فصل پنجم : تبدیل لاپلاس

۵-۱- مقدمه :

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ با دامنه $t \geq 0$ را بصورت $L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-St}f(t)dt$ تعریف می کنیم و آن را با $F(S)$ نشان می دهیم. اگر این انتگرال موجود باشد، تابع $F(S)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و تابع $f(t)$ را لاپلاس معکوس $F(S)$ گوییم و نشان می دهیم :

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-St}f(t)dt=F(S) \qquad S>0$$

$$L\{f(t)\}=F(S) \quad , \quad L^{-1}\{F(S)\}=f(t)$$

تبدیل لاپلاس توابع را همیشه با حروف بزرگ متناظر نشان می دهیم یعنی تبدیل لاپلاس $g(t)$ را با $G(S)$ و تبدیل لاپلاس $h(t)$ را با $H(S)$ و ...

نکته : تبدیل لاپلاس و معکوس تبدیل لاپلاس دارای خاصیت خطی اند.

$$L\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+\cdots+c_nf_n(t)\}=c_1L\{f_1(t)\}+c_2L\{f_2(t)\}+\cdots+c_nL\{f_n(t)\}$$

$$L^{-1}\{c_1F_1(S)+c_2F_2(S)+\cdots\}=c_1L^{-1}\{F_1(S)\}+c_2L^{-1}\{F_2(S)\}+\cdots$$

شرایط وجود تبدیل لاپلاس : اگر $f(t)$ روی هر فاصله متناظر $[0,T]$ پیوسته قطعه ای باشد و برای هر $t \geq T$ هم مرتبه نمایی با e^{at} باشد لاپلاس $f(t)$ وجود دارد.

نکته : اگر $L\{f(t)\}=F(S)$ ، باید $\lim\limits_{S\to\infty}F(S)=0$

نکته : اگر $\lim\limits_{S\to\infty}F(S)\neq 0$ باشد آنگاه $F(S)$ لاپلاس وارون ندارد.

اثبات فرمول های لاپلاس :

1) $L\{a\}=\dfrac{a}{S}$ (a عدد ثابت)

اثبات :

$$L\{a\}=\int_0^\infty ae^{-St}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b ae^{-St}dt \xrightarrow{S>0} \lim_{b\to\infty}-\frac{a}{S}e^{-St}\Big|_0^b=\frac{a}{S} \qquad (S>0)$$

2) $L\{t^n\}=\dfrac{n!}{S^{n+1}}\overset{or}{=}\dfrac{\Gamma(n+1)}{S^{n+1}}$ (n صحیح و $n>-1$)

اثبات :

$$L\{t^n\}=\int_0^\infty e^{-St}t^n dt \overset{\text{جز به جز}}{=} -\frac{t^ne^{-st}}{S}\Big|_0^\infty+\frac{n}{S}\int_0^\infty e^{-St}t^{n-1}dt \overset{\text{دوباره جز به جز}}{=}$$

$$\frac{n}{S}L\{t^{n-1}\}=\frac{n}{S}\left(\frac{n-1}{S}\right)L\{t^{n-2}\}=\cdots=\frac{n!}{S^n}L\{1\}=\frac{n!}{S^n}L\left\{\frac{1}{S}\right\}=\frac{n!}{S^{n+1}}\quad (S>0)$$

$$3)\ L\{e^{at}\}=\frac{1}{S-a}$$

$$L\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-St}e^{at}\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{t(a-S)}\,dt=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{a-S}e^{(a-S)t}\Big|_0^b \xrightarrow{S>a} =\frac{1}{S-a}\quad (S>a)$$

$$4)\ L\{\sin at\}=\frac{a}{S^2+a^2}\quad (S>0)\qquad 5)\ L\{\cos at\}=\frac{S}{S^2+a^2}\quad (S>0)$$

برای اثبات فرمول لاپلاس این دو تابع یا می توانیم مستقیم از روی تعریف لاپلاس عمل کنیم یا از طریق فرمول اویلر بدست آوریم.

اثبات :

$$e^{iat}=\cos at+i\sin at \longrightarrow L\{e^{iat}\}=L\{\cos at\}+iL\{\sin at\}$$

$$L\{e^{iat}\}=\frac{1}{S-ia}\overset{*}{=}\frac{S+ia}{S^2+a^2}=\frac{S}{S^2+a^2}+i\frac{a}{S^2+a^2}$$

* ضرب مزدوج

پس نتیجه می گیریم :

$$L\{\cos at\}=\frac{S}{S^2+a^2}\quad \text{و}\quad L\{\sin at\}=\frac{a}{S^2+a^2}$$

$$6)\ L\{\sinh at\}=\frac{a}{S^2-a^2}\quad (S>|a|)\qquad 7)\ L\{\cosh at\}=\frac{S}{S^2-a^2}\quad (S>|a|)$$

$$L\{\cosh at\}=L\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S-a}+\frac{1}{S+a}\right)=\frac{S}{S^2-a^2}$$

$$L\{\sinh at\}=L\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S-a}-\frac{1}{S+a}\right)=\frac{a}{S^2-a^2}$$

مثال (۱) لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1)\ L\{t^2\}=\frac{2!}{S^3}\qquad 5)\ L\{\sin 2t\}=\frac{2}{S^2+4}$$

$$2)\ L\{3\}=\frac{3}{S}\qquad 6)\ L\{\cos\sqrt{\pi}\,t\}=\frac{S}{S^2+\pi}$$

$$3)\ L\{e^{3t}\}=\frac{1}{S-3}\qquad 7)\ L\{\sinh t\}=\frac{1}{S^2-1}$$

$$4)\ L\{e^{-2t}\}=\frac{1}{S+2}\qquad 8)\ L\{\cosh 4t\}=\frac{S}{S^2-16}$$

مثال (۲) لاپلاس توابع زیر را بیابید.

1) $f(t)=t^2+e^{3t}+\cos 4t+3 \rightarrow$

$$L\{f(t)\}=L\{t^2\}+L\{e^{3t}\}+L\{\cos 4t\}+L\{3\}$$

$$\rightarrow F(S)=\frac{2!}{S^3}+\frac{1}{S-3}+\frac{S}{S^2+16}+\frac{3}{S}$$

2) $f(t)=t^6+e^{-2t}+\sin 2t+\cosh 3t \rightarrow$

$$L\{f(t)\}=L\{t^6\}+L\{e^{-2t}\}+L\{\sin 2t\}+L\{\cosh 3t\}$$

$$\rightarrow F(S)=\frac{6!}{S^7}+\frac{1}{S+2}+\frac{2}{S^2+4}+\frac{S}{S^2-9}$$

3) $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 0 & x\ge 1 \end{cases}$

$$L\{f(x)\}=\int_0^\infty e^{-Sx}f(x)dx=\int_0^1 xe^{-Sx}dx+0=\left.\frac{xe^{-Sx}}{-S}\right|_0^1-\left.\frac{e^{-Sx}}{S^2}\right|_0^1$$

$$\rightarrow F(S)=-\frac{e^{-S}}{S}-\frac{e^{-S}}{S^2}+\frac{1}{S^2}$$

۵-۱-۱- تمرین : لاپلاس توابع زیر را بیابید.

1) $f(t)=3t^8+\cos 2t+\cosh 2t$

2) $f(t)=e^{-3t}+t^2+6t-3$

3) $f(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ x & x\ge 1 \end{cases}$

۵-۲- قضایای تبدیلات لاپلاس :

۵-۲-۱- قضیه انتقال (انتقال بر محور S ها) :

$$L\{e^{at}f(t)\}=L\{f(t)\}\Big|_{S-a}=F(S-a)$$

اثبات :

$$L\{e^{at}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-Sx}e^{at}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(S-a)}f(t)dt \xrightarrow{S-a=S'}$$

$$=\int_0^\infty e^{-S'x}f(t)dt=F(S')=F(S-a)$$

نکته : می توان نتیجه گرفت که برای محاسبه $L\{e^{at}f(t)\}$ ابتدا با e^{at} کاری نداریم، $L\{f(t)\}$ را محاسبه می کنیم سپس متغیر S را به $S-a$ تغییر می دهیم :

مثال (۳) لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1)\ f(t)=e^{2t}\sin 2t \rightarrow L\{f(t)\}=L\{e^{2t}\sin 2t\}$$

$$\rightarrow F(S)=\left.\frac{2}{S^2+4}\right|_{S-2}=\frac{2}{(S-2)^2+4}$$

$$2)\ f(t)=e^{-t}\cos 4t \rightarrow L\{f(t)\}=L\{e^{-t}\cos 4t\}$$

$$\rightarrow F(S)=\left.\frac{S}{S^2+16}\right|_{S+1} \rightarrow F(S)=\frac{S+1}{(S+1)^2+16}$$

$$3)\ f(t)=\cosh 3t\cos 2t \rightarrow f(t)=\frac{1}{2}\left(e^{3t}+e^{-3t}\right)\cos 2t$$

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{2}L\{e^{3t}\cos 2t\}+\frac{1}{2}\left(e^{-3t}\cos 2t\right)$$

$$F(s)=\frac{1}{2}\frac{s-3}{(s-3)^2+4}+\frac{1}{2}\frac{s+3}{(s+3)^2+4}$$

۵-۲-۲- قضیه دوم : مشتق تبدیل لاپلاس :

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ آنگاه

$$L\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)=(-1)^n F^{(n)}(s) \qquad (\text{عدد صحیح و مثبت } n)$$

به عنوان مثال :

$$L\{tf(t)\}=-F'(s)$$

$$L\{t^2 f(t)\}=F''(s)$$

اثبات :

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \rightarrow \quad \text{مشتق نسبت به } s$$

$$\frac{d}{ds}L\{f(t)\}=\int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt=-L\{tf(t)\}\rightarrow s \quad \text{مشتق دوباره نسبت به}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}L\{f(t)\}=\int_0^\infty t^2e^{-st}f(t)dt=L\{t^2 f(t)\}$$

به همین ترتیب با n بار مشتق گیری نسبت به s خواهیم داشت :

$$\frac{d^n}{ds^n}L\{f(t)\}=(-1)^n\int_0^\infty t^n e^{-st}f(t)dt=(-1)^n L\{t^n f(t)\}$$

$$L\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(F(s))$$

مثال (۴) لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ f(t)=t\sin t \rightarrow L\{f(t)\}=L\{t\sin t\}\rightarrow F(s)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\rightarrow F(s)=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$2)\ L\{t^2\sin 2t\}=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)=\frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

$$3)\ f(t)=te^{-t}\cos 2t \rightarrow L\{f(t)\}=L\{te^{-t}\cos 2t\}$$

$$F(s)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right)=\frac{s^2+2s-3}{(s^2+2s+5)^2}$$

نکته : در مورد لاپلاس تابع $f(t)=t^n e^{at}$ الویت با تابع انتقال است :

$$4)\ f(t)=t^6 e^{3t} \rightarrow L\{f(t)\}=L\{e^{3t}t^6\} \rightarrow F(s)=\frac{6!}{(s-3)^7}$$

۵-۲-۲- قضیه سوم : (تبدیل لاپلاس انتگرال) :

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ موجود باشد، آنگاه

$$L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}=\frac{1}{s}F(s)$$

اثبات : $L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(x)dx\right)dt \rightarrow$ جز به جز

$$\begin{cases} u=\int_0^t f(x)dx \rightarrow du=f(t)dt \\ dv=e^{-st}dt \rightarrow v=-\frac{1}{s}e^{-st}\end{cases}$$

$$L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}=-\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(x)dx\Big|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}=\frac{1}{s}F(s)$$

توجه : برای محاسبه لاپلاس انتگرال یعنی $L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}$ ، ابتدا انتگرال را کنار گذاشته و لاپلاس تابع داخل انتگرال را می یابیم سپس حاصل را (به خاطر انتگرال) در $\frac{1}{s}$ ضرب می کنیم.

مثال (۵) محاسبه کنید :

$$1)\ L\left\{\int_0^t \sinh 4x\,dx\right\}=\frac{1}{s}\left(\frac{4}{s^2-16}\right)$$

$$2)\ L\left\{\int_0^t \left(e^x-\cos x+1\right)dx\right\}=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s}\right)$$

۵-۲-۴- قضیه (۴) انتگرال تبدیل لاپلاس :

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد داریم و $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$ موجود باشد :

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{+\infty} L\{f(t)\}dp \ \rightarrow\ L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{+\infty} F(p)dp$$

اثبات :

$$\int_s^{+\infty} F(p)dp=\int_s^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-pt}f(t)dt\,dp=\int_0^{\infty}\int_s^{\infty} e^{-pt}f(t)dp\,dt$$

$$=\int_0^{\infty} f(t)\left(\int_s^{\infty} e^{-pt}\ dp\right)dt=\int_0^{\infty} f(t)\left(-\frac{1}{t}e^{-pt}\right)_s^{\infty}dt=\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-st}dt=L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

توجه : برای محاسبه $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$، t رادر مخرج نادیده می گیریم، ابتدا $L\{f(t)\}$ را محاسبه می کنیم و سپس از حاصل (به خاطر t مخرج) انتگرال می گیریم :

مثال (۶) تبدیل لاپلاس تابع $\frac{\sin t}{t}$ را بیابید.

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_s^{\infty}\frac{1}{p^2+1}dp=\tan^{-1}p\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s=\cot^{-1}s=\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

نکته : $\tan^{-1}u+\cot^{-1}u=\frac{\pi}{2}$ و $\tan^{-1}u=\cot^{-1}\frac{1}{u}$ و $\cot^{-1}u=\tan^{-1}\frac{1}{u}$

مثال (۷) تبدیل لاپلاس تابع $\dfrac{\cos t-1}{t}$ را بیابید.

$$L\left\{\frac{\cos t-1}{t}\right\}=\int_s^\infty\left(\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{p}\right)dp=\frac{1}{2}\ln\left|p^2+1\right|-\ln p\Big|_s^\infty$$

$$=\lim_{u\to\infty}\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}\Bigg|_s^u=0-\ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}=\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$$

۵-۲-۵- مثال های تکمیلی از مبحث لاپلاس :

مثال (۸) لاپلاس توابع زیر را بیابید ؟

$$1)\ L\{\cos 2t\cos t\}=\frac{1}{2}L\{\cos 3t+\cos t\}=\frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+9}+\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$2)\ L\{\sinh 2t\cos 4t\}=\frac{1}{2}L\{(e^{2t}-e^{-2t})\cos 4t\}=\frac{1}{2}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+16}-\frac{s+2}{(s+2)^2+16}\right]$$

$$3)\ L\{\sin^2 t\}=L\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\}=\frac{1}{2}(L\{1\}-L\{\cos 2t\})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$4)\ L\{\sin(at+b)\}=L\{\sin at\cos b+\cos at\sin b\}=\cos b\frac{a}{s^2+a^2}+\sin b\frac{s}{s^2+a^2}$$

مثال (۹) لاپلاس توابع زیر را بیابید ؟

$$f(x)=xe^{2x}\int_0^x e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}dt$$

$$L\{e^{-2t}(1-e^{-t})\}=L\{e^{-2t}-e^{-3t}\}=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

$$L\left\{e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}\right\}\overset{\text{قضیه}4}{=}\int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{p+2}-\frac{1}{p+3}\right)dp=$$

$$\lim_{u\to\infty}(\ln(p+2)-\ln(p+3))_s^u=\lim_{u\to\infty}\ln\frac{p+2}{p+3}\Bigg|_s^u=\lim_{u\to\infty}\ln\frac{u+2}{u+3}-\ln\frac{s+2}{s+3}=\ln\frac{s+3}{s+2}$$

$$L\left\{\int_0^x e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right\}\overset{\text{قضیه}3}{=}\frac{1}{s}\ln\frac{s+3}{s+2}$$

$$L\left\{e^{2x}\int_0^x e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right\}\overset{\text{قضیه}1}{=}\frac{1}{s-2}\ln\frac{s+1}{s}$$

$$L\{f(x)\}=L\left\{x e^{2x}\int_0^x e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right\} \rightarrow F(s)=-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s-2}\ln\frac{s+1}{s}\right]$$

مثال (۱۰) لاپلاس تابع زیر را بیابید ؟

$$f(t)=\frac{\sin 4t}{t}+e^t\int_0^t \frac{\cos u}{u}\sinh u\,du$$

$$f_1(t)=\frac{\sin 4t}{t} \quad , \quad f_2(t)=e^t\int_0^t \frac{\cos u}{u}\sinh u\,du$$

$$L\{f_1(t)\}=L\left\{\frac{\sin 4t}{t}\right\} \rightarrow F_1(s)=\int_s^\infty \frac{4}{p^2+16}dp=\frac{4}{4}\tan^{-1}\frac{p}{4}\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{4}=\cot^{-1}\frac{s}{4}$$

$$L\{f_2(t)\}=L\left\{\frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{\cos u}{u}\left(e^u-e^{-u}\right)du\right\}=F_2(s)$$

$$L\{\cos u\left(e^u-e^{-u}\right)\}=\frac{s-1}{(s-1)^2+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$L\left\{\frac{\cos u\left(e^u-e^{-u}\right)}{u}\right\}=\int_s^\infty\left(\frac{p-1}{(p-1)^2+1}-\frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right)dp$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left[\ln\left((p-1)^2+1\right)-\ln\left((p+1)^2+1\right)\right]_s^A=\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left[\ln\frac{(p-1)^2+1}{(p+1)^2+1}\right]_s^A$$

$$=\frac{1}{2}\left[0-\ln\frac{(s-1)^2+1}{(s+1)^2+1}\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{(s+1)^2+1}{(s-1)^2+1}$$

$$L\left\{\int_0^t \frac{\cos u}{u}\left(e^u-e^{-u}\right)du\right\}=\frac{1}{2s}\ln\frac{(s+1)^2+1}{(s-1)^2+1}$$

$$L\{f_2(t)\}=L\left\{\frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{\cos u\left(e^u-e^{-u}\right)du}{u}\right\}$$

$$F_2(s)=\frac{1}{4(s-1)}\ln\frac{s^2+1}{(s-2)^2+1}$$

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s) \rightarrow F(s)=\cot^{-1}\frac{s}{4}+\frac{1}{4(s-1)}\ln\frac{s^2+1}{(s-2)^2+1}$$

مثال (۱۱) لاپلاس تابع زیر را بیابید.

$$f(t)=t^2\int_0^t e^{2x-t}\sin 5x\,dx \;\rightarrow\; f(t)=t^2e^{-t}\int_0^t e^{2x}\sin 5x\,dx$$

$$L\{\sin 5x\}=\frac{5}{s^2+25}\quad,\quad L\{e^{2x}\sin 5x\}=\frac{5}{(s-2)^2+25}$$

$$L\left\{\int_0^t e^{2x}\sin 5x\,dx\right\}=\frac{1}{s}\left[\frac{5}{(s-2)^2+25}\right] \;\rightarrow\; L\left\{e^{-t}\int_0^t e^{2x}\sin 5x\,dx\right\}=\frac{1}{s+1}\left[\frac{5}{(s-1)^2+25}\right]$$

$$L\{f(t)\}=L\left\{t^2e^{-t}\int_0^t e^{2x}\sin 5x\,dx\right\} \;\rightarrow\; F(s)=\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s+1}\left(\frac{5}{(s-1)^2+25}\right)\right]$$

مثال (۱۲) اگر $L\{f(t)\}=F(s)$، نشان دهید $L\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}=aF(as)$

$$L\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}f\left(\frac{t}{a}\right)dt \;\rightarrow\; \frac{t}{a}=u \;\rightarrow\; dt=a\,du$$

$$\rightarrow\; a\int_0^\infty e^{-asu}f(u)\,du=a\int_0^\infty e^{-asu}f(u)\,du=aF(as)$$

۵-۲-۶- تمرین :

(۱) لاپلاس توابع زیر را بگیرید.

1) $f(t)=\cos^2 t$

2) $f(t)=\sin^3 t$

3) $f(t)=t^2e^{3t}\cos 2t$

4) $f(t)=\dfrac{2(1-\cos t)}{t}$

5) $f(t)=te^{-t}\int_0^t \dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x}dx$

6) $f(t)=\sinh^2 2t$

7) $f(t)=\sinh at\cos at$

8) $f(x)=\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x}$

9) $f(t)=\begin{cases}\sin 3t & 0\le t<\pi\\ 3 & t\ge\pi\end{cases}$

10) $f(t)=\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$

11) $f(x)=\int_0^x e^t(t^2+\sin 2t)dt$

12) $f(x)=(e^x+1)^2+\sin^2 x\sin 2x$

13) $f(t)=\sin 2t\cos 2t+\sin^3 t$

(۲) نشان دهید $L\{f(t)\cosh at\}=\frac{1}{2}[F(s-a)+F(s+a)]$ سپس تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

1) $f(t)=\sin at\cosh at$

2) $f(t)=\cos^2 t\cosh t$

۵-۳- حل انتگرال ها به کمک تعریف لاپلاس :

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = L\{f(t)\} = F(s)$$

مثال (۱۴) حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید ؟

$$1)\ \int_0^\infty e^{-2t}\cos 3t\,dt = L\{\cos 3t\}_{s=2} = \left.\frac{s}{s^2+9}\right|_{s=2} = \frac{2}{13}$$

$$2)\ \int_0^\infty x e^{-4x}\cos 2x\,dx = L\{x\cos 2x\}_{s=4} = \left.\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}\right|_{s=4} = \frac{12}{400}$$

$$3)\ \int_0^\infty e^{-3x}x\sinh 2x\,dx = \int_0^\infty e^{-3x}x\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-x}x\,dx - \int_0^\infty e^{-5x}x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left[\left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=1} - \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=5}\right] = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{25}\right) = \frac{12}{25}$$

مثال (۱۵) نشان دهید : $\left(\int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin t}{t}dt = \cot^{-1} a\right)$

$$\int_0^\infty e^{-at}\frac{\sin t}{t}dt = L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}_{s=a} \overset{*}{=} \left.\cot^{-1} s\right|_{s=a} = \cot^{-1} a$$

$$*\quad L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{ds}{s^2+1} = \left.\tan^{-1} s\right|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \cot^{-1} a$$

مثال (۱۶) حاصل انتگرال های زیر را بیابید ؟

$$1)\ \int_0^\infty \frac{\sin t}{e^{\sqrt{3}t}t}dt = \int_0^\infty e^{-\sqrt{3}t}\frac{\sin t}{t}dt = L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}_{s=\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$2)\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty e^{0x}\frac{\sin x}{x}dx = L\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}_{s=0} = \left.\tan^{-1}\frac{1}{s}\right|_{s=0} = \tan^{-1}\frac{1}{0} = \tan^{-1}\infty = \frac{\pi}{2}$$

$$3)\ \int_0^\infty 3^{-x}\sin 2x\,dx = \int_0^\infty e^{\ln 3^{-x}}\sin 2x\,dx = \int_0^\infty e^{(-\ln 3)x}\sin 2x\,dx$$

$$= L\{\sin 2x\}_{s=+\ln 3} = \left.\frac{2}{s^2+4}\right|_{s=\ln 3} = \frac{2}{\ln^2 3+4}$$

۵-۳-۱- تمرین :

(۱) حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\cos 2x-\cos 3x)}{x}dx$

2) $\int_0^\infty e^{-2x}\sin x\cos x\,dx$

3) $\int_0^\infty e^{-x}\sinh x\cos x\,dx$

4) $\int_0^\infty e^{-2t}\left(\int_0^t \frac{e^{-2x}-e^{-4x}}{x}dx\right)dt$

5) $\int_0^\infty e^{-x}\sin^2 x\,dx$

6) $\int_0^\infty \int_0^x te^{3t-x}\frac{\sin t}{t}dt\,dx$

(۲) نشان دهید :

1) $\int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin bt}{t}dt=\cot^{-1}\frac{a}{b}$

2) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-4x}}{x}\cos 4x\,dx=-\frac{1}{2}\ln\frac{17}{32}$

3) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}(1-\cos t)}{t}dt=\frac{1}{2}\ln 2$

4) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt=\frac{\ln 5}{4}$

۵-۴- نتیجه ای از قضیه ۴ :

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(p)dp$$

حال کافیست به جای s صفر قرار دهیم :

پس :

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(p)dp$$

مثال (۱۷) حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int_0^\infty e^{-at}\frac{\sin t}{t}dt$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin t}{t}dt=\int_0^\infty L\{e^{-at}\sin t\}dp=\int_0^\infty \frac{1}{(p+a)^2+1}dp=\tan^{-1}(p+a)\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}a=\cot^{-1}a$$

2) $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}\right)dp=\ln(p+a)-\ln(p+b)\Big|_0^\infty=\ln\frac{p+a}{p+b}\Big|_0^\infty=0-\ln\frac{a}{b}=\ln\frac{b}{a}$$

مثال (۱۸) تساوی های زیر را اثبات کنید ؟

1) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{1}{p^2+1}dp = \tan^{-1}p\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

2) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt = \frac{1}{4}\ln 5$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt = \int_0^\infty L\left\{e^{-t}\sin^2 t\right\}dp$$

$$\overset{*}{=}\frac{1}{2}\left[\ln(p+1) - \frac{1}{2}\ln\left((p+1)^2+4\right)\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{\sqrt{(p+1)^2+4}}\Bigg|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - \ln\frac{1}{\sqrt{5}}\right] = -\frac{1}{2}\ln 5^{-1/2} = \frac{1}{4}\ln 5$$

$$* \quad L\left\{\sin^2 t\right\} = L\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$L\left\{e^{-t}\sin^2 t\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right]$$

3) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{\frac{1-\cos x}{x}}{x}dx = \int_0^\infty L\left\{\frac{1-\cos x}{x}\right\}dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)dp = \frac{\pi}{2}$$

$$L\left\{\frac{1-\cos x}{x}\right\} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)dp = \ln p - \frac{1}{2}\ln(p^2+1)\Big|_s^\infty$$

$$= \ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\Bigg|_s^\infty = 0 - \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s} = \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$$

۵-۴-۱- تمرین :

(۱) انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int_0^\infty \frac{e^{-2t}\sin t\cosh t}{t}dt$

3) $\int_0^\infty \frac{\sin ax\cos bx}{x}dx$