مبحث معادله همگن :

$$\begin{cases} y = xz \\ y' = xz' + z \\ dy = z\,dx + x\,dz \end{cases}$$

مثال . $y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$ همگن از درجه یک

$$y = xz \longrightarrow y' = z + xz' = \frac{xz + \sqrt{x^2 - x^2 z^2}}{x}$$

$$\cancel{z} + xz' = \cancel{z} + \sqrt{1 - z^2}$$

$$x \frac{dz}{dx} = \sqrt{1 - z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \sin^{-1} z = \ln x + \ln c$$

$$= \ln xc$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} \frac{y}{x} = \ln xc$$

معادلات به فرم $y' = f\left(\dfrac{a_0x+b_0y+c_0}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ را در نظر بگیرید

حالت اول $\det\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_0b_1 - a_1b_0 = 0$

دو خط موازی باشند

تغییر متغیر $\boxed{a_0x + b_0y = z}$ مشتق بگیریم $\to$ $a_0 + b_0y' = z'$

$\to \boxed{y' = \dfrac{z' - a_0}{b_0}}$ $\Rightarrow$ معادله جدا پذیر می‌شود

مثال $y' = \dfrac{x - 3y + 3}{2x - 6y + 1}$

$\det\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$ $\quad x - 3y = z$

$1 - 3y' = z' \to y' = \dfrac{z' - 1}{-3}$

$\Rightarrow \dfrac{z+3}{2z+1} = \dfrac{z'-1}{-3}$

$\Rightarrow z' = -\dfrac{3z+9}{2z+1} + 1 = \dfrac{-z-8}{2z+1}$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{-z-8}{2z+1} \Rightarrow -\dfrac{2z+1}{z+8}dz = dx$

$\Rightarrow \int \dfrac{-15}{z+8} + 2 \; dz = \int -dx$

$$\begin{array}{r|l} 2z+1 & z+8 \\ \hline -\;2z+16 & 2 \\ -15 & \end{array}$$

$-15\ln(z+8) + 2z = -x + c$

$z \to x - 3y \qquad z \to x - 3y$

حالت ب $\det\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$

محل تقاطع دو خط را پیدا می‌کنیم

$$\begin{cases} a_0 x + b_0 y + c_0 = 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \to y' = Y'$$

$\Downarrow$

معادله همگن می‌شود حل می‌کنیم

مثال $(y+2)\,dx = (x+y-1)\,dy$

$$\Rightarrow y' = \frac{y+2}{x+y-1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\begin{cases} y+2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} y_0 = -2 \\ x_0 = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = X+3 \\ y = Y-2 \end{cases}$$

$$Y' = \frac{Y \cancel{-2} \cancel{+2}}{X \cancel{+3} + Y \cancel{-2} \cancel{-1}} = \frac{Y}{X+Y}$$ همگن

$$Y = XZ \longrightarrow Y' = Z + XZ' = \frac{XZ}{X+XZ} = \frac{Z}{1+Z}$$

$$\longrightarrow X\frac{dZ}{dX} = \frac{-Z^2}{1+Z} \Rightarrow \int \frac{1+Z}{-Z^2}\,dZ = \int \frac{dX}{X}$$

$$= \int \frac{1}{-Z^2} + \frac{1}{Z}\,dZ = \ln X + C$$

$$\frac{1}{z} - \ln z = \ln x + c$$

$$\frac{x-3}{y+2} - \ln\frac{y+2}{x-3} = \ln(x-3) + c$$

$$y' = \frac{2x - 5y + 3}{3x + 4y - 6}$$

$$\begin{cases} X+1 = x \\ Y+1 = y \end{cases} \Longrightarrow y' = \frac{2X - 5Y}{2X + 4Y} \longrightarrow \begin{cases} y = xz \\ y' = z + z'x \end{cases}$$

معادلات کامل

$$f(x,y) \longrightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

$$\longrightarrow \frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

تعریف معادلات $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ یک معادله کامل می باشد اگر

$$M_y = N_x$$

یا

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

مثال $\underbrace{\left(\frac{y}{x} + 4x\right)}_{M} dx + \underbrace{(\ln x - 2)}_{N} dy = 0$

$$M_y = \frac{1}{x} = N_x = \frac{1}{x}$$

مثال (1) $y e^x\,dx + (e^x + 2y)\,dy = 0$ کامل

$$M_y = e^x = N_x = e^x$$

حل معادلات کامل

$$F(x,y) = \int M \, dx$$

$$g(x,y) = \int N \, dy$$

جواب معادله دیفرانسیل = جملات غیر مشترک + جملات مشترک (یکبار) $+ C$

حل

$$(\underbrace{y^2 e^{xy^2} + 4x^3}_{M})dx + (\underbrace{2xy e^{xy^2} - 3y^2}_{N})dy = 0$$

$$M_y = 2y e^{xy^2} + y^2(2xy) e^{xy^2}$$

کامل هستند

$$N_x = 2y e^{xy^2} - 2xy^2 y e^{xy^2}$$

$$\int y^2 e^{xy^2} + 4x^3 \, dx = e^{xy^2} + x^4$$

$$\int 2xy e^{xy^2} - 3y^2 \, dy = e^{xy^2} - y^3$$

$$\boxed{f(x,y) = e^{xy^2} + x^4 - y^3 + C}$$

حل $(2xy - \underbrace{\tan y}_{M})dx + (x^2 - \underbrace{x\sec^2 y}_{N})dy = 0$

$M_y = 2x - \sec^2 y$

$N_x = 2x - \sec^2 y$

$\int 2xy - \tan y \, dx = x^2 y - x\tan y$

$\int x^2 - x\sec^2 y \, dy = x^2 y - x\tan y$

جواب $f(x,y) = x^2 y - x\tan y + c$

عامل اینتگرال ساز:

تعریف: به تابعی که اگر در معادله دیفرانسیل که کامل نیست اعمال شود و معادله تبدیل به کامل شود را عامل انتگرال ساز گویند

مثال تابع $\boxed{\mu = \frac{1}{x^2}}$ یک عامل انتگرال ساز برای

$y\,dx - x\,dy = 0$ $\qquad M_y = 1 \neq -1 = N_x$

$\xrightarrow{\times\frac{1}{x^2}} \frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0 \qquad M_y = \frac{1}{x^2}, \quad N_x = \frac{1}{x^2}$

یا

$\xrightarrow{\times\frac{1}{xy}} \frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy = 0 \qquad \boxed{\mu = \frac{1}{xy}}$

$M_y = 0 = N_x$

معادله زیر عامل انتگرال ساز به صورت $M = x^{\alpha} y^{\beta}$ دارد، مقدار α و β را مشخص کنید

$$x(4y\,dx + 2x\,dy) + y^{3}(3y\,dx + 5x\,dy) = 0$$

$$\Rightarrow (4xy + 3y^{4})\,dx + (2x^{2} + 5xy^{3})\,dy = 0$$

$$\xrightarrow{x^{\alpha} y^{\beta}} (4x^{\alpha+1}y^{\beta+1} + 3x^{\alpha}y^{\beta+4})\,dx + (2x^{\alpha+2}y^{\beta} + 5x^{\alpha+1}y^{\beta+3})\,dy = 0$$

$$\Rightarrow M_y = 4(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta} + 3(4+\beta)x^{\alpha}y^{\beta+3}$$

$$N_x = 2(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} + 5(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+3}$$

$$M_y = N_x \Rightarrow \begin{cases} 4(\beta+1) = 2(\alpha+2) \\ 3(4+\beta) = 5(\alpha+1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 2} \quad \boxed{\beta = 1}$$

فرمول کلی عامل انتگرال ساز

$$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N Z_x - M Z_y} dz} \qquad Z = h(x,y)$$

$$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

عامل $\boxed{\text{تابع از } x}$ $\qquad Z = h(x)$

$Z_y = 0$

$Z_x = 1$

$$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$$

تابعی از y باشد $\leftarrow Z = h(y)$

مثال:

$$\underbrace{(1+3x\sin y)}_{M}dx - \underbrace{x^2\cos y}_{N}\, dy = 0$$

$$M_y = 3x\cos y$$

$$N_x = -2x\cos y$$

$$M_y - N_x = 5x\cos y$$

$$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{\int \frac{5\cancel{x}\cancel{\cos y}}{-x^2\cancel{\cos y}} dx} = e^{\int \frac{-5}{x} dx}$$

$$\mu = e^{-5\ln x} = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

$$(\sin y + \cos y)\,dx + \text{٢}x\cos y\,dy = 0$$

$$M_y = \cos y - \sin y$$

$$N_x = \text{٢}\cos y$$

$$M_y - N_x = -\cos y - \sin y = -(\cos y + \sin y)$$

$$e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M}\,dy} = e^{\int \frac{-\cancel{\cos y + \sin y}}{-\cancel{\sin y + \cos y}}\,dy}$$

$$= e^{\int + dy} = e^{+y}$$

$$\xrightarrow{\times e^y} (e^y \sin y + e^y \cos y)\,dx + \text{٢}x e^y \cos y\,dy$$

$$\int e^y \sin y + e^y \cos y\,dx = x e^y \sin y + x e^y \cos y$$

$$\int \text{٢}x e^y \cos y\,dy = x e^y \sin y + x e^y \cos y \qquad \Big|\ u = e^y \quad dv = \cos y$$

$$\text{ج} = x e^y \sin y + x e^y \cos y + C$$

یک عامل انتگرال ساز برحسب $z=xy^2$

برای معادله

$$\underbrace{(xy-2y^2)}_{M}dx+\underbrace{(3xy-x^2)}_{N}dy=0$$

$$M_y=x-4y \qquad N_x=3y-2x$$

$$z=xy^2 \longrightarrow z_x=y^2 \quad z_y=2xy$$

$$\frac{M_y-N_x}{Nz_x-Mz_y}=\frac{x-4y-3y+2x}{y^2(3xy-x^2)-2xy(xy-2y^2)}$$

$$=\frac{(3x-7y)}{xy^2(7y-3x)}$$

$$=-\frac{1}{xy^2}$$

$$\mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{Nz_x-Mz_y}dz}=e^{\int\frac{-1}{xy^2}dz}=e^{\int-\frac{1}{z}dz}$$

$$=e^{-\ln z}=\frac{1}{z}=\frac{1}{xy^2}$$