند هرگاه

$\varphi'(x),\varphi''(x),\dots,\varphi^{(n)}(x)$ موجود باشند و داشته باشیم :

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\dots,\varphi^{(n)}(x))=0$$

مثال :

$y=\sin x$ ، جوابی از معادله $y'=\cos x$ است .

$y=e^{2x}+e^{3x}$ ، جوابی از معادله $y''-5y'+6y=0$ است .

جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل :

جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه n ، $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$

جوابی است که شامل n ثابت دلخواه باشد و به ازای هر مقداری

از این ثابت‌ها در معادله دیفرانسیل صدق کند .

جواب عمومی معادله فوق یا به فرم صریح $y=\varphi(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$

یا به فرم ضمنی $g(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0$ می باشد.

مثال :

$y_g=c+\sin x$ ، جواب عمومی معادله $y'=\cos x$ است .

* جواب عمومی را با y_g نشان می دهیم.

جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل :

اگر در جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل به c_i ها $\forall i=1,\dots,n$ مقادیر دلخواهی نسبت دهیم به یک جواب خصوصی می‌رسیم. جواب خصوصی را با y_s نشان می‌دهیم.

مثال :

معادله دیفرانسیل $y''-5y'+6y=0$ را در نظر بگیرید.

$y_g=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ جواب عمومی معادله می‌باشد و $y_s=3e^{3x}$ یک جواب خصوصی می‌باشد. همچنین $y_s=5e^{2x}-3e^{3x}$ و $y_s=e^{2x}$ و ... جواب‌های خصوصی هستند.

جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل :

جوابی است که از جواب عمومی حاصل نشود.

مثال :

معادله دیفرانسیل $y'=2\sqrt{y}$ دارای جواب عمومی $y_g=(x+c)^2$ است اما این معادله دارای جواب غیرعادی $y=0$ نیز می‌باشد که از جواب عمومی بدست نمی‌آید.

روش بدست آوردن جواب غیرعادی :

کافیست در جواب عمومی نسبت به ثابت c مشتق بگیریم و سعی کنیم c را برحسب x پیدا کرده و در جواب عمومی قرار دهیم.

مثال:

در مثال قبلی در جواب عمومی $y=(x+c)^2$ نسبت به c مشتق می‌گیریم

$$y=(x+c)^2 \xrightarrow[c]{\text{مشتق نسبت به}} 0=2(x+c) \longrightarrow c=-x$$

حال با جایگذاری $c=-x$ در جواب عمومی $y=(x+c)^2$ داریم

$$y=(x+c)^2=(x+(-x))^2=0 \longrightarrow \boxed{y=0}$$

جواب غیرعادی

مثال: اگر $(x-c)^2+y^2=4$ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل باشد جواب غیرعادی آن را بیابید:

$$(x-c)^2+y^2=4 \xrightarrow[c]{\text{مشتق نسبت به}} -2(x-c)+0=0 \longrightarrow c=x$$

$$(x-c)^2+y^2=4 \xrightarrow[c=x]{} (x-x)^2+y^2=4 \longrightarrow y=\pm 2$$

جواب غیرعادی

خانواده منحنی ها:

دسته منحنی $g(x,y,c)=0$ (I) را در نظر بگیرید. اگر از این رابطه نسبت به x مشتق بگیریم داریم:

$$\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

$$\longrightarrow g_x+g_y\cdot y'=0 \quad (II)$$

حال اگر از روابط (I) و (II) بتوانیم ثابت c را حذف کنیم به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول مربوط به دسته منحنی $g(x,y,c)=0$ می رسیم که آنرا با $F(x,y,y')=0$ نشان می دهیم.

مثال: معادله دیفرانسیل $y=cx^2$ را بیابید.

$$y=cx^2 \xrightarrow[x \text{ به}]{\text{مشتق نسبت}} y'=2cx$$

حال با کمک y و y'، ثابت c را حذف می کنیم

$$\frac{y}{y'}=\frac{cx^2}{2cx} \rightarrow \boxed{y'=\frac{2y}{x}}$$ معادله دیفرانسیل متناظر

مثال، معادله دیفرانسیل $y=\cos(cx)$ را بیابید.

$$y=\cos(cx) \xrightarrow[x \text{ نسبت به}]{\text{مشتق}} y'=-c\sin(cx)=-c\sqrt{1-\cos^2(cx)}=$$

$$-c\sqrt{1-y^2} \longrightarrow y'=-c\sqrt{1-y^2} \longrightarrow c=\frac{-y'}{\sqrt{1-y^2}} \quad *$$

حال با جایگذاری * در $y=\cos(cx)$ داریم

$$y=\cos\left(\frac{-y'}{\sqrt{1-y^2}}\cdot x\right)$$

مثال:

معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ را بیابید.

چون این دسته منحنی دو ثابت c_1 و c_2 دارد پس دوبار مشتق می‌گیریم.

$$\left.\begin{array}{l} y=c_1\sin x+c_2\cos x \\ y'=c_1\cos x-c_2\sin x \\ y''=-c_1\sin x-c_2\cos x \end{array}\right\} \rightarrow y''=-y \rightarrow \boxed{y''+y=0}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲

* معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت‌های $c_1, c_2, \dots, c_n$ در دسته منحنی

$y=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n$ به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \cdots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & \cdots & y_1^{(n)} \\ \vdots & & & & \\ y_n & y_n' & y_n'' & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

مثال بالایی را می‌توان با کمک این روش حل کرد.

$y=c_1\sin x+c_2\cos x$

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ \sin x & \cos x & -\sin x \\ \cos x & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix}=0 \rightarrow$$

$$y(-\cos^2 x-\sin^2 x)-y'(-\sin x\cos x+\sin x\cos x)+y''(-\sin^2 x-\cos^2 x)=0$$

$$\rightarrow -y-y''=0 \rightarrow \boxed{y+y''=0}$$

۷

مثال : معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y=ax^2+be^{-x}$ را بیابید .

روش اول :

$y=ax^2+be^{-x}$ (I)

$y'=2ax-be^{-x}$ (II)

$y''=2a+be^{-x} \longrightarrow be^{-x}=y''-2a$ (*)

حال با جایگذاری * در (II) $y'=2ax-be^{-x}$ داریم :

$y'=2ax-y''+2a \rightarrow y'=-y''+2a(x+1) \longrightarrow$

$a=\dfrac{y'+y''}{2(x+1)}$ (**)

حال با جایگذاری * و ** در (I) داریم

$y=ax^2+be^{-x} \rightarrow y=\dfrac{y'+y''}{2(x+1)}x^2+y''-2\dfrac{y'+y''}{2(x+1)}$

$\Rightarrow 2(x+1)y=(x^2+2x)y''+(x^2-2)y' \longrightarrow$

$(x^2+2x)y''+(x^2-2)y'-2(x+1)y=0$

روش دوم :

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x^2 & 2x & 2 \\ e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{vmatrix}=0 \longrightarrow$$

$y(2xe^{-x}+2e^{-x})-y'(x^2e^{-x}-2e^{-x})+y''(-x^2e^{-x}-2xe^{-x})=0$

$\Rightarrow (x^2+2x)y''+(x^2-2)y'-2(x+1)y=0$

✓

مثال: معادله دیفرانسیل تمام دوایر در صفحه که مرکز آن ها روی محور x ها قرار دارد را بیابید.

معادله دایره در حالت کلی: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

معادله دایره به مرکز (a,b) و شعاع r

در این مثال چون گفته شده که مرکز آنها روی محور x ها است پس داریم

$$(x-a)^2+(y-0)^2=r^2$$

یعنی $b=0$

دارای ۲ ثابت a, r است پس دو بار مشتق می‌گیریم (نسبت به x)

مشتق اول: $2(x-a)+2yy'=0$

مشتق دوم: $2+2y'^2+2yy''=0$