د) اگر $f(x)$ بصورت تابع نمایی در تابع دیگر (چندجمله‌ای یا مثلثاتی) باشد:

$$L(D)y = e^{\alpha x}\, g(x) \Rightarrow y_p = e^{\alpha x}\frac{1}{L(D+\alpha)}\, g(x)$$

مثال:

$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x}\sin 3x$$

حل: $r^2 - 5r + 6 = 0 \rightarrow (r-2)(r-3)=0 \rightarrow r=2,\ r=3$ $\quad y_g = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

$$(D^2 - 5D + 6)y = e^{4x}\sin 3x \Rightarrow y_p = e^{4x}\frac{1}{(D+4-2)(D+4-3)}\sin 3x$$

$$\Rightarrow y_p = e^{4x}\frac{1}{D^2+3D+2}\sin 3x$$

$$= e^{4x}\frac{1}{(-3^2)+3D+2}\sin 3x$$

$$= e^{4x}\frac{1}{3D-7}\sin 3x$$

$$= e^{4x}\frac{3D+7}{9D^2-49}\sin 3x$$

$$= e^{4x}\frac{(3D+7)\sin 3x}{9(-3^2)-49} = \frac{e^{4x}}{-130}(9\cos 3x + 7\sin 3x)$$

$$y_p = \frac{e^{4x}}{-130}(9\cos 3x + 7\sin 3x)$$

$$y = y_g + y_p$$

س) اگر $L(\alpha)=0$ و $L(D)y=Ae^{\alpha x}$ آنگاه

$$L(D)=(D-\alpha)^s g(D) \longrightarrow y_p=\frac{Ae^{\alpha x}x^s}{s!\,g(\alpha)}$$

مثال:

$$y''-5y'+6y=e^{3x}$$

حل: $r^2-5r+6=0 \longrightarrow (r-3)(r-2)=0 \to r=3,\ r=2$ $\quad y_g=c_1e^{3x}+c_2e^{2x}$

$$L(D)=(D-3)^{1\to s}\underbrace{(D-2)}_{g(D)}$$

$$y=y_g+y_p$$

$$y_p=\frac{1\,e^{3x}x^1}{1!\,(3-2)}=xe^{3x} \longrightarrow y_p=xe^{3x}$$

ش) اگر $L(D^2)y=K\cos\beta x$ و $L(D^2)y=K\sin\beta x$

که در آن $L(-\beta^2)=0$ یا $L(\beta i)=0$ در این صورت

$$y_p=\frac{Kx^s}{s!\,g(\beta i)}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

تذکر: اگر در تابع $L(D)y=f(x)$، $f(x)$ برحسب sin و cos باشد کل y_p جزء جواب محسوب می‌شود. اگر برحسب sin باشد قسمت موهومی جزء جواب خواهد بود

اگر برحسب cos باشد قسمت حقیقی جزء جواب خواهد بود.

در مثال‌ها این مطلب را خواهید دید.

مثال :

$$y'' + ۹y = ۲\sin ۳x$$

حل: $r^۲ + ۹ = ۰ \Rightarrow r = \pm ۳i \rightarrow \boxed{y_g = c_1 \cos ۳x + c_۲ \sin ۳x}$

$$L(D) = \underbrace{(D - ۳i)}_{۰}\underbrace{(D + ۳i)}_{g(D)} \qquad 1 \rightarrow s$$

$$y_p = \frac{۲ \times x^1}{1!\,۶i}(\cos ۳x + i \sin ۳x)$$

$$= \frac{xi}{-۳}(\cos ۳x + i \sin ۳x)$$

$$y = y_g + y_p$$

$$y_p = \frac{x}{-۳}\,i\cos ۳x + \frac{x}{۳}\sin ۳x \Rightarrow \boxed{y_p = \frac{x}{-۳}\cos ۳x}$$

قسمت موهومی جواب است

مثال

$$y'' + ۹y = ۲\cos ۳x$$

حل: $r^۲ + ۹ = ۰ \rightarrow r = \pm ۳i \qquad \boxed{y_g = c_1 \cos ۳x + c_۲ \sin ۳x}$

$$L(D) = (D - ۳i)(D + ۳i)$$

$$y_p = \frac{۲ \times x^1}{1!\,۶i}(\cos ۳x + i \sin ۳x)$$

$$= \frac{xi}{-۳}(\cos ۳x + i \sin ۳x)$$

$$y_p = \frac{x}{-۳}\,i\cos ۳x + \frac{x}{۳}\sin ۳x \Rightarrow \boxed{y_p = \frac{x}{۳}\sin ۳x}$$

قسمت حقیقی جواب است

$$y = y_g + y_p$$

تذکر $i^۲ = i\,i = -1$

ص۵۸

هـ) حل معادلاتی که در آن $f(x)$ بصورت مجموعی از توابع چندجمله‌ای، نمایی و مثلثاتی باشد تک تک محاسبه کرده و باهم جمع می‌کنیم.

مثال:

$$y'' + 4y = x^2 + x + 2\sin x + e^{-2x}$$

حل: $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i \Rightarrow y_g = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x$

$$y_{p_1} = \frac{1}{4+D^2}(x^2+x) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\left(\frac{D}{2}\right)^2}(x^2+x) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{D^2}{4}\right)(x^2+x)$$

$$y_{p_1} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$$

$$y_{p_2} = \frac{1}{4+D^2}\,2\sin x = \frac{2\sin x}{4+(-1^2)} = \frac{2}{3}\sin x$$

$$y_{p_2} = 2/3 \sin x$$

$$y_{p_3} = \frac{e^{-2x}}{4+D^2} = \frac{e^{-2x}}{4+(-2)^2} = \frac{1}{8}e^{-2x}$$

$$y_{p_3} = \frac{1}{8}e^{-2x}$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} \Rightarrow y_p = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} + \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{8}e^{-2x}$$

$$y = y_g + y_p$$

ک) اگر $L(D)y = x\,u(x)$

$$y_p = \frac{1}{L(D)}\,x\,u(x) \Longrightarrow y_p = x\,\frac{1}{L(D)}\,u(x) - \frac{L'(D)}{(L(D))^2}\,u(x)$$

مثال:

$$y'' - y = x \sin x$$

حل: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 \rightarrow y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

$$y_p = \frac{1}{D^2-1}\,x \sin x \Rightarrow y_p = x\,\frac{1}{D^2-1}\sin x - \frac{2D}{(D^2-1)^2}\sin x$$

$$\Rightarrow y_p = x\,\frac{1}{(-1^2)-1}\sin x - \frac{2D}{((-1^2)-1)^2}\sin x = \frac{x \sin x}{-2} - \frac{1}{2}D(\sin x)$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{x \sin x}{-2} - \frac{1}{2}\cos x \qquad y = y_g + y_p$$

مثال:

$$y'' - y = x e^{2x}$$

حل: $r^2 - 1 = 0 \rightarrow r = \pm 1 \rightarrow y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

$$y_p = \frac{1}{D^2-1}\,x e^{2x} \Rightarrow y_p = x\,\frac{1}{D^2-1}e^{2x} - \frac{2D}{(D^2-1)^2}e^{2x}$$

$$\Rightarrow y_p = x\,\frac{1}{4-1}e^{2x} - \frac{2D}{(4-1)^2}(e^{2x}) \Rightarrow y_p = \frac{x e^{2x}}{3} - \frac{2}{9}D(e^{2x})$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{x e^{2x}}{3} - \frac{4}{9}e^{2x} \qquad y = y_g + y_p$$