دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضیات مهندسی

دکتر سیدبرزگر

سال تحصیلی 1-1399-1400

سری فوریه: تعریف یک تابع بر حسب توابع پایه مثلثاتی (sin و cos) با استفاده از روش تجزیه و تحلیل سیگنال انجام می‌شود.

به منظور انجام این کار از روش فوریه می‌توان استفاده نمود. شرطی که برای استفاده از روش فوریه در آنالیز یک سیگنال (تابع) وجود دارد متناوب بودن آن تابع است.

سری فوریه — جلسه اول

تابع متناوب: تابعی مانند $f(t)$ در صورتی که مقدار T بزرگتر از صفر باشد و داشته باشیم

$f(t+T) = f(t)$ تابع را متناوب گویند.

نکات: 1) اگر تابعی با دوره تناوب T متناوب باشد آنگاه آن تابع با دوره تناوب $2T$ و $3T$ و $4T$ و ... و nT نیز متناوب خواهد بود.

2) کوچکترین دوره تناوب را تناوب اصلی گویند.

3) اگر توابع $f(t)$ و $g(t)$ متناوب با دوره تناوب T باشند در آن صورت هر ترکیب خطی از این دو تابع نیز متناوب با همان دوره تناوب است

$$\text{if} \quad f(t+T) = f(t)$$

$$g(t+T) = g(t) \Rightarrow h(t) = a\,f(t) + b\,g(t)$$

$$\Rightarrow h(t+T) = a\,f(t+T) + b\,g(t+T)$$

4) اگر $f(t)$ با دوره تناوب T_1 و $g(t)$ با دوره تناوب T_2 متناوب باشند، آنگاه $h(t) = a\,f(t) + b\,g(t)$ در صورتی متناوب است که کوچکترین مضرب مشترک T_1 و T_2 موجود باشد، در این صورت $h(t)$ با همان کوچکترین مضرب مشترک متناوب است.

5) یک عدد ثابت ، با هر دوره‌ی تناوبی ، متناوب است . نتیجه ⇐ اگر $f(t)$ با دوره‌ی تناوب T موجود باشد $h(t)=A+f(t)$ نیز با همان دوره تناوب ، متناوب است .

+ اگر α عدد ثابت ، تناوب $f(t)$ ، T باشد ؛ دوره تناوب $f(\alpha t)$ برابر $\frac{T}{\alpha}$ است .

+ همچنین تناوب $f(\frac{t}{b})$ برابر bT است .

$$\sin t,\ \cos t \longrightarrow T = 2\pi$$

$$\sin 2t,\ \cos 2t \longrightarrow T = \pi$$

$$\sin 3t,\ \cos 3t \longrightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

$$\vdots$$

$$\sin(nt),\ \cos(nt) \longrightarrow T = \frac{2\pi}{n}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right),\ \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \longrightarrow T' = \frac{T}{n}$$

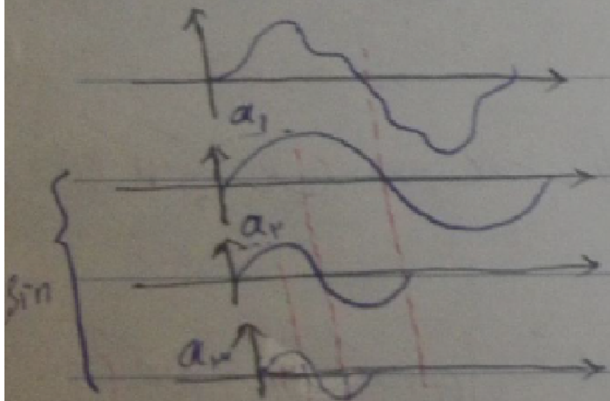
سری فوریه

جلسه اول

+ همانطور که با شناسایی یک تابع متناوب بصورت ترکیب خطی از توابع مثلثاتی توسط سری فوریه بیان می‌گردد.

+ در ابتدا توابعی مدنظر هستند که دوره تناوب آنها 2π است.

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$



فرض براین است که تابع $f(t)$ متناوب با دوره تناوب 2π باشد ($f(t) = f(t+2\pi)$) در این صورت ضرایب سری فوریه را باید محاسبه نمود

فرم کلی نمایش سری فوریه: تابع $f(x)$ با دوره تناوب 2π:

$$f_{(x)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

نحوه محاسبه ضرایب سری فوریه:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

نکته:

$$\begin{cases} \cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \\ \sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] \\ \sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right] \end{cases}$$

جلسه اول

سری فوریه

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ثابت ضریب $= a_0$

$$\xRightarrow{\int_{-\pi}^{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = a_0 x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi a_0 \longrightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

اثبات فرمول a_n : طرفین رابطه فوریه را در $\cos mx$ ضرب می‌کنیم.

$$f(x)\cos mx = a_0\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx\cos mx + b_n\sin nx\cos mx\right)$$

از طرفین در یک دوره تناوب انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx}_{A_n}$$

$$+\,b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx}_{B_n}$$

$$\Rightarrow A_n=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)x\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)x\,dx \Rightarrow A_n=\begin{cases}\pi & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

$$\Rightarrow B_n=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)x\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)x\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\sum a_n A_n$$

$$\rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\pi a_m \Rightarrow a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx$$

و $$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,dx$$

[illegible]

اگر $f(x)$ دارای دوره تناوب 2π و دارای سری فوریه باشد $\Leftarrow$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

که a_0 و a_n و b_n از فرمول های که به فرمول اویلر معروف هستند بدست می آیند

حال اگر $g(x)$ متناوب با دوره تناوب T باشد آنگاه می توان برای تابع $g(x)$ سری فوریه بصورت زیر در نظر گرفت:

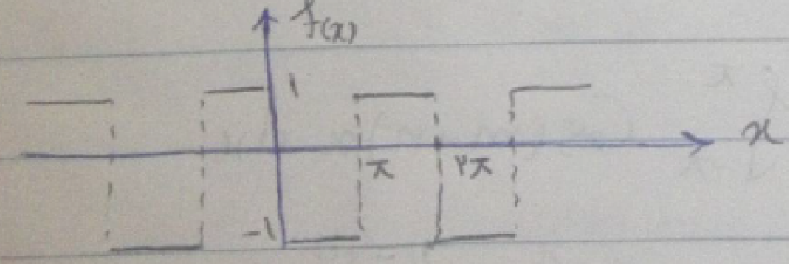
$$g(x)=f\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$

$$g(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right)$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T f(x)\,dx \quad ; \quad a_n=\frac{2}{T}\int_T g(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_T g(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$$

مثال : سری فوریه تابع زیر را بدست آورید؟



$T=2\pi$

$$f(x)=\begin{cases}-1 & 0<x\leq\pi\\ 1 & \pi<x\leq 2\pi\end{cases}\qquad \text{یا}=\begin{cases}1 & -\pi<x\leq 0\\ -1 & 0<x\leq\pi\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(1)\,dx+\int_{0}^{\pi}(-1)\,dx\right)=\frac{1}{2\pi}(\pi-\pi)=0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-1)\cos nx\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-1\sin nx\,dx$$

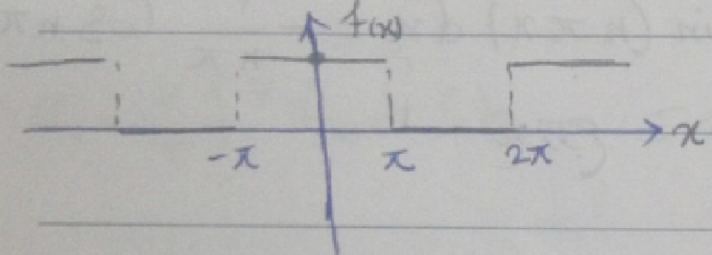
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left[1-\cos n\pi-\cos n\pi+1\right] = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin nx$$

n فرد

مثال:



$$f(x)=\begin{cases}1 & -\pi<x<\pi\\ 0 & \pi<x<2\pi\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{3\pi}\int_T f(x)\,dx=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}dx+\int_{\pi}^{2\pi}0\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}dx=\frac{2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{3\pi}\int_T f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx=\frac{2}{3\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}+0+\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{2\pi}^{3\pi}\right]$$

$$=\frac{2}{3\pi}\times 0=0$$

جلسه اول   سری فوریه

$$b_n=\frac{2}{3\pi}\int_T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx=\frac{2}{3\pi}\times\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{n}\cos\frac{2}{3}nx\Big|_0^{\pi}+0\right.$$

$$\left.+\left(\left(-\frac{1}{n}\right)\frac{\cos 2\pi x}{3}\Big|_{2\pi}^{3\pi}\right)\right]=-\frac{1}{n\pi}\left(\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-1\right)+\cos 2\pi n\cos\frac{4}{3}n\pi\right)$$

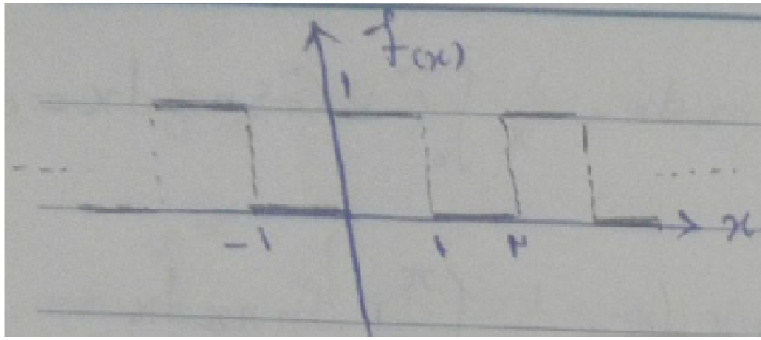
$$\rightarrow f(x)=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2}{3}nx$$

$a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2}{3}n\pi$ " $\longleftarrow$,, $b_n=0$ $\leftarrow$ [illegible] چون تابع زوج

سری فوریه جلسه اول

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases} \qquad T = 2$$



$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos n\pi x\,dx = \int_0^1 \cos n\pi x\,dx = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\sin \pi x - \sin 0\right) = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin(n\pi x)\,dx = \int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cancel{\cos 0}^{\,1}\right) = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{2n}{\pi} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin n\pi x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \left[\frac{2}{\pi} \sin nx + \frac{2}{3\pi} \sin 3\pi x + \frac{2}{5\pi} \sin 5\pi x + \cdots \right]$$

پایان