دستگاه

حل معادلات دیفرانسیل به روش حذفی:

اگر دستگاه معادله دیفرانسیل، شامل دو معادله و دو تابع مجهول x و y به صورت زیر می باشد

$$\begin{cases} L_1(D)x + L_2(D)y = g_1(t) \\ L_3(D)x + L_4(D)y = g_2(t) \end{cases}$$

عمل مشتق $D = \frac{d}{dt}$

$L_i(D)$ عملگرهای خطی هستند

روش حل:

① مانند دستگاه های قبلی یکی از دو مجهول x یا y را از معادلات حذف می کنیم به طور مثال y را حذف می کنیم

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\times -L_4(D)} \quad -L_4(D)L_1(D)x + -L_4(D)\times \cancel{L_2(D)}y = -L_4(D)g_1(t) \\ &\xrightarrow{\times L_2(D)} \quad L_2(D)L_3(D)x + L_2(D)\cancel{L_4(D)}y = L_2(D)g_2(t) \end{aligned}$$

$$\left(-L_4(D)L_1(D) + L_2(D)L_3(D)\right)x = -L_4(D)g_1(t) + L_2(D)g_2(t)$$

② تابع x را با روش عملگرهای D بدست می آوریم (جواب عمومی و جواب خصوصی)

③ سپس جوابی را که بدست آورده ایم را در یکی از معادلات گذاشته و مقدار جواب خصوصی y بدست می آوریم.

حل

$$\begin{cases} x' + y' + 5x + 3y = e^{-t} \\ 2x' + y' + x + y = 3 \end{cases}$$

$$D = \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Dx + Dy + 5x + 3y = e^{-t} \\ 2Dx + Dy + x + y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (D+5)x + (D+3)y = e^{-t} & (*) \\ (2D+1)x + (D+1)y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{(D+1)} -(D+5)(D+1)x + -\cancel{(D+1)(D+3)y} = -(D+1)e^{-t} = +e^{-t} - e^{-t} = 0 \\ \xrightarrow{(D+3)} (D+3)(2D+1)x + \cancel{(D+3)(D+1)y} = (D+3)3 = 9 \end{cases}$$

$$(D^2 + D - 2)x = 9$$

$$\Rightarrow r^2 + r - 2 = 0 \longrightarrow \begin{matrix} r = 1 \\ r = -2 \end{matrix} \longrightarrow x_g = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t}$$

$$x_p = \frac{1}{D^2+D-2}\,9 = \frac{9}{(D+2)(D-1)} = 9\times\left[\frac{-1}{D+2}+\frac{1}{D-1}\right]$$

$$= \frac{9}{2}\left[\frac{1}{1+\frac{D}{2}}\right] + -9\times\frac{1}{1-D}$$

$$= \frac{-9}{2}$$

$$\boxed{x = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t} + \frac{-9}{2}}$$

در ⊛ می‌گذاریم

$$)x + (D+3)y = e^{-t}$$

$$)\left(c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t} - \frac{9}{2}\right) + (D+3)y = e^{-t}$$

$$(D+3)y = e^{-t} - 6c_1 e^{t} - 7c_2 e^{-2t} + \frac{45}{2}$$

$$\longrightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}c_1 e^{t} - 3c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{15}{2}}$$

مثال:

$$\begin{cases} x'' + y' = e^{۲t} \\ x' + y' - x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} D^{۲}x + Dy = e^{۲t} & (*) \\ (D+1)x + (D-1)y = 0 & (**) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\times -(D-1)} \\ \xrightarrow{\times D} \end{array} \begin{cases} -(D-1)D^{۲}x + -(D-1)\cancel{D}y = -(D-1)e^{۲t} \\ D(D+1)x + D(\cancel{D-1})y = 0 \end{cases}$$

$$-۲e^{۲t} + e^{۲t}$$

$$(-D^{۳} + D)x = -e^{۲t}$$

$$-r^{۳} + r = 0 \longrightarrow \begin{array}{l} r = 0 \\ r = 1 \quad \text{مضاعف} \end{array} \qquad x = c_1 + c_۲ e^{t} + c_۳ t e^{t}$$

$$x_p = \frac{-1}{D(D-1)^{۲}} e^{۲t} \longrightarrow x_p = \frac{-1}{۲} e^{۲t}$$

$$\boxed{x = c_1 c_۲ e^{t} + c_۳ t e^{t} - \frac{1}{۲} e^{۲t}}$$

$(**)$ $\quad (D+1)x + (D-1)y = 0$

$$(D-1)y = -(D+1)x = -(D+1)\left(c_1 + c_۲ e^{t} + c_۳ t e^{t} - \frac{1}{۲} e^{۲t}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = -c_1 - c_۲ e^{t} - c_۳ e^{t} - c_۳ t e^{t} + \frac{1}{۲} e^{۲t}}$$