

تعریف معادله دفرانسیل: معادله ای که به ازای تابع y حداقل شامل یکی از مشتقات y باشد را معادله دفرانسیل می گویند

مثال $y' + xy = \sin x \quad \checkmark$

$xy = x^4 \quad \times$

$y'' + y' = 3 \quad \checkmark$

تعریف: بزرگترین مرتبه مشتق موجود = مرتبه معادله دفرانسیل

مثال $y'' + xy' = 3$ مرتبه ۲

$y''' + (y'')^4 = x$ مرتبه ۳

تعریف جواب معادله دفرانسیل: تابع $y = f(x)$ جواب معادله دفرانسیل می باشد در صورتیکه در معادله صدق کند

مثال آید $y = e^{2x}$ یک جواب خاص در دفرانسیل $y' = 2y$ است
 $y = e^{2x} \rightarrow y' = 2e^{2x} \quad \checkmark$

انواع جواب معادله:

$y' = f(x) \rightarrow y = \int f(x) dx + c$

جواب عمومی: جوابی که در آن حداقل یک پارامتر ثابت c وجود دارد

جواب خصوصی: جوابی که از جواب عمومی و با توجه به شرایط اولیه بدست می آید

جواب غیرمعمولی: جوابی از معادله که از جواب عمومی بدست نمی آید.

$$y'' = \sin x \rightarrow y' = \int \sin x dx = -\cos x + c_1$$

$$y = \int -\cos x dx + \int c_1 dx$$

$$y = -\sin x + c_1 x + c_2 \rightarrow \text{جواب عمومی}$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = 0 + 0 + c_2 \\ 2 = -1 + c_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{y = -\sin x + 3x + 1} \quad \text{حتمی}$$

روش بدست آوردن معادله دیفرانسیل از روی جواب عمومی

① تعداد پارامترهای ثابت جواب عمومی را مشخص کنید

② به تعداد پارامترها از جواب عمومی مشتق بگیرید

③ مشتق گیری به نحوی صورت گیرد که پارامتر حذف شوند

مثال $y = c_1 x + c_2 x^2 \rightarrow$ معادله دیفرانسیل؟

$= 2$ تعداد پارامتر

$$\begin{cases} y' = c_1 + 2c_2 x \\ y'' = 2c_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y' = c_1 + y'' x$$

$$\rightarrow \boxed{c_1 = y' - y'' x}$$

$$y = (y' - y'' x) x + y'' x = y' x \rightarrow \boxed{y = y' x}$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول $f(x, y, y') = 0$

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{حالا} \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

الف: معادله جدايي پذیر (تفکیک پذیر)

$$\text{اگر} \quad y' = h(x) g(y) \quad \underline{\quad} \quad \underbrace{f(x) dx}_{\text{مربوب } x} = \underbrace{g(y) dy}_{\text{مربوب } y}$$

$$\text{مثال} \quad y' = (1+x)(1+y) \quad \underline{\quad} \quad x^3 dx = \frac{1}{1+y} dy$$

روش حل: کافی است از طرفین معادله اینکامل گیری کنیم

$$\text{مثال} \quad y' = 2(x+1)y \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(x+1)y$$

$$\rightarrow \frac{dy}{y} = (2x+2) dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x+2 dx$$

$$\ln y = x^2 + 2x + C \rightarrow y = e^{x^2 + 2x + C}$$

$$\text{مثال} \quad y' = e^{x+y} + x^2 e^{x^2+y} \\ = e^y (e^x + x^2 e^{x^2})$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = e^y (e^x + x^2 e^{x^2}) \rightarrow \int \frac{dy}{e^y} = \int e^x + x^2 e^{x^2} dx$$

$$-e^{-y} = e^x + \frac{1}{x} e^{x^2} + C$$

مثال $y' = 1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2 = 1 + x^2 + y^2 (1 + x^2)$

$$y' = (1 + x^2)(1 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2) \rightarrow \frac{dy}{1 + y^2} = (1 + x^2) dx$$

$$\rightarrow \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int (1 + x^2) dx = x + \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\tan^{-1} y = x + \frac{1}{3} x^3 + C \rightarrow y = \tan\left(x + \frac{1}{3} x^3 + C\right)$$

ب : مهارت ها

تعریف تابع همگن از درجه n :
تابع دو متغیره $f(x, y)$ را همگن از درجه n می نامند اگر

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

مثال $f(x, y) = xy + \sqrt{x^3 y}$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 xy + \lambda^2 \sqrt{x^3 y}$$

$$= \lambda^2 f(x, y) \quad \text{همگن از درجه 2}$$

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y} \quad \text{همگن از درجه 0}$$

$$f(x, y) = \cos xy \quad \text{همگن نیست}$$

تقریباً: معادله $m \, dx + n \, dy = 0$ به $y' = \frac{m(x,y)}{n(x,y)}$ ممکن باشد
در صورتیکه توابع m و n ممکن از درجه یک باشند

مثال $y' = \ln \frac{x-y}{x+y}$

$$y' = \frac{y}{x} + c + \frac{y}{x}$$

$$(x^2 - y^2) \, dy = 2xy \, dx$$

حل معادلات همگن

تغییر متغیر $\rightarrow \begin{cases} y = xz \\ y' = z + xz' \end{cases} \xrightarrow{\text{در معادله قرار دهیم}} \text{معادله جدیدی پیدا می‌کنیم}$

مثال $y' = \frac{x-y}{x+y}$

$$\begin{cases} y = xz \\ y' = z + xz' \end{cases} \quad z + z'x = \frac{x - xz}{x + xz} = \frac{1-z}{1+z}$$

$$z'x = \frac{1-z}{1+z} - z = \frac{1-2z-z^2}{1+z}$$

$$\rightarrow \int \frac{1+z}{1-2z-z^2} \, dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\begin{aligned} 1-2z-z^2 &= u \\ -2-2z &= du \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{-2-2z}{1-2z-z^2} \, dz = \int \frac{dx}{x} = \ln x + \ln c$$

$$-\frac{1}{2} \ln(1-2z-z^2) = \ln x + \ln c$$

$$\ln \frac{1}{1-2z-z^2} = \ln x + \ln c$$

$$(x - y \cos \frac{y}{x}) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x - y \cos \frac{y}{x}}{-x \cos \frac{y}{x}}$$

$$\begin{cases} y = xz \\ y' = xz' + z \end{cases} \Rightarrow xz' + z = \frac{x - xz \cos z}{-x \cos z}$$

$$\Rightarrow xz' + z = \frac{1 - z \cos z}{-\cos z}$$

$$\Rightarrow xz' = \frac{1 - z \cos z}{-\cos z} - z$$

$$xz' = \frac{1}{-\cos z}$$

$$\Rightarrow -\cos z \, dz = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int -\cos z \, dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\sin z = \ln x + C$$

$$\Rightarrow -\sin \frac{y}{x} = \ln x + C$$