درسِ ریاضی فیزیک ۳

فصلِ پنجم:

تبدیلاتِ انتگرالی (Iintegral Transformations)

اغلب به روابطی مانند $g(x)=\int_a^b f(t)K(x,t)dt$ درریاضی ـ فیزیک برمی خوریم. تابعِ $g(x)$ را تبدیلِ انتگرالی تابع $f(t)$ از طریقِ هسته یا کِرنِل (Kernel) تبدیل یعنی $K(x,t)$ می نامیم.این عملِ ارتباط بین دو تابع به صورتِ گسترشِ تابع $f(t)$ در فضای t به تابعِ دیگری مانند $g(x)$ در فضای x بیان می شود.از نظرِ فیزیکی این نوع ارتباط در رابطهٔ زمان ـ فرکانس، ویارابطهٔ فضای حقیقی جابجایی و فضای اندازه حرکت مطرح می شود. از نمونه های مهّمِ تبدیلاتِ انتگرالی می توان به مواردِ زیر اشاره کرد:

۱ – تبدیلِ فوریه:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}dt$$

در این تبدیل کرنل یا هستهٔ تبدیل به صورتِ e^{ixt}است. مثلاً در مکانیکِ کوانتومی تبدیل بینِ جابجایی x در فضای جابجایی و اندازه حرکتِ p در فضای اندازه حرکت را می توان به صورتِ زیر نوشت:

$$\varphi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{\frac{ipx}{\hbar}}dx$$

تبدیلِ فوریه اغلب در بررسی امواج و استخراجِ اطّلاعات در موردِ آنها به کار می رود (به ویژه اطّلاعات در بارهٔ فاز). مثلاً توزیعِ الکترون در اتم از تبدیلِ فوریهٔ دامنهٔ پراکنده شدهٔ پرتوهای x به دست می آید. در مکانیکِ کوانتومی منشأ روابط فیزیکی به کار رفته، مانند رابطهٔ بالا، طبیعتِ موجی مادّه و توصیفِ ما را از مادّه برحسبِ موج نشان می دهد. استفادهٔ دیگراین تبدیل در تحلیلِ دینامیکی شبیه سازی های کامپیوتری در سیستم های پیچیده و آشوناک است که از طریقِ طیفِ توان (power spectrum) صورت می گیرد.در اِم‌آرآی در فیزیک پزشکی برای ایجادِ تصویرِ نهایی اطّلاعاتِ امواجِ ساطع شده از هسته‌های هیدروژن از حوزهٔ فرکانسی (frequency domain)به حوزهٔ فضایی (spatial domain) تبدیل فوریه می‌شوند .

همچنین در علمِ دینامیکِ سازه‌ها و ارتعاشاتِ مکانیکی برای تعیینِ پاسخِ سازه در برابرِ تحریکاتِ غیر هارمونیک از تبدیلِ فوریه برای تبدیل این تحریکات به اجزای هارمونیک استفاده می‌شود. پس از آن می‌توان اقدام به حلِّ معادلهٔ دیفرانسیلِ حرکتِ سازه نمود .

یکی دیگر از کاربردهای آن در تجزیه و تحلیل مدارهای مخابراتی و مدارهای قدرت است که برای بدست آوردنِ هارمونیک‌های پدیدآورندهٔ یک شکلِ موجی استفاده می‌شود.

۲ – تبدیل های انتگرالی مهم:

تبدیلِ لاپلاس

$$g(x)=\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt$$

تبدیلِ هانکل (فوریه ـ بسل)

$$g(x)=\int_0^\infty f(t)tJ_n(x,t)dt$$

تبدیلِ ملین

$$(x)=\int_0^\infty f(t)t^{x-1}dt$$

یادآور می شویم که تعدادِ تبدیلاتِ انتگرالی بسیار زیاداست. مثلاً در مورد تبدیلِ ملین، چنانچه $f(t)=e^{-t}$ باشد،تابع گاما $\Gamma(x)=(x-1)!$ پدید می آید. نکتهٔ دیگر اینکه تمامِ این تبدیل ها به مفهومِ کلّی خطّی هستند و آشکار است که انتظار داشته باشیم وارونِ این تبدیل ها نیز وجود داشته باشد.

اکنون در آنچه در ادامه می آید، به طورِ خلاصه به دو مورد تبدیلِ انتگرالی مهم اشاره می کنیم.

۱ – تبدیلِ فوریه:

چنانچه می دانیم عمدتاً بسط توابع متناوب را در فاصله های $(0,2\pi)$ و یا $[-L,L]$ به نام بسط تابع به سری فوریه می شناسیم. اکنون مایلیم به مسئلهٔ نمایشِ تابعِ غیر دوره ای در ناحیهٔ بی نهایت (به عبارتی تابع متناوب با دوره تناوب بی نهایت)معطوف کنیم. از نظرِ فیزیکی این عمل تجزیهٔ یک پالس یا بسته موج به امواج سینوسی است. در فاصله $[-L,L]$ ضرایب a_n و b_n بسط فوریه تابع متناوب $f(x)$ از روابط زیر به دست می آیند:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \operatorname{Cos}\frac{n\pi x}{L}+b_n \operatorname{Sin}\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx\ ;\quad a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{Cos}\frac{n\pi x}{L}dx\ ;\quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{Sin}\frac{n\pi x}{L}dx$$

و در نتیجه سری فوریه حاصل چنین می شود:

$$f(x)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt$$

$$+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Cos}\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{Cos}\frac{n\pi t}{L}dt+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Sin}\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{Sin}\frac{n\pi t}{L}dt$$

و یا

$$f(x)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{L}(x-t)dt$$

اکنون L را به سمت بی نهایت میل می دهیم؛ به بیان دیگر می خواهیم فاصله تغییرات را $(-\infty,\infty)$ بگیریم. یعنی

$$L\to\infty\ ;\qquad \frac{n\pi}{L}=\omega$$

آنگاه

$$f(x)\to\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{Cos}(x-t)dt$$

یا

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{Cos}(x-t)\,dt$$

در شکل کلی به صورت نمایی، رابطه زیر نوشته می شود که آن را انتگرال فوریه می نامیم:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{+i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

و تبدیل فوریه $f(x)$ چنین تعریف می شود:

$$g(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx$$

و برای تبدیل وارون فوریه، یعنی $g(\omega)$ به عنوان تبدیل وارون $f(x)$ خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\omega)e^{-i\omega x}d\omega$$

شکل سه بعدی تبدیل فوریه به صورت زیر در می آید:

$$g(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\vec{r})e^{i\vec{k}.\vec{r}}d^3r$$

$$f(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\vec{k})e^{-i\vec{k}.\vec{r}}d^3r$$

تمرین ــ چنانچه $f(x)$ تابع زوج یا فرد باشد، تبدیل فوریه آن را بنویسید. این تبدیلات را به ترتیب تبدل کسینوس و تبدیل سینوس می نامیم.

تمرین ــ با توجه مطالب گفته شده در باره تبدیل فوریه، شکل انتگرالی تابع دلتای دیراک را از این تبدیل استخراج کنید.

تبدیل فوریه توابع مشتق:

برای حل معادلات دیفرانسیل از طریق معادلات انتگرالی، نخستین گام یافتن تبدیل فوریه مشتق های یک تابع است. بدن منظور از شکل نمایی تبدیل فوریه استفاده می کنبم:

$$g\left(k\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)e^{ikx}dx$$

همین رابطه را برای $\frac{df\left(x\right)}{dx}$ می نویسیم و به روش جزء به جزء انتگرال را محاسبه می کنیم:

$$g_1\left(k\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{df\left(x\right)}{dx}e^{ikx}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}f\left(x\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)e^{ikx}dx$$

از پیش می دانیم که شرط برقراری تبدیل فوریه آن است که در ، تابع $f\left(x\right)$ به صفر میل کند. از اینرو،

$$g_1\left(k\right)=-ikg\left(k\right)$$

این عمل را n بار تکرار می کنیم (بر اساس شیوه استقراء)در می یابیم که

$$g_n\left(k\right)=\left(-ik\right)^n g\left(k\right)$$

همین رابطه به توانایی تبدیل فوریه در حل معادلات دیفرانسیل جزئی اشاره می کند که بسیار مفید است.

قضیه کنولوسیون (هم گردشی ـ هم چرخشی)فوریه:

از قضیه فوق در حل معادلات دیفرانسیل، بهنجار کردن توابع موج اندازه حرکت و بررسی معادلات انتقال استفاده می شود. در تبدیل لاپلاس نیز مورد استفاده این قضیه را خواهیم دید. واژه کنولوسیون (Convolution)از لغت آلمانی Faltung به معنای دوتا کردن (folding) است و عمل چرخش یک تابع حول یک محور (مانند محور قائم) و ایجاد تصویر آینه ای تابع نسبت به این خط قائم است. مثلاً در مورد دوتابع $f\left(y\right)=e^{-y}$ و

$f\left(x-y\right)$ می توان با تاکردن $f\left(y\right)$ روی خط $y=\frac{x}{2}$ ، تابع $f\left(x-y\right)$ را به دست آورد. دو تابع $f\left(x\right)$ و $g\left(x\right)$ و تبدیل فوریه آنها یعنی $F\left(k\right)$ و $G\left(k\right)$ را به ترتیب در نظر می گیریم. عمل زیر را به عنوان کنولوسیون دو تابع $f\left(x\right)$ و $g\left(x\right)$ در فاصله $\left(-\infty,\infty\right)$ تعریف می کنیم:

$$f*g=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(y\right)f\left(x-y\right)dy$$

اکنون رابطه فوق را با تبدیل فوریه بررسی می کنیم: فرض می کنیم $F\left(k\right)$ و $G\left(k\right)$ به ترتیب تبدیل های فوریه $f\left(x\right)$ و $g\left(x\right)$ باشند. آنگاه

$$f*g=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(y\right)\int_{-\infty}^{\infty}F\left(k\right)e^{-i(x-y)k}dkdy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F\left(k\right)\left[\int_{-\infty}^{\infty}g\left(y\right)e^{iyk}dy\right]e^{-ixk}dk$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(y\right)f\left(x-y\right)dy=\int_{-\infty}^{\infty}F\left(k\right)G\left(k\right)e^{-ixk}dk$$

معنای این تساوی چنین است: «تبدیل وارون فوریه حاصلضرب تبدیل های فوریه دو تابع عبارت است از کنولوسیون توابع اصلی f و g به صورت $f*g$ ». در حالت خاص $x=0$ خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F\left(k\right)G\left(k\right)dk=\int_{-\infty}^{\infty}g\left(y\right)f\left(-y\right)dy$$

علامت منفی $f\left(-y\right)$ یعنی تغییر وضعیت و حالت صورت گرفته است. اکنون رابطه پارسوال را بازگو می کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F\left(k\right)G^{*}\left(k\right)dk=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)g^{*}\left(t\right)dt$$

معنای این رابطه این است که اگر انتگرال دو تابع f و g مثلاً نرمالیزه باشد، آنگاه پس از اعمال تبدیل فوریه نیز نرمالیزه می ماند. این رابطه را اثبات می کنیم: از شکل انتگرالی تابع دیراک کمک می گیریم (به مسائل پایان فصل مراجعه کنید).

$$\delta(t-x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(t-x)}dk$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-ikt}dk\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G^*(x)e^{ikx}dtdx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}F(k)\int_{-\infty}^{\infty}G^*(x)\delta(x-k)dkdx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}F(k)G^*(k)dk$$

اگر $f(t)=g(t)$ باشد،آنگاه انتگرال های موجود در رابطه پارسوال انتگرال های نرمالیزاسیون خواهند بود. این تساوی تضمین می کند چنانچه $f(t)$ به مقدار واحد نرمالیزه شود، تبدیل $F(t)$ آن نیز به مقدار واحد نرمالیزه و هنجار می شود. این ویژگی در مکانیک کوانتومی مهم است.

نمایش اندازه حرکت خطی:

در دینامیک پیشرفته و نیز در مکانیک کوانتومی اندازه حرکت خطی و موقعیت فضایی ذره در یک جایگاه یکسان قرار دارند و بنا به نیاز خود می توان محاسبات کوانتومی را در فضای جابجایی یا فضای اندازه حرکت به طور همانند انجام داد و نتایج به دست آمده هم ارز یکدیگرند. مثلاً در فضای جابجایی ویژگی های زیر موجوداست:

۱ – احتمال یافتن ذره در فاصله $[x,x+dx]$ با تابع موج $\psi(x)$ عبارت است از $\psi*\psi dx$.

۲ – رابطه نرمالیزاسیون چنین است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi * \psi \, dx = 1$$

۳ – مقدار چشمداشتی عملگر موقعیت x در فضای جابجایی چنین است:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi * (x) x \psi (x) dx$$

در فضای اندازه حرکت با تابع موج $\varphi(x)$ نیز ویژگی های زیر برقراراست:

۱ – احتمال یافتن ذره کوانتومی در فاصله $[p, p+dp]$ عبارت است از: $\varphi(p)\varphi^*(p)$

۲ – رابطه نرمالیزاسیون در این فضا $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p)\varphi^*(p)\, dp = 1$ است.

۳ – مقدار چشمداشتی عملگر اندازه حرکت ذره در راستای x:

یادآور می شویم که رابطه بین $\varphi(p)$ و $\varphi(p)$ از تبدیل فوریه به دست می آید:

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{\frac{ipx}{\hbar}} dx$$

و در سه بعد،

$$\varphi(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\vec{r}) e^{\frac{i\vec{p}.\vec{r}}{\hbar}} d^3 r$$

در این هم ارزی بین x و p، در فضای جابجایی اپراتورهای x و p به ترتیب به صورت x_{op} و $p_{op} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_{op}}$ انتخاب می شوند، به طوری که در هر حال رابطه بنیادی $[p, x] = -i\hbar$ در هر دو فضا برقرار خواهد بود.

تبدیل لاپلاس:

تبدیل لاپلاس بخشی از حساب عملیاتی است که خود یکی از رشته های مهم آنالیز ریاضی است. تبدیل لاپلاس روش پر قدرتی در حل معادلات دیفرانسیل خطی است که در مسایل ریاضی فیزیک و مهندسی با آن مواجه می شویم. این روش معمولاً شامل سه مرحله است:

۱ – در مرحله اول معادله دیفرانسیل داده شده را به معادله ای جبری تبدیل می کنیم.

۲ – سپس این معادله جبری را به روش های کاملاً ریاضی حل می کنیم (یعنی معادله کمکی را پیدا می کنیم).

۳ – و سرانجام پاسخ قسمت دوم را به طریقی تبدیل معکوس کرده و بر می گردانیم که پاسخ مورد نیاز معادله دیفرانسیل اصلی را به دست دهد.

تعریف تبدیل لاپلاس:

فرض می کنیم $f(t)$ تابع داده شده ای باشد که برای تمام مقادیر مثبت t تعریف شده است. منظور از تبدیل لاپلاس که با $L(t)$ نمایش می دهیم عبارت است از

$$F(p) = L(t) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-pt} f(t)\, dt$$

بدیهی است که خود $f(t)$ وارون $F(p)$ است که با $L^{-1}(F)$ نمایش داده می شود: در این صورت $p \succ 0$ است. توجه داشته باشیم که ممکن است $\int_0^\infty f(t)\, dt$ وجود نداشته باشد ولی عبارت $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$ می تواند به دلیل وجود جمله e^{-pt} همگرا باشد. مثلاً اگر به ازای عدد معین M ،

$\left|e^{-pt}f\left(t\right)\right|\leq M$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس وجود خواهد داشت. در این مورد به تابع e^{t^2}اشاره می کنیم.

همچنین ممکن است به دلیل ویژگی خاصی در تابع $f\left(t\right)$ به ازای $t\rightarrow 0$ تبدیل لاپلاس نداشته باشیم.

مثلاً عبارت $\int_0^\infty e^{-pt}f\left(t\right)dt$ برای $f\left(t\right)=t^n$ و $n\leq -1$ در مبدأ واگرا می شود. بنابراین تبدیل لاپلاس $L\left\{t^n\right\}$ برای $n\leq -1$ وجود ندارد.

مثال ۱: فرض می کنیم $f\left(t\right)=e^{at}$ باشد، به طوری که $t\succ 0$ و a عدد ثابت مثبتی است. آنگاه

$$L\left\{e^{at}\right\}=\int_0^\infty e^{-pt}e^{at}dt=\frac{1}{a-p}e^{(a-p)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{a-p}$$

به شرطی که $a\prec p$ باشد.

مثال ۲ . این بار $f\left(t\right)=t^a$ انتخاب می شود که در آن $a\varepsilon Z^+$است.

$$L\left\{t^a\right\}=\int_0^\infty e^{-pt}t^a dt$$

با تغییر متغیر $x=pt$ خواهیم داشت:

$$L\left\{t^a\right\}=\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x}{p}\right)^a pdx=\frac{\Gamma\left(a+1\right)}{p^{a+1}}=\frac{a!}{p^{a+1}}$$

چند ویژگی تبدیل لاپلاس:

به راحتی می توانید تحقیق کنید که این ویژگی ها محقق است. به عنوان تمرین بررسی کنید:

۱ – تبدیل لاپلاس خطی است:

$$L\left\{af\left(t\right)+bg\left(t\right)\right\}=aL\left\{f\left(t\right)\right\}+bL\left\{g\left(t\right)\right\}$$

۲ – اگر $p \succ a$ باشد، آنگاه

$$L\left\{e^{at} f\left(t\right)\right\} = F\left(p-a\right)$$

به طوری که $F\left(p\right) = \int_0^\infty e^{-pt} f\left(t\right) dt$ است.

۳ – اگر $f\left(t\right) = \text{Cos}\,\omega t$ باشد، آنگاه

$$L\left\{\text{Cos}\,\omega t\right\} = \frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad (۱)$$

به همین ترتیب،

$$L\left\{\text{Sin}\,\omega t\right\} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \qquad (۲)$$

و در ادامه می توان نشان داد که

$$L\left\{e^{at}\,\text{Cos}\,\omega t\right\} = \frac{p-a}{\left(p-a\right)^2+\omega^2} \qquad (۳)$$

قضیه مشتق $f\left(t\right)$:

فرض می کنیم $f\left(t\right)$ برای تمام مقادیر t پیوسته است و برای اعداد ثابت M و a در رابطه زیر صدق می کند:

$$\left|f\left(t\right)\right| \le Me^{at}$$

با این شرط مطمئن می شویم که حتماً تبدیل لاپلاس $f(t)$ برای تمام مقادیر $p \succ a$ وجود دارد. همچنین می پذیریم که $f'(t)$ درهر فاصله معین در ناحیه $t \geq 0$ پیوسته مقطع است. در این صورت تبدیل لاپلاس برای $f'(t)$ و جود دارد و

$$L\{f'(t)\} = pL\{f(t)\} - f(0)$$

اثبات:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = \left[e^{-pt} f(t)\right]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$$

$$= pL\{f(t)\} - f(0)$$

چنانچه این روش را تکرار و از شیوه استقراء ریاضی استفاده کنیم نتیجه نهایی حاصل می گردد:

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = p^n L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

این قضیه در واقع اساس کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل است.

تمرین ـ قضیه مشتق را در حالت کلی اثبات کنید.

قضیه انتگرال $f(t)$:

اگر $f(t)$ تابع پیوسته مقطع با شرط زیر باشد،

$$\left|f(t)\right| \leq Me^{at}$$

$$\forall t \geq 0$$

دوباره یادآور می شویم که این شرط دلالت بر این دارد که تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ حتماً وجود دارد. آنگاه

$$L\left\{\int_0^k f(t)\,dt\right\}=\frac{1}{p}L\{f(t)\} \qquad ;\ p\succ a \qquad ;\ p\succ 0$$

اثبات ـ فرض می کنیم

$$g(t)=\int_0^k f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow |g(t)|\le\int_0^k |f(t)\,dt|\le M\int_0^k e^{at}dt=\frac{M}{a}\left(e^{at}-1\right)$$

به علاوه $g'(t)=f(t)$. بنابراین $g'(t)$ پیوسته مقطّع است و بنا بر قضیه مشتق خواهیم داشت:

$$L\{f(t)\}=L\{g'(t)\}=pL\{g(t)\}-g(0)$$

از طرفی واضح است که $g(0)=0$. پس

$$L\{g(t)\}=L\left\{\int_0^k f(t)\,dt\right\}=\frac{1}{p}L\{f(t)\}$$

قضیه کنولوسیون لاپلاس:

در بخش های پیش واژه کنولوسیون را معرفی و گفتیم که در ریاضی فیزیک کنولوسیون دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ با $f*g$ نشان داده شده و با رابطه زیر تعریف می شود:

$$f*g=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

در این باره قضیه مهمی وجود دارد: چنانچه $f(t)$ و $g(t)$ دو تابع پیوسته مقطع باشند، آنگاه

$$L\{f*g\}=F(p)G(p)$$

که در آن

$$F(p)=L\{f(t)\}; \qquad G(p)=L\{g(t)\}$$

اثبات ــ کنولوسیون دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ را می نویسیم:

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du$$

توابعی که در تبدیل لاپلاس بررسی می شوند، به ازای $t \prec 0$ صفر هستند. بنابراین برای چنین توابعی

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du$$

از طرفین تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$L\{f*g\}=\int_{0}^{\infty} e^{-pt}\left[\int_{0}^{t} f(u)g(t-u)\,du\right]dt$$

ترتیب انتگرال گیری را تغییر می دهیم:

$$L\{f*g\}=\int_{0}^{\infty}\left[f(u)\int_{u}^{\infty} dte^{-pt}g(t-u)\right]du$$

تغییر متغیر $t-u=v$ را به کار می بریم، آنگاه انتگرال برحسب t چنین می شود:

$$\int_{u}^{\infty} e^{-pt}g(t-u)dt=\int_{0}^{\infty} dte^{-p(u+v)}g(v)dv=e^{-pu}G(p)$$

که در آن $G(p)=L\{g(t)\}$ است. بنابراین

$$L\{f*g\}=\int_0^\infty f(u)e^{-pu}G(p)\,du=G(p)\int_0^\infty e^{-pu}f(u)\,du=G(p)F(p)$$

به طوری که $F(p)=L\{f(t)\}$ فرض شده است.سرانجام برای تبدیل کنولوسیون خواهیم داشت:

$$L\{f*g\}=L\{f(t)\}.L\{g(t)\}$$

کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل:

موضوع این بخش را با حل چند مثال پی می گیریم. از دنبال کردن روش حل این مثال ها شیوه عمومی حل معادلات دیفرانسیل (با ضرایب ثابت یا متغیر و معادلات همگن یا ناهمگن)آشکار می شود.

۱ – پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل $\frac{dx}{dt}+x=1$ را با شرایط اولیه $t=0 \Rightarrow x=0$ به دست آورید.

حل ــ می دانیم معادله فوق یک معادله ناهمگن با ضرایب ثابت است. پاسخ عمومی آن مجموع پاسخ عمومی معادله همگن و یک پاسخ خصوصی معادله ناهمگن است. پاسخ عمومی معادله همگن با شیوه های متعارف معمولاً به راحتی به دست می آید. در این مسئله پاسخ عمومی معادله $\frac{dx}{dt}+x=0$ چنین است:

$$x=x_0e^{-t}$$

اما برای یافتن یک پاسخ خصوصی با شرایط اولیه داده دشده از تبدیل لاپلاس کمک می گیریم. برای راحتی نشانه تبدیل لاپلاس $x(t)$ را با $\bar{x}(p)$ نمایش می دهیم. آنگاه

$$\bar{x}(p)\left(\frac{dx}{dt}\right)=p\bar{x}(p)-0=p\bar{x}(p)$$

بنابراین تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل را حساب می کنیم. نتیجه یک معادله کمکی به صورت زیر است:

$$p\bar{x}(p)+\bar{x}(p)-0=\frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \bar{x}(p)=\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}=\bar{x}(1)-\bar{x}\left(e^{-t}\right)$$

اکنون تبدیل وارون را حساب می کنیم:

$$x(t)=L^{-1}\left[\bar{x}(p)\right]=1-e^{-t}$$

۲ – معادله دیفرانسیل $x''+9x=1$ را با شرایط اولیه $x_0=x_0'=0$ حل کنید.

حل ـ

$$\bar{x}(x'')=\bar{x}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=p^2\bar{x}(p)-\sum_{k=0}^{1}p^{2-1-k}x^{(2)}(0)$$

$$=p^2\bar{x}(p)-0-0=p^2\bar{x}(p)$$

و در نهایت معادله کمکی چنین می شود:

$$\bar{x}(p)\left(p^2+9\right)=\frac{1}{p}\Rightarrow \bar{x}(p)=\frac{1}{p\left(p^2+9\right)}=-\frac{1}{9}\left(\frac{p}{p^2+9}-\frac{1}{p}\right)$$

$$=\ldots=-\frac{1}{9}\left[\bar{x}(\mathrm{Cos}\,3t)-\bar{x}(1)\right]\Rightarrow x=L^{-1}\left[\bar{x}(p)\right]=-\frac{1}{9}\mathrm{Cos}\,3t+\frac{1}{9}$$

۳ – معادله $x''+3x'+2x=t$ را با شرایط اولیه $x_0=x_0'=0$ حل کنید.

حل ـ معادله کمکی به صورت $\bar{x}(p)\left(x''+3x'+2x\right)=\frac{1}{p^2}$ در می آید (چرا؟). آنگاه برای $\bar{x}(p)$ خواهیم داشت:

$$\bar{x}(p)=\frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{p^2}-\frac{3}{4}\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{4(p+2)}$$

و از آنجا،

$$x(t)=L^{-1}\left\{\bar{x}(p)\right\}=\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}+e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$$

چند مسئله برای حل:

۱ – (الف). نشان دهید که $g(\omega)=g^{*}(\omega)$ شرط لازم و کافی برای حقیقی بودن $f(x)$ است.

(ب). نشان دهید که $g(-\omega)=-g^{*}(\omega)$ شرط لازم و کافی برای موهومی بودن $f(x)$ است. $g(\omega)$ تبدیل فوریه تابع است.

۳ – در رابطه $g(\omega)=-\omega^{2}g(\omega)$ شرط برقراری این رابطه $f(x)\to 0$ برای $x=\pm\infty$ است. شرط کمتر محدود کننده ای را بیابید تا $g(\omega)$ همچنان برقرار باشد.

۴ – اگر $f(x)$ به صورت زیر داده شده و $g(x)=xf(x)$ باشد، قضیه کنولوسیون را به کار برید و تابع $p(x)$ را چنان بیابید که در رابطه زیر صدق کند.

$$\int_{0}^{\infty}f(y)\,p(x-y)\,dy=g(x)$$

۵ – (الف). نشان دهید که تبدیل های سینوس و کسینوس فوریه e^{-at} عبارتند از

$$g_{s}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^{2}+a^{2}}$$

$$g_{c}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^{2}+a^{2}}$$

(ب). نشان دهید که

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\,\mathrm{Sin}\,\omega x}{\omega^{2}+a^{2}}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-ax}$$

$$\int_0^\infty \frac{\omega \operatorname{Cos} \omega x}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}$$

۶ – (**الف**).تبدیل لاپلاس تابع $J_0(t)$ را بیابید.

(**ب**). تبدیل تابع بسل $J_n(t)$ را پیدا کنید، به طوری که n عدد درست است.

۷ – فرض می کنیم $L\{f(t)\} = \dfrac{p+5}{p^2+2p+5}$ داده شده است. $f(t)$ را بیابید

۸ – عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{Sintx}{x} dx$$

۹ – درستی روابط (۱)،(۲)و(۳)را تحقیق کنید.

۱۰ – پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل $x'' + 2x' + 5x = \operatorname{Sin} t$ را با شرایط اولیه $x_0 = 1$ و $x'_0 = 2$ بیابید.