۵-۶- تابع پله ای واحد (تابع هوی ساید) :

تعریف $u_c(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<c\\ 1 & t\ge c\end{cases}$ که $c\ge 0$ است، به تابع پله ای واحد معروف است و نمودار آن بفرم زیر است :

شکل ۵-۱ : تابع پله ای واحد

حالات خاص :

$$u_0(t)=\begin{cases}0 & 0<t<0\\ 1 & t\ge 0\end{cases}=1 \;\rightarrow\; u_0(t)=1$$

$$u_\infty(t)=\begin{cases}0 & t<\infty\\ 1 & t>\infty\end{cases}=0 \;\rightarrow\; u_\infty(t)=0$$

نکته : $(a<b)$ $\quad f(t)=u_a(t)-u_b(t)$ را می توانیم به فرم زیر بنویسیم :

$$f(t)=u_a(t)-u_b(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & a\le t<b\\ 0 & t\ge b\end{cases}=\begin{cases}1 & a\le t<b\\ 0 & o.w\end{cases}$$

با استفاده از این نکته می توان هر تابع چند ضابطه ای را برحسب تابع پله ای واحد نوشت :

$$L\{u_c(t)\}=\frac{e^{-cs}}{s}\qquad (s>0)$$

اثبات :

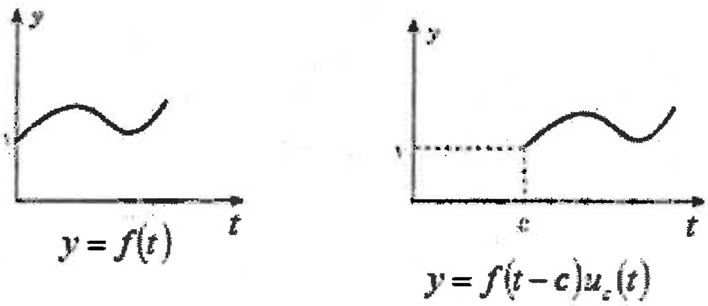
$$L\{u_c(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}u_c(t)dt=\int_0^c e^{-st}(0)dt+\int_c^\infty e^{-st}(1)dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_c^\infty=\frac{1}{s}e^{-cs}$$

قضیه انتقال بر محور x ها یا t ها :

$$y=f(t-c)u_c(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<c\\ f(t-c) & t\ge c\end{cases}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

نمایش شکل زیر انتقال تابع f به اندازه c واحد در جهت مثبت محور t می باشد.



شکل ۵-۲

حال :

$$L\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s)$$

نکته : اثبات همانند تابع پله ای واحد.

نکته : در حالت کلی اگر تابع f (t) با حوزه تعریف نامنفی باشد و با ضابطه زیر تعریف شود، داریم :

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & 0 \le t < c_1 \\ f_2(t) & c_1 \le t < c_2 \\ f_3(t) & c_2 \le t < c_3 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(t) & \cdots \quad t > c_{n-1} \end{cases}$$

$$f(t) = f_1(t)(u_0(t) - u_{c_1}(t)) + f_2(t)(u_{c_1}(t) - u_{c_2}(t)) + \cdots$$

$$\rightarrow \quad f(t) = f_1(t) + (f_2(t) - f_1(t))u_{c_1}(t) + (f_3(t) - f_2(t))u_{c_2}(t) + \cdots$$

مثال (۲۸) از توابع زیر لاپلاس بگیرید ؟

1) $L\{u_2(t)\} = \frac{1}{s}e^{-2s}$

2) $L\{u_3(t)(t-3)^2\} = \frac{2!}{s^3}e^{-3s}$

3) $L\{u_\pi(t)\sin(t-\pi)\} = \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}$

4) $L\{u_2(t)t\} = L\{u_2(t)(t-2+2)\} = L\{u_2(t)(t-2)\} + 2L\{u_2(t)\} = e^{-2s}\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}e^{-2s}$

5) $L\{u_3(t)t^2\} = L\{u_3(t)(t-3+3)^2\} = L\{u_3(t)(t-3)^2 + 6(t-3) + 9\} = e^{-3s}\left[\frac{2!}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right]$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال (۲۹) از توابع زیر لاپلاس بگیرید ؟

$$1)\ f(t)=u_4(t)e^{-2t}$$

$$\rightarrow\ L\{f(t)\}=L\{u_4(t)e^{-2(t-4+4)}\}=e^{-8}L\{u_4(t)e^{-2(t-4)}\}$$

$$F(s)=e^{-8}\frac{e^{-4s}}{s+2}$$

$$2)\ f(t)=u_\pi(t)\sin 2t\ \rightarrow\ L\{f(t)\}=L\{u_\pi(t)\sin 2(t-\pi+\pi)\}$$

$$F(s)=L\{u_\pi(t)(\sin 2(t-\pi)\cos 2\pi+\cos 2(t-\pi)\sin 2\pi)\}$$

$$F(s)=L\{u_\pi(t)\sin 2(t-\pi)\}\ \Rightarrow\ F(s)=e^{-\pi s}\frac{2}{s^2+4}$$

$$3)\ f(t)=u_2(t)\cos t\ \rightarrow\ L\{f(t)\}=L\{u_2(t)\cos(t-2+2)\}$$

$$F(s)=L\{u_2(t)(\cos(t-2)\cos 2-\sin(t-2)\sin 2)\}$$

$$F(s)=e^{-2s}\left[\cos 2\frac{s}{s^2+1}-\sin 2\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$4)\ f(t)=u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^t\cos 2t\ \rightarrow\ L\{f(t)\}=L\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^{\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\cos 2\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$F(s)=e^{\frac{\pi}{2}}L\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\left(\cos 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\pi-\sin 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin\pi\right)\right\}$$

$$F(s)=-e^{\frac{\pi}{2}}L\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\cos 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\ \rightarrow\ F(s)=-e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s-1}{(s-1)^2+4}$$

مثال (۳۰) لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1)\ f(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ t & t\ge 1\end{cases}\ \rightarrow\ f(t)=1+(t-1)u_1(t)$$

$$L\{f(t)\}=L\{1\}+L\{(t-1)u_1(t)\}\ \rightarrow\ F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}e^{-s}$$

$$2)\ f(t)=\begin{cases}\sin t & 0\le t<\pi\\ \sin t+\cos t & t\ge\pi\end{cases}$$

$$f(t)=\sin t+(\sin t+\cos t-\sin t)\,u_\pi(t)$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f(t)=\sin t+u_\pi(t)\cos(t-\pi+\pi) \rightarrow$$

$$L\{f(t)\}=L\{\sin t\}+L\{u_\pi(t)[\cos(t-\pi)\cos\pi-\sin(t-\pi)\sin\pi]\}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}$$

---

3) $f(t)=[t] \quad (t>0)$

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<1\\ 1 & 1\le t<2\\ 2 & 2\le t<3\\ \vdots & \vdots\\ n & n\le t<n+1\end{cases}$$

$$f(t)=0+u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)+\cdots+u_n(t)$$

$$L\{f(t)\}=L\{u_1(t)\}+L\{u_2(t)\}+L\{u_3(t)\}+\cdots$$

$$F(s)=\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-2s}+\frac{1}{s}e^{-3s}+\cdots \rightarrow F(s)=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n}e^{-is}$$

نکته : روش دیگر برای محاسبه لاپلاس توابع پله ای :

برای محاسبه $L\{u_c(t)f(t)\}$ به ازای تابع پله ای، e^{-cs} می نویسیم، سپس $L\{f(t+c)\}$ را می یابیم.

مثال (۳۱) لاپلاس توابع زیر را با روش بالا محاسبه کنید ؟

1) $L\{u_4(t)e^{-2t}\}=e^{-4s}L\{e^{-2(t+4)}\}=e^{-4s}e^{-8}\frac{1}{s+2}$

---

2) $L\{u_\pi(t)\sin t\}=e^{-\pi s}L\{\sin(t+\pi)\}=e^{-\pi s}L\{\sin t\cos\pi+\sin\pi\cos t\}=-e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$

3) $f(t)=\begin{cases}t^3 & 0\le t<1\\ 0 & t\ge 1\end{cases}$

$$f(t)=t^3-t^3u_1(t) \rightarrow L\{f(t)\}=L\{t^3\}-L\{u_1(t)t^3\}$$

$$F(s)=\frac{3!}{s^4}-e^{-s}L\{(t+1)^3\} \rightarrow F(s)=\frac{6}{s^4}-e^{-s}\left(\frac{6}{s^4}+\frac{6}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵-۶-۱- تمرین :

از توابع زیر لاپلاس بگیرید :

1) $f(t)=(t^2-1)u_2(t)$

2) $f(x)=xe^x u_\pi(x)\cos 2x$

3) $f(t)=\begin{cases} 3t & 0\le t<\pi \\ \cos t+\sin t & t\ge \pi \end{cases}$

4) $f(t)=x-[x]$

5) $f(x)=[x^2]$

6) $f(x)=[\sqrt{x}]$

7) $f(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<\pi \\ 1+\cos t & t>\pi \end{cases}$

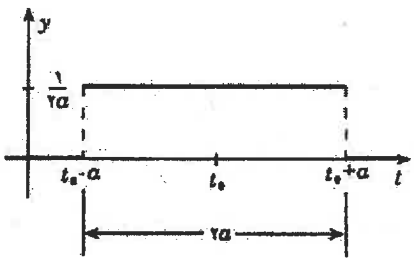
8) $f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<2 \\ t+t^2 & 2\le t<\pi \\ t^2+\sin t & \pi\le t<5 \\ \sin t+e^{-2t} & t\ge 5 \end{cases}$

۵-۷- تابع ضربه ای : (دلتای دیراک)

تابع ضربه ای، تابعی است که در یک فاصله زمانی کوتاه مقدار بسیار بزرگتر دارد.

$$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases} \dfrac{1}{2a} & |t-t_0|<a \\ 0 & |t-t_0|\ge a \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t-t_0)dt=1$$



شکل ۵-۳ : تابع ضربه ای

اگر در تابع ضربه ای $a\to 0$ میل کند به حاصل حد که با $\delta(t-t_0)$ نمایش می دهیم تابع دلتای دیراک می گویند.

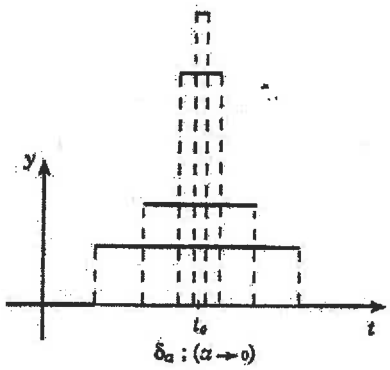
$$\lim_{a\to 0}\delta_a(t-t_0)=\delta(t-t_0)$$

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases} \infty & t=t_0 \\ 0 & t\ne t_0 \end{cases}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

$$1)\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t-t_0)dt = 1$$

$$2)\ \int_{0}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$



شکل ۵-۴ : تابع دلتای دیراک

تبدیل لاپلاس تابع $\delta(t-t_0)$:

$$L\{\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0 s}$$

$$L\{\delta(t)\} = 1$$

$$L\{f(t)\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}f(t_0)$$

مثال (۳۲) لاپلاس توابع زیر را بیابید ؟

$$1)\ L\{\delta(t-1)\} = e^{-s}$$

$$2)\ L\{t^3\delta(t-2)\} = (2)^3 e^{-2s} = 8e^{-2s}$$

$$3)\ L\{\cos t\,\delta(t-2\pi)\} = \cos 2\pi\, e^{-2\pi s} = e^{-2\pi s}$$

$$4)\ L\{\delta(t-\pi)e^t \cos t\} = e^{-\pi s}e^{\pi}\cos\pi = e^{-\pi s}e^{\pi}(-1)$$

۵-۷-۱- تمرین :

لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$1)\ f(t) = \delta(t-3)e^{4t}$ $2)\ f(t) = \delta(t-1)e^{2t}\cos 3t$ $3)\ f(t) = \delta(t)\cos^2 t$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵-۸- لاپلاس توابع متناوب

تبدیل لاپلاس توابع متناوب : اگر $f(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد داریم :

$$L\{f(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$$

اثبات :

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt$$

برای انتگرال دوم تغییر متغیر $t=u+T$ را می گیریم :

$$L\{f(t)\}=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_0^\infty e^{-s(u+T)}f(u+T)du=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+e^{-sT}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du$$

از طرفی چون $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-su}f(u)du$ داریم :

$$L\{f(t)\}=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+e^{-sT}L\{f(t)\}$$

$$\rightarrow\quad L\{f(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$$

مثال (۳۳) تبدیل لاپلاس توابع متناوب زیر را بیابید.

$$1)\ f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ 2-t & 1\le t<2 \end{cases}\qquad f(t)=f(t+2)$$

$$L\{f(t)\}=\frac{\int_0^2 e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-2s}}=\frac{\int_0^1 e^{-st}t\,dt+\int_1^2 e^{-st}(2-t)dt}{1-e^{-2s}}$$

از روش جز به جز استفاده می کنیم.

$$L\{f(t)\}=\frac{-\frac{t}{s}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^1+\left(-\frac{2}{s}e^{-st}+\frac{t}{s}e^{-st}+\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_1^2}{1-e^{-2s}}$$

$$=\frac{\frac{1}{s^2}\left(e^{-2s}-2e^{-s}+1\right)}{1-e^{-2s}}=\frac{1}{s^2}\frac{(1-e^{-s})^2}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})}=\frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$2)\ f(t)=\frac{k}{T}t \qquad 0<t<T \qquad f(t)=f(t+T) \qquad (k>0)$$

$$L\{f(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}=\frac{\int_0^T e^{-st}\frac{k}{T}t\,dt}{1-e^{-sT}}=\frac{k}{T(1-e^{-sT})}\int_0^T te^{-st}\,dt$$

$$=\frac{k}{Ts^2}-\frac{k}{s(e^{sT}-1)}$$

$$3)\ f(t)=|\sin t| \qquad f(t)=f(t+\pi)$$

$$L\{f(t)\}=\frac{\int_0^\pi e^{-st}|\sin t|dt}{1-e^{-\pi s}}=\frac{\int_0^\pi e^{-st}\sin t\,dt}{1-e^{-\pi s}}$$

از روش جز به جز استفاده می کنیم.

$$L\{f(t)\}=\frac{\frac{e^{-st}}{1+s^2}(-s\sin t-\cos t)\Big|_0^\pi}{1-e^{-\pi s}}=\frac{\frac{e^{-st}}{1+s^2}(0+1)-\frac{1}{1+s^2}(0-1)}{1-e^{-\pi s}}=\frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$$

نکته :
$$\int e^{at}\sin bt\,dt=\frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\sin bt-b\cos bt)$$

$$4)\ f(t)=2t-[2t]$$

می دانیم تابع بالا دوره تناوبش $\frac{1}{2}$ است.

$$L\{f(t)\}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-\frac{1}{2}s}}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-st}(2t-[2t])dt}{1-e^{-\frac{s}{2}}}=\frac{2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-st}t\,dt-\int_0^{\frac{1}{2}} 0\times e^{-st}\,dt}{1-e^{-\frac{s}{2}}}$$

از روش جز به جز استفاده می کنیم.

$$=\frac{2\left(-\frac{t}{2}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{s}{2}}}=\frac{-\frac{1}{s}e^{-\frac{s}{2}}-\frac{2}{s^2}e^{-\frac{s}{2}}+\frac{2}{s^2}}{1-e^{-\frac{s}{2}}}=\frac{2-2e^{-\frac{s}{2}}-se^{-\frac{s}{2}}}{s^2\left(1-e^{-\frac{s}{2}}\right)}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵-۸-۱- تمرین : لاپلاس توابع زیر را بیابید.

1) $f(t)=|\cos t| \quad t\ge 0 \quad f(t)=f(t+\pi)$

2) $f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<\pi \\ 2\pi-t & \pi\le t<2\pi \end{cases} \qquad f(t)=f(t+2\pi)$

3) $f(t)=t-[t] \qquad (t>0)$ (متناوب است)

4) $f(t)=e^x \qquad 0<x<2\pi \qquad T=2\pi$

۵-۹- لاپلاس معکوس :

تعریف : فرض می کنیم تابع $f(t)$ بر بازه $[0,\infty)$ تعریف شده باشد و وقتی که $S\to\infty$ میل می کند $F(S)\to 0$ میل می کند، در این صورت تابعی مانند f، که به آن تبدیل معکوس F می گوییم را بصورت $L^{-1}\{F(S)\}=f(t)$ نمایش می دهیم.

نکته : پس اگر $\lim\limits_{S\to\infty}F(S)=0$ آنگاه تابع $F(S)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است در غیر این صورت تابعی مانند $f(t)$ وجود نخواهد داشت که $F(S)$ تبدیل لاپلاس آن باشد. با توجه به تبدیل لاپلاس توابع بیان شده، لاپلاس معکوس ها بصورت زیر تعریف می شوند.

1) $L^{-1}\left\{\dfrac{a}{s}\right\}=a$

2) $L^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\}=t^n$ (n صحیح)

3) $L^{-1}\left\{\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right\}=t^\alpha$ (α کسری)

4) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}=e^{at}$

5) $L^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2+a^2}\right\}=\sin at$

6) $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos at$

7) $L^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2-a^2}\right\}=\sinh at$

8) $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-a^2}\right\}=\cosh at$

با استفاده ازخواص تبدیل لاپلاس که قبلاً ذکرشد،قضایای زیر نتیجه می شود.

1) $L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)$

در این فرمول با محاسبه $L^{-1}\{F(s-a)\}$، a را حذف کرده و $L^{-1}\{F(s)\}$ را محاسبه می کنیم و سپس در e^{at} ضرب می کنیم.

2) $L^{-1}\left\{\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)\right\}=(-1)^n t^n f(t) \quad \to$

$$\to\begin{cases} n=1 \ \to\ L^{-1}\{F'(s)\}=-tf(t) \\ n=2 \ \to\ L^{-1}\{F''(s)\}=t^2 f(t) \end{cases}$$

برای محاسبه $L^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\}$ به ازای مشتق n ام عبارت $(-1)^n t^n$ را قرار می دهیم، سپس $L^{-1}\{F(s)\}$ را محاسبه می کنیم.

$$3)\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}=\int_0^t f(x)dx$$

برای محاسبه $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}$ ابتدا $\frac{1}{s}$ را حذف می کنیم، $L^{-1}\{F(s)\}$ را محاسبه کرده سپس از حاصل انتگرال می گیریم.

$$4)\ L^{-1}\left\{\int_s^\infty F(p)dp\right\}=\frac{f(t)}{t}$$

برای محاسبه $L^{-1}\left\{\int_s^\infty F(p)dp\right\}$، انتگرال را حذف کرده، لاپلاس معکوس تابع داخل انتگرال را محاسبه می کنیم، سپس حاصل را بر t تقسیم می کنیم.

$$5)\ L^{-1}\left\{e^{-cs}F(s)\right\}=u_c(t)f(t-c)$$

برای محاسبه $L^{-1}\left\{e^{-cs}F(s)\right\}$، ابتدا به ازای e^{-cs}، تابع پله ای $u_c(t)$ را نوشته سپس $L^{-1}\{F(s)\}$ را می یابیم و در انتها t را به $t-c$ تغییر می دهیم.

نکته : توابعی مثل $\sin s$ ، $\cos s$ ، e^s ، $\ln s$ ، و تمام توابع گویا که درجه صورت از مخرج بیشتر است دارای لاپلاس معکوس نیستند.

مثال (۳۴) لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید $\left(L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}=t^n\right)$

$$1)\ F(s)=\frac{1}{s}\ \rightarrow\ L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\ \rightarrow\ f(t)=1$$

$$2)\ F(s)=\frac{1}{s^2}\ \rightarrow\ L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\ \rightarrow\ f(t)=t$$

$$3)\ F(s)=\frac{1}{s^3}\ \xrightarrow{n=2}\ L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2!}L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^{2+1}}\right\}\ \rightarrow\ f(t)=\frac{1}{2}t^2$$

$$4)\ F(s)=\frac{1}{s^4}\ \xrightarrow{n=3}\ L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{3!}L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^{3+1}}\right\}\ \rightarrow\ f(t)=\frac{1}{6}t^3$$

$$5)\ F(s)=\frac{4}{s^6}\ \xrightarrow{n=5}\ L^{-1}\{F(s)\}=\frac{4}{5!}L^{-1}\left\{\frac{5!}{s^{5+1}}\right\}\ \rightarrow\ f(t)=\frac{1}{30}t^5$$

$$6)\ F(s)=\frac{1-2s+4s^2}{s^3}\ \rightarrow\ L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}-2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+4L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$\rightarrow\ f(t)=\frac{1}{2}t^2-2t+4$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال (۳۵) لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

$$1)\ F(s)=\frac{1}{s-3} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \rightarrow f(t)=e^{3t}$$

$$2)\ F(s)=\frac{1}{s+1} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \rightarrow f(t)=e^{-t}$$

$$3)\ F(s)=\frac{1}{s^2+1} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \rightarrow f(t)=\sin t$$

$$4)\ F(s)=\frac{1}{s^2+4} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \rightarrow f(t)=\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$5)\ F(s)=\frac{s}{s^2+6} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6}\right\} \rightarrow f(t)=\cos\sqrt{6}t$$

$$6)\ F(s)=\frac{4}{s^2-9} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=\frac{4}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-9}\right\} \rightarrow f(t)=\frac{4}{3}\sinh 3t$$

$$7)\ F(s)=\frac{s}{s^2-16} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-16}\right\} \rightarrow f(t)=\cosh 4t$$

$$8)\ F(s)=\frac{2s+1}{s^2+4} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$\rightarrow f(t)=2\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t$$

مثال (۳۶) لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید $\left(L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right\}=t^{\alpha}\right)$

$$1)\ F(s)=\frac{1}{\sqrt{s}} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right\} \xrightarrow{\alpha+1=\frac{1}{2}\rightarrow\alpha=-\frac{1}{2}}$$

$$f(t)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)}L^{-1}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}}\right\} \rightarrow f(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}} \rightarrow f(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

$$2)\ F(s)=\frac{4-s}{s\sqrt{s}} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=4L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}$$

$$f(t)=\frac{4}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}L^{-1}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{s^{\frac{1}{2}+1}}\right\}-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)}L^{-1}\left\{\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}}\right\}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\rightarrow f(t)=\frac{4}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}} \rightarrow f(t)=8\sqrt{\frac{t}{\pi}}-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

مثال (۳۷) لاپلاس معکوس های توابع زیر را بیابید. $\left(L^{-1}\{F(s-a)\}\right)$

$$1)\ F(s)=\frac{1}{(s-1)^2+4} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\} \rightarrow$$

$$f(t)=\frac{e^t}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \rightarrow f(t)=\frac{e^t}{2}\sin 2t$$

$$2)\ F(s)=\frac{1}{(s-3)^2} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} \rightarrow$$

$$f(t)=e^{3t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \rightarrow f(t)=e^{3t}t$$

$$3)\ F(s)=\frac{1}{(s+4)^8} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^8}\right\} \rightarrow$$

$$f(t)=e^{-4t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^8}\right\} \xrightarrow{n=7} f(t)=\frac{e^{-4t}}{7!}t^7$$

$$4)\ F(s)=\frac{s}{(s+2)^3} \rightarrow F(s)=\frac{s+2-2}{(s+2)^3}=\frac{1}{(s+2)^2}-\frac{2}{(s+2)^3} \rightarrow$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^3}\right\} \rightarrow$$

$$f(t)=e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} \rightarrow f(t)=e^{-2t}t-e^{-2t}t^2$$

$$5)\ F(s)=\frac{1}{s^2+4s+13} \rightarrow F(s)=\frac{1}{(s+2)^2+9} \rightarrow$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=\frac{e^{-2t}}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$$

$$f(t)=\frac{e^{-2t}}{3}\sin 3t$$

$$6)\ F(s)=\frac{s-6}{s^2-4s+13} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{s-2-4}{(s-2)^2+9}\right\} \rightarrow$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\right\}-4L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+9}\right\} \rightarrow$$

$$f(t)=e^{2t}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}-\frac{4}{3}e^{2t}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} \rightarrow$$

$$f(t)=e^{2t}\cos 3t-\frac{4}{3}e^{2t}\sin 3t$$

---

7) $F(s)=\dfrac{e^{-\pi s}+e^{-2s}}{s^2+2s+5} \rightarrow$

$$F(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+5}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+5}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}=\frac{e^{-t}}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}=\frac{e^{-t}}{2}\sin 2t$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+5}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2+2s+5}\right\}$$

$$f(t)=\left[\frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}\sin 2(t-\pi)\right]u_\pi(t)+\left[\frac{1}{2}e^{-(t-2)}\sin 2(t-2)\right]u_2(t)$$

---

8) $F(s)=\dfrac{1}{\sqrt{s-2}} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s-2}}\right\}$

$$f(t)=e^{2t}L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\} \xrightarrow{\text{گاما}} f(t)=e^{2t}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

---

9) $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{\sqrt{2s+1}}$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+1}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+\frac{1}{2}}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}t}L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}=\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{2\pi t}}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{\sqrt{2s+1}}\right\} \rightarrow f(t)=\frac{e^{-\frac{1}{2}(t-2)}}{\sqrt{2\pi(t-2)}}u_2(t)$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

10) $F(s)=\dfrac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)} \rightarrow F(s)=\dfrac{2s+4}{(s-2)(s+1)(s+3)}$

$$\rightarrow \frac{2s+4}{(s-2)(s+1)(s+3)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+3} \rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{8}{15} \\ B=\dfrac{-1}{3} \\ C=\dfrac{-1}{5} \end{cases}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{\frac{8}{15}}{s-2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{5}}{s+3}\right\}$$

$$f(t)=\frac{8}{15}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{5}e^{-3t}$$

11) $F(s)=\dfrac{s-2}{s^2(s^2+4)}$

$$\frac{s-2}{s^2(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}=\frac{As^3+4As+Bs^2+4B+Cs^3+Ds^2}{s^2(s^2+4)}$$

$$=\frac{s^3(A+C)+s^2(B+D)+s(4A)+4B}{s^2(s^2+4)} \rightarrow \begin{cases} A+C=0 \rightarrow C=-\dfrac{1}{4} \\ B+D=0 \rightarrow D=\dfrac{1}{2} \\ 4A=1 \rightarrow A=\dfrac{1}{4} \\ 4B=-2 \rightarrow B=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{s}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{2}}{s^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{4}s+\frac{1}{2}}{s^2+4}\right\}$$

$$f(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t$$

12) $F(s)=\dfrac{1}{s^3+1}$

$$\frac{1}{s^3+1}=\frac{1}{(s+1)(s^2-s+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2-s+1}$$

$$=\frac{As^2-As+A+Bs^2+Cs+Bs+C}{(s^2-s+1)(s+1)} \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+C+B=0 \rightarrow \\ A+C=1 \end{cases}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$A=\frac{1}{3}\quad,\quad B=-\frac{1}{3}\quad,\quad C=\frac{2}{3}$$

$$F(s)=\frac{\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{\frac{-1}{3}s+\frac{2}{3}}{s^2-s+1}\ \rightarrow$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{s-2}{\left(s-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$f(t)=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{-\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}\ \rightarrow$$

$$f(t)=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

مثال (۳۸) مبدل لاپلاس معکوس های زیر را بیابید.

نکته : $L^{-1}\{F'(s)\}=-tf(t)$

$$1)\ F(s)=\ln\frac{s+2}{s-1}$$

$$F(s)=\ln(s+2)-\ln(s-1)\ \rightarrow\ F'(s)=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}\ \rightarrow$$

$$L^{-1}\{F'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}\ \rightarrow\ -tf(t)=e^{-2t}-e^{t}\ \rightarrow\ f(t)=\frac{e^{t}-e^{-2t}}{t}$$

$$2)\ F(s)=\ln\left(1-\frac{a^2}{s^2}\right)\ \rightarrow\ F(s)=\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$$

$$F(s)=\ln(s^2-a^2)-2\ln s\ \rightarrow\ F'(s)=\frac{2s}{s^2-a^2}-\frac{2}{s}\ \rightarrow$$

$$L^{-1}\{F'(s)\}=2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\}-2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\ \rightarrow\ -tf(t)=2\cosh at-2\ \rightarrow\ f(t)=\frac{2}{t}-\frac{2\cosh at}{t}$$

$$3)\ F(s)=s\ln\sqrt[3]{\frac{s+2}{s-4}}\ \rightarrow\ F(s)=\frac{1}{3}s\ln\frac{s+2}{s-4}$$

$$F(s)=\frac{1}{3}s[\ln(s+2)-\ln(s-4)]\ \rightarrow$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$F'(s)=\frac{1}{3}\ln(s+2)-\frac{1}{3}\ln(s-4)+\frac{1}{3}\frac{s}{s+2}+\frac{1}{3}\frac{s}{s-4}$$

$$F''(s)=\frac{1}{3}\frac{1}{s+2}-\frac{1}{3}\frac{1}{s-4}+\frac{2}{3}\frac{1}{(s+2)^2}-\frac{4}{3}\frac{1}{(s-4)^2}$$

$$L^{-1}\{F''(s)\}=\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}+\frac{2}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}-\frac{4}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2}\right\}$$

نکته : $L^{-1}\{F''(s)\}=t^2 f(t)$

$$t^2 f(t)=\frac{1}{3}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{4t}+\frac{2}{3}e^{-2t}t-\frac{4}{3}e^{4t}t \;\rightarrow\; f(t)=\frac{e^{-2t}-e^{4t}+2e^{-2t}t-4te^{4t}}{3t^2}$$

4) $F(s)=\operatorname{Arccot}(s)$

$$F'(s)=\frac{-1}{s^2+1} \;\rightarrow\; L^{-1}\{F'(s)\}=-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \;\rightarrow\; -tf(t)=-\sin t \;\rightarrow\; f(t)=\frac{\sin t}{t}$$

5) $F(s)=\tan^{-1}\frac{2}{s-3}$

$$F'(s)=\frac{\frac{-2}{(s-3)^2}}{1+\left(\frac{2}{s-3}\right)^2} \;\rightarrow\; F'(s)=\frac{\frac{-2}{(s-3)^2}}{\frac{(s-3)^2+4}{(s-3)^2}} \;\rightarrow\; L^{-1}\{F'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{-2}{(s-3)^2+4}\right\}$$

$$-tf(t)=-e^{3t}\sin 2t \;\rightarrow\; f(t)=\frac{e^{3t}\sin 2t}{t}$$

6) $F(s)=e^{-as}\operatorname{Arctan}(s-1)$

$$F_1(s)=\operatorname{Arctan}(s-1) \;\rightarrow\; F_1'(s)=\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$\rightarrow\; L^{-1}\{F'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\} \;\rightarrow\; -tf_1(t)=e^t\sin t \;\rightarrow\; f_1(t)=\frac{e^t\sin t}{-t}$$

$$\rightarrow\; L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\{e^{-as}\operatorname{Arctan}(s-1)\} \;\rightarrow\; f(t)=\left[\frac{e^{(t-a)}\sin(t-a)}{-(t-a)}\right]u_a(t)$$

7) $F(s)=s\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{s}\right)$

$$F'(s)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{s}\right)+s\frac{\frac{-a}{s^2}}{1+\frac{a^2}{s^2}} \;\rightarrow\; F'(s)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{s}\right)-\frac{as}{s^2+a^2}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$G(s)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{s}\right) \rightarrow G'(s)=\frac{-a}{s^2+a^2}$$

$$\rightarrow L^{-1}\{G'(s)\}=-L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} \rightarrow -tg(t)=-\sin at \rightarrow g(t)=\frac{\sin at}{t}$$

حال :

$$\rightarrow L^{-1}\{F'(s)\}=L^{-1}\left\{\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{s}\right)\right\}-aL^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}$$

$$-tf(t)=\frac{\sin at}{t}-a\cos at \rightarrow f(t)=\frac{a\cos at}{t}-\frac{\sin at}{t^2}$$

مثال (۳۹) لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید. $\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}=\int_0^t f(x)dx\right)$

1) $F(s)=\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$

$$F_1(s)=\tan^{-1}\frac{1}{s}=\cot^{-1}s \rightarrow F_1'(s)=-\frac{1}{s^2+1}$$

$$\rightarrow L^{-1}\{F_1'(s)\}=-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$-tf_1(t)=-\sin t \rightarrow f_1(t)=\frac{\sin t}{t}$$

$$\rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} \rightarrow f(t)=\int_0^t \frac{\sin x}{x}dx$$

---

2) $F(s)=\frac{1}{s}\ln\frac{s+3}{s+1}$

$$F_1(s)=\ln\frac{s+3}{s+1} \rightarrow F_1(s)=\ln(s+3)-\ln(s+1) \rightarrow F_1'(s)=\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+1}$$

$$L^{-1}\{F_1'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \rightarrow -tf_1(t)=e^{-3t}-e^{-t} \rightarrow f_1(t)=\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\frac{s+3}{s+1}\right\} \rightarrow f(t)=\int_0^t \frac{e^{-x}-e^{-3x}}{x}dx$$

---

3) $F(s)=\frac{1}{s-1}\ln\frac{s+1}{s-1} \rightarrow \frac{1}{s-1}\ln\left(\frac{s-1+2}{s-1}\right)$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\ln\left(\frac{s-1+2}{s-1}\right)\right\} \rightarrow f(t)=e^{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\frac{s+2}{s}\right\}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$F_1(s)=\ln\frac{s+2}{s}=\ln(s+2)-\ln(s) \to F_1'(s)=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s} \to$$

$$L^{-1}\{F_1'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \to -tf_1(t)=e^{-2t}-1$$

$$f_1(t)=\frac{1-e^{-2t}}{t} \to f(t)=e^{t}\int_0^t\frac{1-e^{-2x}}{x}dx$$

---

4) $F(s)=\frac{1}{s-4}\cot^{-1}(s+2)$

$$F(s)=\frac{1}{s-4}\cot^{-1}(s-4+6)$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\cot^{-1}(s-4+6)\right\} \to f(t)=e^{4t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cot^{-1}(s+6)\right\}$$

$$F_1(s)=\cot^{-1}(s+6) \to F_1'(s)=\frac{-1}{(s+6)^2+1} \to$$

$$\to L^{-1}\{F_1'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+6)^2+1}\right\} \to -tf_1(t)=-e^{-6t}\sin t \to f_1(t)=\frac{e^{-6t}\sin t}{t}$$

پس :

$$f(t)=e^{4t}\int_0^t\frac{e^{-6x}\sin x}{x}dx$$

---

5) $F(s)=\frac{1}{s\sqrt{s+4}}$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{s+4}}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+4}}\right\}=e^{-4t}L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}=e^{-4t}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}L^{-1}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{s}}\right\}=\frac{e^{-4t}}{\sqrt{\pi t}}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{s+4}}\right\} \to f(t)=\int_0^t\frac{e^{-4x}}{\sqrt{\pi x}}dx$$

$$\xrightarrow[x=u^2\to dx=2u\,du]{\sqrt{x}=u} f(t)=\int_0^{\sqrt{t}}\frac{e^{-4u^2}}{\sqrt{\pi}u}2u\,du \to f(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-4u^2}du$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال (۴۰) مبدل لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

$$\left(L^{-1}\left\{\int_s^\infty F(p)dp\right\}=\frac{f(t)}{t}\right)$$

$$1)\ F(s)=\frac{s}{(s^2-4)^2}$$

$$L^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{p}{(p^2-4)^2}dp\right\}=\frac{f(t)}{t}\ \rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{-1}{2(p^2-4)}\Bigg|_s^\infty\right\}=\frac{f(t)}{t}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{2(s^2-4)}\right\}=\frac{f(t)}{t}\ \rightarrow\ \frac{1}{4}\sinh 2t=\frac{f(t)}{t}\ \rightarrow\ f(t)=\frac{t}{4}\sinh 2t$$

$$2)\ F(s)=\frac{s}{s^4+8s^2+16}\ \rightarrow\ F(s)=\frac{s}{(s^2+4)^2}$$

$$L^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{p}{(p^2+4)^2}dp\right\}=\frac{f(t)}{t}\ \rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{-1}{2(p^2+4)}\Bigg|_s^\infty\right\}=\frac{f(t)}{t}\ \rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{2(p^2+4)}\right\}=\frac{f(t)}{t}$$

$$\rightarrow\ f(t)=\frac{t}{4}\sin 2t$$

$$3)\ \int_s^\infty \frac{pe^{-p}}{p^2+2p+5}dp$$

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+2p+5}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{p+1-1}{(p+1)^2+4}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{p+1}{(p+1)^2+4}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2+4}\right\}=e^{-t}\cos 2t-\frac{e^{-t}}{2}\sin 2t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{pe^{-p}}{p^2-2p+5}\right\}=\left[e^{-(t-1)}\cos 2(t-1)-\frac{1}{2}e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)\right]u_1(t)$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{pe^{-p}}{p^2+2p+5}dp\right\}$$

$$\rightarrow\ f(t)=\frac{\left[e^{-(t-1)}\cos 2(t-1)-\frac{1}{2}e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)\right]u_1(t)}{t}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال (۴۱) ثابت کنید : $\int_s^{\infty}\frac{\cos xt}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}e^{-x}$

$$f(x)=\int_s^{\infty}\frac{\cos xt}{1+t^2}dt \rightarrow L\{f(x)\}=L\left\{\int_0^{\infty}\frac{\cos xt}{1+t^2}dt\right\}=$$

$$L\{f(x)\}=\int_0^{\infty}e^{-sx}\left(\int_0^{\infty}\frac{\cos xt}{1+t^2}dt\right)dx=\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}\left(\int_0^{\infty}e^{-sx}\cos xt\,dx\right)$$

$$L\{f(x)\}=\int_0^{\infty}\frac{L\{\cos xt\}}{1+t^2}dt$$

$$L\{f(x)\}=\int_0^{\infty}\frac{s}{(1+t^2)(s^2+t^2)}dt \xrightarrow{\text{تجزیه کسر}}$$

$$L\{f(x)\}=\int_0^{\infty}\left(\frac{\frac{s}{s^2-1}}{1+t^2}-\frac{\frac{s}{s^2-1}}{s^2+t^2}\right)dt=\frac{s}{s^2-1}\left(\tan^{-1}t-\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{t}{s}\right)\Bigg|_0^{\infty}$$

$$L\{f(x)\}=\frac{s}{s^2-1}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2s}-0+0\right] \rightarrow L\{f(x)\}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{s}{s^2-1}-\frac{1}{s^2-1}\right]$$

$$L\{f(x)\}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{(s-1)}{(s-1)(s+1)}\right] \rightarrow f(x)=\frac{\pi}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}e^{-x} \xrightarrow{\text{پس}} \int_0^{\infty}\frac{\cos xt}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}e^{-x}$$

تجزیه کسر بالا :

$$\frac{s}{(1+t^2)(s^2+t^2)}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{Ct+D}{s^2+t^2}$$

$$=\frac{Ats^2+At^3+Bs^2+Bt^2+Ct+D+Ct^3+Dt^2}{(1+t^2)(s^2+t^2)} \rightarrow \begin{cases} B=\frac{s}{s^2-1} \\ A=C=0 \\ D=\frac{-s}{s^2-1} \end{cases}$$

۵-۹-۱- تمرین :

(۱) لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

1) $F(s)=\frac{s^2+1}{s^6}$ 2) $F(s)=\frac{s}{(s-1)^4}$

3) $F(s)=\frac{3s+1}{(s-1)^3}$ 4) $F(s)=\frac{2s+3s^2+4s^4}{s^7}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

5) $F(s)=\dfrac{3s+2}{s^2+3}$

6) $F(s)=\dfrac{3-s^2}{s^{\frac{3}{2}}}$

7) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$

8) $F(s)=\dfrac{se^{-\pi s}}{s^2+2s+3}$

9) $F(s)=\dfrac{s^2}{s^4-1}$

10) $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^3(s^2+1)}$

11) $F(s)=\dfrac{(s+1)e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}s}}{s^2+s+1}$

12) $F(s)=\dfrac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s^2+4s+5}$

(۲) لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

1) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{\sqrt{3s+2}}$

2) $F(s)=\dfrac{e^{4-3s}}{(s+4)^{\frac{3}{2}}}$

3) $F(s)=\left(\dfrac{s^3-3s^2+9s-3}{(s^2+1)(s^2+9)}\right)e^{-2\pi s}$

4) $F(s)=\dfrac{1}{s^4+1}$

5) $F(s)=\dfrac{1}{s+1}\cot^{-1}(s+1)+\ln\dfrac{\sqrt{s^2+1}}{s}$

6) $F(s)=\ln\dfrac{s}{s-1}+\ln\sqrt[3]{\dfrac{s+1}{s-2}}$

7) $F(s)=\dfrac{1}{s}\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{s+1}\right)+\ln\sqrt[6]{\dfrac{s}{s^2+1}}$

8) $F(s)=\ln\left(\dfrac{s^2+1}{s^2+s}\right)$

9) $F(s)=\dfrac{1}{s}\ln\dfrac{s+3}{s-1}$

10) $F(s)=\dfrac{1}{s+1}\ln\dfrac{s}{s-1}$

11) $F(s)=\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$

12) $F(s)=s\cot^{-1}s$

13) $F(s)=\int_s^{\infty}\dfrac{e^{-u}}{u^2+4u+5}du$

14) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2-9)^2}$

15) $F(s)=\dfrac{1}{s^2}\tan^{-1}\dfrac{1}{s}$

16) $F(s)=\dfrac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$

17) $F(s)=\dfrac{1}{s}\ln\dfrac{\sqrt{s^2+3}}{s-1}$

18) $F(s)=\ln\left(\dfrac{s^2+2s+3}{s^2+1}\right)+\dfrac{e^{-s}}{(s^2+4s+6)^2}$

(۳) نشان دهید.

$$\int_s^{\infty}\frac{\sin tx}{x(1+x^2)}dt=\frac{\pi}{2}(1-e^{-x})$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵-۱۰- تبدیل لاپلاس مشتق :

اگر $f(t)$ روی $[0,\infty)$ تابعی پیوسته و $f'(t)$ قطعه ای پیوسته باشد داریم :

$$L\{f'(t)\}=sL\{f(t)\}-f(0)$$

$$L\{f''(t)\}=s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$$

$$\vdots$$

$$L\{f^{(n)}(t)\}=s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-1}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

مثال (۴۲) اگر $L\{\sin\sqrt{t}\}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}e^{-\frac{1}{4s}}$ باشد مقدار $L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$ را بیابید.

$$\begin{cases} f(t)=\sin\sqrt{t} \;\rightarrow\; f'(t)=\frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} \;\rightarrow\; L\{f'(t)\}=\frac{1}{2}L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$$sL\{f(t)\}-(f(0))=\frac{1}{2}L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} \rightarrow L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}=2sL\{f(t)\}$$

$$L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}=2s\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}e^{-\frac{1}{4s}} \rightarrow L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\frac{1}{4s}}$$

مثال (۴۳) تبدیل لاپلاس $\cos^2 x$ را بیابید.

$$\begin{cases} f(x)=\cos^2 x \;\rightarrow\; f'(x)=-2\sin x\cos x \;\rightarrow\; f'(x)=-2\sin 2x \\ f(0)=1 \end{cases}$$

$$L\{f'(x)\}=-L\{\sin 2x\} \rightarrow sL\{f(x)\}-f(0)=-\frac{2}{s^2+4}$$

$$L\{f(x)\}=-\frac{2}{s}\frac{1}{s^2+4}+\frac{1}{s} \rightarrow L\{f(x)\}=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$$

مثال (۴۴) تبدیل لاپلاس $f(x)=\cos^3 x$ را بیابید.

$$\begin{cases} f(x)=\cos^3 x \;\rightarrow f'(x)=-3\sin x\cos^2 x \;\rightarrow f''(x)=6\sin^2 x\cos x-3\cos^3 x \\ f(0)=1 \quad , \quad f'(0)=0 \end{cases}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f''(x)=6(1-\cos^2 x)\cos x-3\cos^3 x \rightarrow f''(x)=6\cos x-9\cos^3 x$$

$$\rightarrow f''(x)=6\cos x-9f(x)$$

$$L\{f''(x)\}=6L\{\cos x\}-9L\{f(x)\}$$

$$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)=6\frac{s}{s^2+1}-9L\{f(t)\} \xrightarrow[f'(0)=0]{f(0)=1}$$

$$L\{f(t)\}(s^2+9)=\frac{6s}{s^2+1}+s \rightarrow L\{f(t)\}=\frac{6s}{(s^2+1)(s^2+9)}+\frac{s}{s^2+9}$$

۵-۱۱- حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس :

برای حل معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه، با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می گیریم، تا معادله ای معمولی برحسب $L\{y\}$ بدست آید، آن را حل می کنیم و در انتها از حاصل ،لاپلاس معکوس می گیریم تا تابع مجهول $y(t)$ حاصل شود.

$$L\{y'\}=sL\{y\}-y(0)$$

$$L\{y''\}=s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)$$

مثال (۴۵) معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید.

1) $y''+y'-2y=0 \qquad y(0)=4 \quad , \quad y'(0)=1$

$$L\{y''\}+L\{y'\}-2L\{y\}=L\{0\} \rightarrow$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+sL\{y\}-y(0)-2L\{y\}=0$$

$$s^2L\{y\}-4s-1+sL\{y\}-2L\{y\}=0 \rightarrow L\{y\}=\frac{4s+5}{s^2+s-2}$$

$$L\{y\}=\frac{4s+5}{(s-1)(s+2)} \xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} L\{y\}=\frac{3}{s-1}+\frac{1}{s+2}$$

$$L^{-1}\{y\}=L^{-1}\left\{\frac{3}{s-1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \rightarrow y(t)=3e^{t}+e^{-2t}$$

---

2) $y''+2y'+2y=\delta(t-\pi) \qquad y(0)=y'(0)=1$

$$L\{y''\}+2L\{y'\}+2L\{y\}=L\{\delta(t-\pi)\} \rightarrow$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+2(sL\{y\}-y(0))+2L\{y\}=e^{-\pi s}$$

$$\xrightarrow[y'(0)=1]{y(0)=1} L\{y\}(s^2+2s+2)-s-3=e^{-\pi s} \rightarrow L\{y\}=\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}+\frac{s+3}{(s+1)^2+1}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2+1}\right\}$$

$$y(t)=e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)u_\pi(t)+e^{-t}\cos t+2e^{-t}\sin t$$

3) $y''-3y'-4y=\begin{cases}e^x & 0\le x<2\\ 0 & x\ge 2\end{cases}\qquad y(0)=y'(0)=0$

$$y''-3y'-4y=e^x+(0-e^x)u_2(x)=e^x-e^{x-2+2}u_2(x)$$

$$L\{y''\}-3L\{y'\}-4L\{y\}=L\{e^x\}-e^2L\{u_2(x)e^{x-2}\}$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)-3(sL\{y\}-y(0))-4L\{y\}=\frac{1}{s-1}-e^2\frac{e^{-2s}}{s-1}$$

$$L\{y\}(s^2-3s-4)=\frac{1}{s-1}-\frac{e^2e^{-2s}}{s-1}\ \rightarrow\ L\{y\}=\frac{1}{(s-1)(s+1)(s-4)}-\frac{e^2e^{-2s}}{(s-1)(s+1)(s-4)}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)(s-4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-4}\begin{cases}A=-\frac{1}{6}\\ B=\frac{1}{10}\\ C=\frac{1}{15}\end{cases}$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{6}}{s-1}+\frac{\frac{1}{10}}{s+1}+\frac{\frac{1}{15}}{s-4}\right\}-e^2L^{-1}\left\{e^{-2s}\left(\frac{-\frac{1}{6}}{s-1}+\frac{\frac{1}{10}}{s+1}+\frac{\frac{1}{15}}{s-4}\right)\right\}$$

$$y(t)=-\frac{1}{6}e^x+\frac{1}{10}e^{-x}+\frac{1}{15}e^{4x}-e^2\left[-\frac{1}{6}e^{(x-2)}+\frac{1}{10}e^{-(x-2)}+\frac{1}{15}e^{4(x-2)}\right]u_2(x)$$

4) $y''+4y=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}\qquad y(0)=0\quad,\quad y'(0)=1$

$$y''+4y=x+(1-x)u_1(x)$$

$$L\{y''\}+4L\{y\}=L\{x\}-L\{u_1(x)(x-1)\}$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+4L\{y\}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}$$

$$L\{y\}(s^2+4)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}+1\ \rightarrow L\{y\}=\frac{1}{s^2(s^2+4)}-\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+4)}+\frac{1}{s^2+4}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$y=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{s^2}+\frac{-\frac{1}{4}}{s^2+4}\right\}-L^{-1}\left\{e^{-2s}\left(\frac{\frac{1}{4}}{s^2}+\frac{-\frac{1}{4}}{s^2+4}\right)\right\}+\frac{1}{s^2+4}$$

$$y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\sin 2x-\left[\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{8}\sin 2(x-1)\right]u_1(x)+\frac{1}{2}\sin 2x$$

تجزیه کسر :

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}=\frac{As^3+4As+Bs^2+4B+Cs^3+Ds^2}{s^2(s^2+4)}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \;\rightarrow\; C=0 \\ B+D=0 \;\rightarrow\; D=-\frac{1}{4} \\ 4A=0 \\ 4B=1 \;\rightarrow\; B=\frac{1}{4} \end{cases}$$

---

5) $$y''+2y'+y=\begin{cases} 0 & 0\le t<\frac{\pi}{2} \\ \sin t & t\ge\frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=0$$

$$y''+2y'+y=0+(\sin t)u_{\frac{\pi}{2}}(t)$$

نکته : $\sin\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}+\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}$

$$L\{y''\}+2L\{y'\}+L\{y\}=L\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+2(sL\{y\}-y(0))+L\{y\}=e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}$$

$$L\{y\}(s^2+2s+1)=e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1} \;\rightarrow\; L\{y\}=e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}e^{-\frac{\pi}{2}s}\right\} \;\rightarrow\; y(t)=L^{-1}\left\{\left(\frac{-\frac{1}{2}}{(s+1)^2}+\frac{+\frac{1}{2}}{(s^2+1)}\right)e^{-\frac{\pi}{2}s}\right\}$$

$$y(t)=\left[-\frac{1}{2}e^{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]u_{\frac{\pi}{2}}(t)$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تجزیه کسر :

$$\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{Cs+D}{(s^2+1)}\qquad\begin{cases}A=C=0\\ B=\dfrac{-1}{2}\\ D=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

6) $y'+y=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ -1 & x\ge 1\end{cases}\qquad y(0)=0$

$$y'+y=1-2u_1(x)$$

$$L\{y'\}+L\{y\}=L\{1\}-2L\{u_1(x)\}$$

$$sL\{y\}-y(0)+L\{y\}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s}e^{-s}\;\rightarrow\;L\{y\}=\frac{1}{s(s+1)}-\frac{2}{s(s+1)}e^{-s}\;\rightarrow$$

با تجزیه کسر داریم :

$$y=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\}-2L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)e^{-s}\right\}\;\rightarrow\;y=1-e^{-x}-2\left(1-e^{-(x-1)}\right)u_1(x)$$

7) $y''-4y'+4y=3x^5e^{2x}\qquad y(0)=y'(0)=0$

$$L\{y''\}-4L\{y'\}+4L\{y\}=3L\{x^5e^{2x}\}$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)-4(sL\{y\}-y(0))+4L\{y\}=3\frac{5!}{(s-2)^6}$$

$$L\{y\}(s^2-4s+4)=3\frac{5!}{(s-2)^6}\;\rightarrow\;L\{y\}=3\frac{5!}{(s-2)^8}$$

$$y(x)=\frac{3\times5!}{7!}L^{-1}\left\{\frac{7!}{(s-2)^{7+1}}\right\}\;\rightarrow\;y(x)=\frac{e^{2x}}{14}x^7$$

8) $ty''+(3t-1)y'-(4t+9)y=0\qquad y(0)=0$

$$L\{ty''\}+3L\{ty'\}-L\{y'\}-4L\{ty\}-9L\{y\}=L\{0\}$$

$$-\frac{d}{ds}[s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)]-3\frac{d}{ds}[sL\{y\}-y(0)]-(sL\{y\}-y(0))+4\frac{d}{ds}L\{y\}-9L\{y\}=0$$

$$-2sL\{y\}-\frac{dL\{y\}}{ds}s^2-3L\{y\}-3s\frac{dL\{y\}}{ds}-sL\{y\}+4\frac{d}{ds}L\{y\}-9L\{y\}=0$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

معادله جدایی پذیر :

$$\frac{dL\{y\}}{ds}\left(-s^2-3s+4\right)-(3s+12)L\{y\}=0$$

$$-\frac{dL\{y\}}{ds}(s-1)(s+4)=3(s+4)L\{y\}$$

$$\frac{dL\{y\}}{L\{y\}}=\frac{-3}{(s-1)}ds \xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln(L\{y\})=-3\ln(s-1)+\ln c$$

$$\rightarrow \ln(L\{y\})=\ln\frac{c}{(s-1)^3} \rightarrow L\{y\}=\frac{c}{(s-1)^3}$$

$$y=cL^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} \rightarrow y=\frac{c}{2}t^2e^t$$

---

9) $ty''+(2t+3)y'+(t+3)y=3e^{-t} \qquad y(0)=0$

$$L\{ty''\}+2L\{ty'\}+3L\{y'\}+L\{ty\}+3L\{y\}=3L\{e^{-t}\}$$

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)\right]-2\frac{d}{ds}\left[sL\{y\}-y(0)\right]+3(sL\{y\}-y(0))-\frac{d}{ds}L\{y\}+3L\{y\}=\frac{3}{s+1}$$

$$-2sL\{y\}-s^2\frac{dL\{y\}}{ds}-2L\{y\}-2s\frac{dL\{y\}}{ds}+3sL\{y\}-\frac{dL\{y\}}{ds}+3L\{y\}=\frac{3}{s+1}$$

$$-\frac{dL\{y\}}{ds}\left(s^2+2s+1\right)+L\{y\}(s+1)=\frac{3}{s+1} \xrightarrow{\div -(s+1)^2} \frac{dL\{y\}}{ds}-\frac{1}{(s+1)}L\{y\}=\frac{-3}{(s+1)^3}$$

معادله خطی مرتبه اول : وابسته $L\{y\}$ ، مستقل s

$$L\{y\}=e^{\int\frac{1}{s+1}ds}\left(\int\frac{-3}{(s+1)^3}e^{-\int\frac{1}{s+1}ds}ds+c\right)$$

نکته : $e^{\ln(s+1)}=(s+1)$

$$L\{y\}=(s+1)\left(\int-\frac{3}{(s+1)^4}ds+c\right) \rightarrow L\{y\}=(s+1)\left(\frac{1}{(s+1)^3}+c\right)$$

نکته : قضیه مقدار اولیه $\quad f(0)=\lim\limits_{s\to+\infty}F(s)$

پس :

$$0=0+\infty(c) \rightarrow c=0$$

$$L\{y\}=\frac{1}{(s+1)^2} \rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} \rightarrow y=e^{-t}t$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

10) $ty''+y'+ty=0 \qquad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=0$

$$L\{ty''\}+L\{y'\}+L\{ty\}=0$$

نکته : برای راحتی کار می توانیم $L\{y\}=Y$ و به جای $\frac{d}{ds}$ از علامت پرین استفاده کنیم.

$$-\left(s^2Y-sy(0)-y'(0)\right)'+\left(sY-y(0)\right)-(Y)'=L\{0\}$$

$$-2sY-s^2Y'+sY-Y'=0$$

$$-Y'\left(s^2+1\right)=sY \;\rightarrow\; \frac{Y'}{Y}=\frac{-s}{s^2+1} \xrightarrow{\text{انتگرال}}$$

$$\ln|Y|=-\frac{1}{2}\ln\left|s^2+1\right|+\ln c \;\rightarrow\; \ln|Y|=\ln\left|\frac{c}{\sqrt{s^2+1}}\right|$$

$$Y=\frac{c}{\sqrt{s^2+1}} \;\rightarrow\; L^{-1}\{Y\}=cL^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\} \;\rightarrow\; y(t)=cJ_0(t)$$

نکته : $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\}=J_0(t)$

۵-۱۱-۱- تمرین :

(۱) معادلات دیفرانسیل با مقادیر اولیه زیر را با کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید.

1) $y'+y=-\int_0^x y(t)dt+2u_1(x)-u_2(x) \qquad y(0)=0$

2) $y''+2y'+2y=\begin{cases}\sin t & 0\le t<\pi\\ 0 & t\ge\pi\end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=0$

3) $y''+y=\begin{cases}2 & 0\le t<3\\ 3t-7 & t\ge 3\end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=0$

4) $y''+2y'+y=\begin{cases}0 & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ \cos 2x & x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=0$

5) $y''+4y=\begin{cases}1 & \pi\le t<2\pi\\ 0 & 0\le t<\pi, 2\pi\le t\end{cases} \qquad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=0$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

6) $y''+y=\begin{cases} x & 0\le x<4 \\ 3 & x\ge 4 \end{cases}$ $\qquad y(0)=y'(0)=0$

7) $ty''-4ty'-4y=0$ $\qquad y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$

8) $(t+2)y''+(t+1)y'-y=0$ $\qquad y(0)=y'(0)=0$

9) $y''+2y'+y=te^{t}$ $\qquad y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$

10) $ty''-(t-1)y'+y=2-2e^{t}$ $\qquad y(0)=3\ ,\ y'(0)=-3$

11) $ty''-(t+2)y'+3y=t-1$ $\qquad y(0)=y'(0)=0$

(۲) اگر $L\{\sin\sqrt{t}\}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}e^{-\frac{1}{4s}}$ باشد، معادله $4ty''+2y'+y=0$ $(y(0)=0)$ را حل کنید.

(۳) معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک لاپلاس حل کنید.

1) $ty''+2(2t-1)y'+4(t-1)y=t\,e^{-2t}$ $\qquad y(0)=0$

2) $y'+3y=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ 2-t & 1\le t<2 \end{cases}$ $\qquad f(t+2)=f(t) \quad y(0)=1$

۵-۱۲- پیچش (تلفیق یا کانولوشن) :

کانولوش دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ را بصورت $(f*g)(t)=\int_0^t f(t-x)g(x)dx$ تعریف می کنند.

خواص کانولوشن :

1) $f*g=g*f$

2) $g*(f+h)=g*f+g*h$

3) $f*(g*h)=(f*g)*h$

4) $f*0=0*f=0$

تبدیل لاپلاس کانولوشن دو تابع : اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ و $L\{g(t)\}=G(s)$ موجود باشند آنگاه :

$$L(f*g)=L\left\{\int_0^t f(t-x)g(x)dx\right\}=L\{f(t)\}L\{g(t)\}=F(s)G(s)$$

اثبات :

$$L\{(f*g)_t\}=\int_0^\infty e^{-st}(f*g)_t\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t (f-x)\,g(x)dx\,dt$$

$$=\int_0^\infty\int_0^t e^{-st}f(t-x)g(x)dx\,dt\overset{*}{=}\int_0^\infty\int_x^\infty e^{-st}f(t-x)g(x)dx\,dt$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

* تغییر ترتیب

$$\xrightarrow{t-x=u} =\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+x)} f(u)g(x)du\,dx$$

$$=\left(\int_0^\infty e^{-su}f(u)du\right)\left(\int_0^\infty e^{-sx}\, g(x)dx\right)=F(s)G(s)$$

مثال (۴۶) لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1)\ f(t)=e^{-t}\int_0^t xe^x dx \xrightarrow{\text{کانولوشن}} L\{f(t)\}=L\left\{e^{-t}\int_0^t xe^{-(t-x)}dx\right\}$$

$$F(s)=L\left\{t*e^{-t}\right\} \rightarrow F(s)=\frac{1}{s^2}\frac{1}{s+1}$$

$$2)\ f(t)=\int_0^t \sin x(t-x)^3dx \rightarrow L\{f(t)\}=L\left\{\int_0^t \sin x(t-x)^3dx\right\}$$

$$F(s)=L\left\{\sin t*t^3\right\} \rightarrow F(s)=\frac{1}{s^2+1}\left(\frac{3!}{s^4}\right)=\frac{6}{s^4(s^2+1)}$$

نتیجه مهم کانولوشن :

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=(f*g)(t)=\int_0^t f(t-x)g(x)dx$$

فرمول فوق روشی مهم و سریع برای محاسبه لاپلاس معکوس است.

مثال (۴۷) لاپلاس معکوس های توابع زیر را به روش کانولوشن محاسبه کنید.

$$1)\ F(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\right\} \rightarrow f(t)=\cos t*\sin t$$

$$f(t)=\int_0^t \cos(t-x)\sin x\,dx \rightarrow f(t)=\frac{1}{2}\int_0^t[\sin t+\sin(t-2x)]dx$$

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[(\sin t)x\Big|_0^t+\frac{1}{2}\cos(t-2x)\Big|_0^t\right]$$

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[t\sin t+\frac{1}{2}(\cos t-\cos t)\right] \rightarrow f(t)=\frac{1}{2}t\sin t$$

$$2)\ F(s)=\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2} \rightarrow F(s)=\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+a^2}\right\} \rightarrow f(t)=\cos at*\cos at$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f(t)=\int_0^t \cos a(t-x)\cos ax\,dx=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos at+\cos(at-2ax)]dx$$

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[(\cos at)x\Big|_0^t-\frac{1}{2a}\sin(at-2ax)\Big|_0^t\right]$$

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[t\cos at-\frac{1}{2a}(\sin(-at)-\sin at)\right]$$

$$f(t)=\frac{1}{2}t\cos at+\frac{1}{2a}\sin at$$

---

3) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^3(s^2+1)}$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}=\left(\frac{1}{2!}t^2*\sin t\right)=\frac{1}{2}\int_0^t\sin(t-x)x^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2\cos(t-x)+2x\sin(t-x)-2\cos(t-x)\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{2}\left[t^2+-2-(0+0-2\cos t)\right]=\frac{1}{2}t^2-1+\cos t$$

حال : $L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{e^{-s}\left(\dfrac{1}{s^3(s^2+1)}\right)\right\}$

$$f(t)=\left[\frac{1}{2}(t-1)^2-1+\cos(t-1)\right]u_1(t)$$

---

4) $F(s)=\dfrac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$

نکته : $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s}}\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}*e^t\ \rightarrow\ f(t)=\int_0^t e^{t-x}\frac{1}{\sqrt{\pi x}}dx\ \xrightarrow[x=u^2]{\sqrt{x}=u}\ f(t)=\frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}du$$

---

5) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+2}\ln\dfrac{s^2+4}{s^2}\quad\rightarrow\ F(s)=F_1(s)\cdot F_2(s)$

$$F_1(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}\ \rightarrow\ L^{-1}\{F_1(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}\ \rightarrow\ f_1(t)=e^{-t}\sin t$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$F_2(s)=\ln\frac{s^2+4}{s^2} \quad\to\quad F_2'(s)=\frac{2s}{s^2+4}-\frac{2}{s} \quad\to\quad f_2(t)=\frac{2-2\cos 2t}{t}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\{F_1(s)\cdot F_2(s)\} \quad\to\quad f(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

$$f(t)=\int_0^t e^{-(t-x)}\sin(t-x)\left(\frac{2-2\cos 2x}{x}\right)dx$$

$$6)\ F(s)=\frac{1}{(s^2+4s+13)^2} \quad\to\quad F(s)=\frac{1}{[(s+2)^2+9]^2}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+2)^2+9]^2}\right\}$$

$$f(t)=e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\cdot\frac{1}{s^2+9}\right\} \quad\to\quad f(t)=\frac{e^{-2t}}{9}(\sin 3t*\sin 3t)$$

$$f(t)=\frac{e^{-2t}}{9}\int_0^t\sin 3(t-x)\sin 3x\,dx=\frac{e^{-2t}}{-18}\int_0^t[\cos 3t-\cos(3t-6x)]\,dx$$

$$f(t)=\frac{e^{-2t}}{-18}\left[(\cos 3t)x\Big|_0^t+\frac{1}{6}\sin(3t-6x)\Big|_0^t\right]$$

$$f(t)=\frac{e^{-2t}}{-18}\left[t\cos 3t+\frac{1}{6}[\sin(-3t)-\sin 3t]\right] \xrightarrow{-\sin\theta=\sin(-\theta)} f(t)=\frac{e^{-2t}}{-18}\left[t\cos 3t-\frac{1}{3}\sin 3t\right]$$

۵-۱۲- تمرین : لاپلاس معکوس های توابع زیر را بیابید.

$$1)\ F(s)=\frac{1}{s^4(s^2+4)}$$

$$2)\ F(s)=\frac{1}{\sqrt{s}(s+3)}$$

$$3)\ F(s)=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$4)\ F(s)=\frac{1}{(s^2+4)^2}$$

$$5)\ F(s)=\frac{1}{(s-4)^2}\cot^{-1}(s-1)$$

$$6)\ F(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}\cot^{-1}(s+3)$$

$$7)\ F(s)=\frac{s}{s^2+1}\ln\left(\frac{s}{s-1}\right)$$

$$8)\ F(s)=\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)^2}$$

$$9)\ F(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+2)}\cot^{-1}s$$

$$10)\ F(s)=\frac{1}{(s^2+2s+10)^2}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵-۱۳- معادلات انتگرالی :

معادلات انتگرالی که مشتق تابع مجهول نیز در معادله وجود داشته باشد، معادلات دیفرانسیل انتگرالی نامیده می شود.

برای حل معادلات انتگرالی از فرمول کانولوشن استفاده می کنیم.

$$\left(L\left\{\int_0^t f(t-x)g(x)dx\right\}=F(s)G(s)\right)$$

مثال (۴۸) معادلات انتگرالی زیر را حل کنید.

$$1)\ y(t)=t^2+\int_0^t \sin(t-\lambda)y(\lambda)d\lambda$$

$$L\{y(t)\}=L\{t^2\}+L\left\{\int_0^t \sin(t-\lambda)y(\lambda)d\lambda\right\}$$

$$L\{y\}=\frac{2!}{s^3}+L\{\sin t * y\} \rightarrow L\{y\}=\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s^2+1}L\{y\}$$

$$L\{y\}\left(1-\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{2}{s^3} \rightarrow L\{y\}\left(\frac{s^2+1-1}{s^2+1}\right)=\frac{2}{s^3}$$

$$L\{y\}=\frac{2(s^2+1)}{s^5} \rightarrow L\{y\}=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^5} \rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{2}{s^5}\right\} \rightarrow y(t)=t^2+\frac{t^4}{12}$$

$$2)\ y''(t)=-t+\int_0^t (t-x)y(x)dx \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=1$$

$$L\{y''(t)\}=-L\{t\}+L\left\{\int_0^t (t-x)y(x)dx\right\} \rightarrow s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)=-\frac{1}{s^2}+L\{t*y\}$$

$$s^2L\{y\}-1=-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}L\{y\} \rightarrow L\{y\}\left(s^2-\frac{1}{s^2}\right)=\frac{-1}{s^2}+1 \rightarrow L\{y\}\left(\frac{s^4-1}{s^2}\right)=\frac{s^2-1}{s^2}$$

$$L\{y\}=\frac{s^2-1}{s^4-1} \rightarrow L\{y\}=\frac{1}{s^2+1} \rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \rightarrow y(t)=\sin t$$

$$3)\ y''+y'=\cos t+\int_0^t \sin(t-x)y'(x)dx \qquad y(0)=y'(0)=0$$

$$L\{y''\}+L\{y'\}=L\{\cos t\}+L\{\sin t * y'(t)\}$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+sL\{y\}-y(0)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}(sL\{y\}-y(0))$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$L\{y\}\left(s^2+s-\frac{s}{s^2+1}\right)=\frac{s}{s^2+1}$$

$$L\{y\}\left(\frac{s^4+s^3+s^2+s-s}{s^2+1}\right)=\frac{s}{s^2+1}$$

$$L\{y\}=\frac{1}{s(s^2+s+1)} \rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+s+1)}\right\}$$

$$\rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1}\right\} \xrightarrow[C=-1]{A=1,B=-1} y=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\}$$

$$\rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$y=1-L^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}-\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{s+1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$y=1-e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

---

4) $e^x y(x)=x+\int_0^x e^t\, y(t)\sin(x-t)\,dt$

$$\xrightarrow{\div e^x} y(x)=e^{-x}x+\int_0^x e^{t-x}\, y(t)\sin(x-t)\,dt$$

$$L\{y(x)\}=L\{e^{-x}x\}+L\left\{\int_0^x e^{-(x-t)}\, y(t)\sin(x-t)\,dt\right\}$$

$$L\{y\}=\frac{1}{(s+1)^2}+L\{e^{-x}\sin x * y(x)\} \rightarrow L\{y\}=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^2+1}\cdot L\{y\}$$

$$L\{y\}\left(1-\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)=\frac{1}{(s+1)^2} \rightarrow L\{y\}=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^4}$$

$$y=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^4}\right\} \rightarrow y(x)=e^{-x}x+\frac{1}{6}e^{-x}x^3$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

5) $y' = \sin x + \cos x \int_0^x y(t)\cos t\,dt + \sin x \int_0^x y(t)\sin t\,dt \qquad y(0)=0$

$$y' = \sin x + \int_0^x y(t)\cos x \cos t\,dt + \int_0^x y(t)\sin x \sin t\,dt$$

تبدیل به حاصل جمع :

$$y' = \sin x + \frac{1}{2}\int_0^x y(t)[\cos(x+t)+\cos(x-t)]dt - \frac{1}{2}\int_0^x y(t)[\cos(x+t)-\cos(x-t)]dt$$

$$y' = \sin x + \frac{1}{2}\int_0^x y(t)[\cos(x+t)+\cos(x-t)-\cos(x+t)+\cos(x-t)]dt$$

$$y' = \sin x + \int_0^x y(t)\cos(x-t)\,dt \rightarrow L\{y'\} = L\{\sin x\} + L\left\{\int_0^x y(t)\cos(x-t)\,dt\right\}$$

$$sL\{y\} - y(0) = \frac{1}{s^2+1} + L\{y(t)*\cos t\} \rightarrow sL\{y\} = \frac{1}{s^2+1} + L\{y\}\frac{s}{s^2+1}$$

$$L\{y\}\left(s - \frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1} \rightarrow L\{y\}\left(\frac{s^3+s-s}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$L\{y\} = \frac{1}{s^3} \rightarrow y(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} \rightarrow y(x) = \frac{1}{2}x^2$$

---

6) $\int_0^t \frac{y(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\,d\lambda = 1 + t + t^2$

نکته : $L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

$$L\left\{\int_0^t \frac{y(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\,d\lambda\right\} = L\{1\} + L\{t\} + L\{t^2\} \rightarrow L\left\{y * \frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3}$$

$$L\{y\}\sqrt{\frac{\pi}{s}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3} \rightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{s\sqrt{s}} + \frac{2}{s^2\sqrt{s}}\right\}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\begin{cases} L^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s}}\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \\ L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right\}=\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}L^{-1}\left\{\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}}\right\}=\dfrac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}} \\ L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^{\frac{5}{2}}}\right\}=2\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}L^{-1}\left\{\dfrac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}\right\}=\dfrac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$y(t)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}+2\sqrt{t}+\frac{8}{3}t\sqrt{t}\right]$$

۵-۱۳-۱- تمرین : معادلات انتگرالی زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید.

1) $y'(t)=e^t-\int_0^t y(x)\,dx \quad , \quad y(0)=1$

2) $y(t)=e^{-t}-2\int_0^t \cos(t-u)y(u)\,du$

3) $y'=e^x+\cos x\int_0^x y(t)\cos t\;dt+\sin x\int_0^x y(t)\sin t\;dt \quad , \quad y(0)=0$

4) $y''(t)=\sin t\int_0^t \cos x\cosh x\;dx-\cos t\int_0^t \sin x\cosh x\;dx \quad , \quad y(0)=y'(0)=0$

5) $\int_0^t \dfrac{y(x)}{(t-x)^{\frac{1}{3}}}\;dx=t(t+1)$

6) $e^t y(t)=t+\int_0^t e^x y'(x)\cos(t-x)\,dx \quad , \quad y(0)=0$

7) $y(t)=2+\int_0^t e^{t-x}y'(x)\;dx \quad , \quad y(0)=2$

8) $y'(t)+\int_0^t y(x)\cos(t-x)dx=\cos t \quad , \quad y(0)=0$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا