① ریاضی فیزیک (۱) به نام خدا جلسه اول (۷/۱۴)

مقدمه:

می دانیم در فیزیک هر چیزی که قابل اندازه گیری باشد کمیت فیزیکی نام دارد

و به دو دسته اسکالر و برداری تقسیم می کنیم ولی بعداً خواهیم دید که

کمیت های فیزیکی شامل دو دسته می شوند

- تانسوری
  - اسکالر
  - بردار
  - ماتریسی
- اسپینوری

برای همین مرحله است که در مورد بعضی از کمیت های فیزیکی ما نمی توانستیم قبلاً نظر بدهیم مثل: زاویه

مروری بر کمیت های برداری:

تعریف اولیه: علاوه بر مقدار دارای جهت نیز هست.

هر بردار برحسب بردارهای یکه بیان می شود

در کارتزین (گوشه دار) محورها x و y و z اند که

بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ ، $\hat{k}$ می باشند

$$\hat{i} = \frac{\vec{ox}}{|\vec{ox}|} \quad , \quad \hat{j} = \frac{\vec{oy}}{|\vec{oy}|} \quad , \quad \hat{k} = \frac{\vec{oz}}{|\vec{oz}|}$$

ضمناً

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

گاهی اوقات بردارهای یکه به صورت زیر نمایش داده می شوند.

$\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$

در فضای دکارتی $\hat{e}_1 = \hat{i}$, $\hat{e}_2 = \hat{j}$, $\hat{e}_3 = \hat{k}$

و بردار دلخواهی مثل $\vec{A}$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\hat{e}_i$$

و

$$|\vec{A}| = \sqrt{|A_1|^2+|A_2|^2+|A_3|^2} \longrightarrow |\vec{A}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}|A_i|^2}$$

نمایش یک بردار در مختصات کروی برحسب بردارهای یکه کروی است که عبارتند از $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ و $\hat{e}_\varphi$

و در مختصات استوانه‌ای این بردارهای یکه عبارتند از $\hat{e}_\rho$ و $\hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_z = \hat{k}$

که جلوتر در مورد آنها بحث خواهیم کرد.

ضرب بردارها:

برای دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ کمیتی به نام $\vec{A}\vec{B}$ اصلاً

وجود ندارد.

سپس بردارها به دو صورت در هم ضرب می‌شوند. یا بهتر است بگوییم برای بردارها دو تا ضرب تعریف می‌کنیم

① ضرب داخلی (dot product) or (inner product)

که حاصل یک عدد است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha \quad \text{که} \quad \alpha = \widehat{(\vec{A},\vec{B})}$$

سپس برای بردارهای یکه

$$\hat{e}_1\cdot\hat{e}_1 = \hat{e}_2\cdot\hat{e}_2 = \hat{e}_3\cdot\hat{e}_3 = 1$$

$$\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2 = |\hat{e}_1||\hat{e}_2|\cos 90^\circ = 0$$

در حالت کلی

$$\boxed{\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \delta_{ij}} \quad \text{که} \quad \delta_{ij} = \text{kroneker function}$$

تابع کرونکر

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \qquad \boxed{i,j = 1,2,3}$$

و همین طور برای دو بردار

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \hat{e}_i$$

$$\vec{B} = \sum_{j=1}^{3} B_j \hat{e}_j$$

$$\longrightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_{i,j} A_i B_j \delta_{ij}$$

یعنی

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \Big\{ A_1B_1 + \underset{0}{\cancel{A_1B_2}} + \cdots + A_2B_2 + A_3B_3$$

مفهوم ضرب داخلی:

۱

$|\vec{B}|\cos\alpha$

پس ضرب داخلی: عبارت است

از تصویر یک بردار بر روی بردار دیگر

برای همین هم هست که میگوییم $\hat{i}\cdot\hat{j}=0$ است چون هم تصویر

روی هم ندارند.

⑤

(Cross product) ضرب خارجی

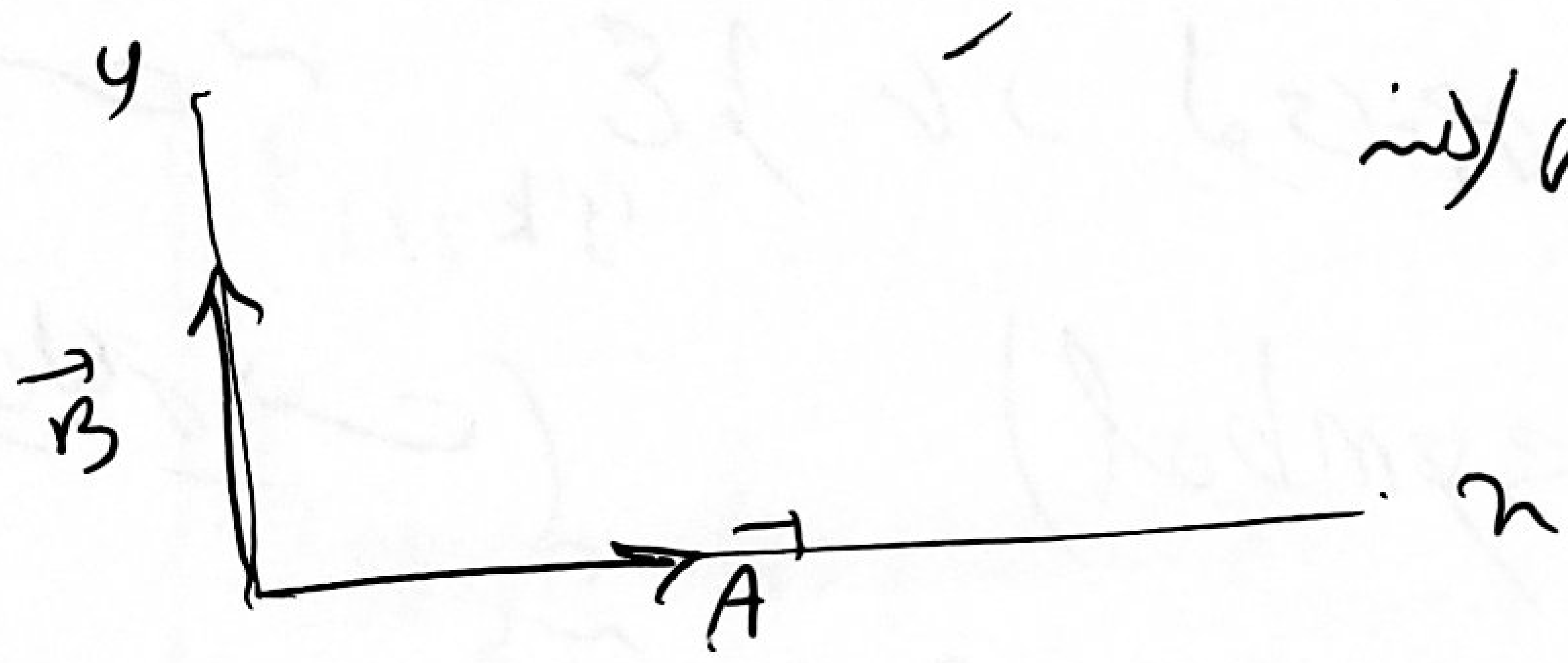
اندازه‌ی ضرب خارجی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha$$ که $\alpha = (\widehat{\vec{A},\vec{B}})$

و اگر

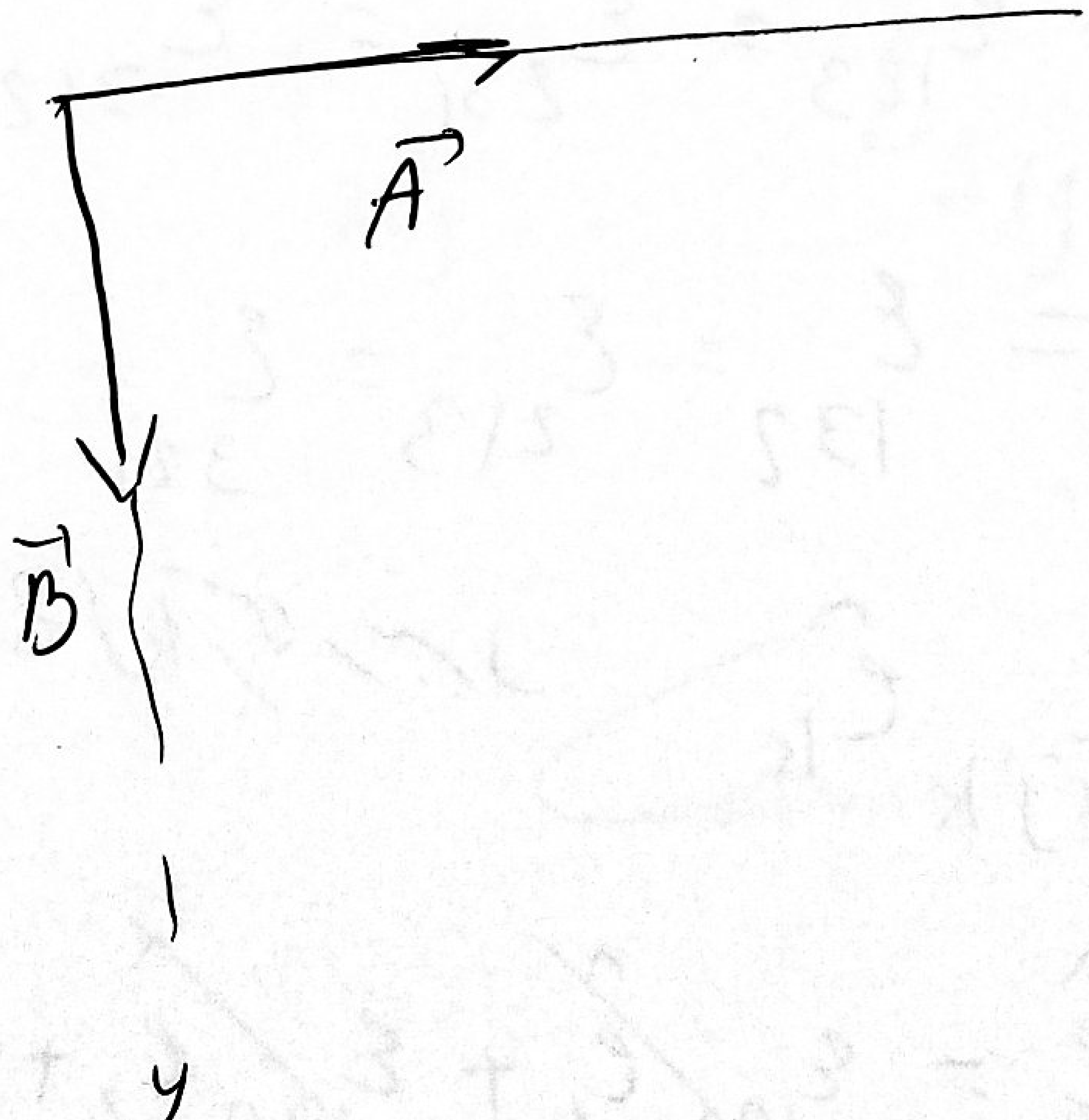
$$\begin{cases}\vec{C}\perp\vec{A}\\ \vec{C}\perp\vec{B}\end{cases} \Leftarrow \vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$$

اگر $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ باشد در این صورت $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ تشکیل دستگاه راستگرد را می‌دهند



$\vec{C}$: در جهت محور z

$\vec{C}$ در جهت $-z$ است.



⑥

بنابراین برای بردارهای یکه

$$\begin{cases} \hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0 \\ \begin{cases}\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\\ \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}\end{cases} \quad \begin{cases}\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\\ \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}\end{cases} \quad \begin{cases}\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}\\ \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}\end{cases} \end{cases}$$

و در حالت عام

$$\hat{e}_i\times\hat{e}_j=\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_k$$

است که ε_{ijk} را نماد لوی-چیویتا می‌نامیم.

(Levi-Civita symbol) (اپسیلون است)

اگر دو عضو یا بیشتر مساوی باشند صفر

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases} 0\ ;\ \varepsilon_{111}=\varepsilon_{122}=\varepsilon_{133}=\varepsilon_{311}=0 \\ +1=\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312} \\ -1=\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321} \end{cases}$$

چرخش +

چرخش منفی

$$\hat{e}_i\times\hat{e}_j=\varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_k$$

به عنوان مثال [illegible]

$$\hat{e}_1\times\hat{e}_2=\sum_k\varepsilon_{12k}\,\hat{e}_k=\underset{0}{\cancel{\varepsilon_{121}\hat{e}_1}}+\underset{0}{\cancel{\varepsilon_{122}\hat{e}_2}}+\varepsilon_{123}\,\hat{e}_3$$

$$=+\hat{e}_k$$

سوال: در فضای سه بعدی تاج دلتای کرونکر را به صورت یک ماتریس نمایش دهید:

سطر
ستون

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سوال: ε_{1ij} را به صورت یک ماتریس نمایش دهید.

$$\varepsilon_{1ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} & \varepsilon_{112} & \varepsilon_{113} \\ \varepsilon_{121} & \varepsilon_{122} & \varepsilon_{123} \\ \varepsilon_{131} & \varepsilon_{132} & \varepsilon_{133} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

تمرین: ماتریس ε_{2ij} ، ε_{3ij} ، ε_{ijk}

را نمایش دهید.

برای ضرب خارجی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ تعریف زیر را داریم:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}A_iB_j\hat{e}_k$$

$$=\varepsilon_{111}A_1B_1\hat{e}_1+\varepsilon_{112}A_1B_1e_2+\varepsilon_{113}A_1B_1\hat{e}_3$$

$$+\varepsilon_{121}A_1B_2\hat{e}_1+\varepsilon_{122}A_1B_2\hat{e}_2+\varepsilon_{128}A_1B_2\hat{e}_3$$

$$+\varepsilon_{131}A_1B_3\hat{e}_1+\varepsilon_{132}A_1B_3\hat{e}_2+\varepsilon_{133}A_1B_3\hat{e}_3$$

$$+\varepsilon_{211}A_2B_1\hat{e}_1+\varepsilon_{212}A_2B_2\hat{e}_2+\varepsilon_{213}A_2B_1\hat{e}_3$$

$$+\varepsilon_{221}A_2B_2\hat{e}_1+\varepsilon_{222}A_2B_2\hat{e}_2+\varepsilon_{223}A_2B_2\hat{e}_3$$

$$+\varepsilon_{231}A_2B_3\hat{e}_1+\varepsilon_{232}A_2B_2\hat{e}_2+\varepsilon_{233}A_2B_3\hat{e}_3$$

$$+\varepsilon_{311}A_3B_1\hat{e}_1+\varepsilon_{312}A_3B_1\hat{e}_2+\varepsilon_{313}A_3B_1\hat{e}_3$$

$$+\varepsilon_{321}A_3B_2\hat{e}_1+\varepsilon_{322}A_3B_2\hat{e}_2+\varepsilon_{323}A_3B_2\hat{e}_3$$

$$+\varepsilon_{331}A_3B_3\hat{e}_1+\varepsilon_{332}A_3B_3\hat{e}_2+\varepsilon_{333}A_3B_3\hat{e}_3$$

که با حاصل زیر یکی است.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1(A_2B_3 - B_2A_3) \\ +\hat{e}_2(A_3B_1 - A_1B_3) \\ +\hat{e}_3(A_1B_2 - B_1A_2) \end{array} \right.$$

قاعده جمع انیشتین (Einstein notation)

اگر جایی اندیس تکراری شده بود علامت جمع را برداریم و جمع روی عنصر تکراری می‌سازیم

مثال: حاصل

که برابر است

i تکرار شده

$$y = \sum_{i=1}^{3} c_i x^i = c_i x^i$$

$$= c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

⑮

i توان نیست (اندیس است)

سئوال: حاصل $x_i x^i$ ($i=1 \dots 4$) کدام است

i اندیس تکراری است

$$x_i x^i = x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 + x_4 x^4$$

موفق باشید

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases} \qquad \begin{aligned} x^1 &= -x \\ x^2 &= -y \\ x^3 &= -z \end{aligned}$$