تعریف جزء صحیح عدد: به ازای هر عدد حقیقی مانند x عددی صحیح مانند n وجود دارد به قسمی که $n \le x < n+1$. در اینصورت n را جزء صحیح عدد حقیقی x می نامیم و با نماد $[x]=n$ نمایش می دهیم.

نکته: با توجه به نامساوی موجود در تعریف جزء صحیح نتیجه می گیریم که جزء صحیح هر عدد صحیح برابر با خود عدد صحیح می باشد.

مثال: $[-۲/۷۵]=-۳$ $\quad$ $[۳/۵]=۳$ $\quad$ $[-۴]=-۴$ $\quad$ $[۳]=۳$

$[-۰/۹]=-۱$ $\quad$ $[۰/۸]=۰$

نکته: در واقع جزء صحیح هر عدد، عدد صحیح سمت چپ آن عدد می باشد (برای اعداد غیر صحیح)

نکته: ۱) اگر k یک عدد صحیح باشد آنگاه $[x+k]=[x]+k$

۲) اگر $x \in \mathbb{R}$ آنگاه $x-1<[x] \le x < [x]+1$

مثال: نمودار تابع $y = f(x)=[x]$ را روی $[-۲,۲)$ رسم کنید.

حل: ابتدا اعداد صحیح از ۲- تا ۲ را در نظر می گیریم.

۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲

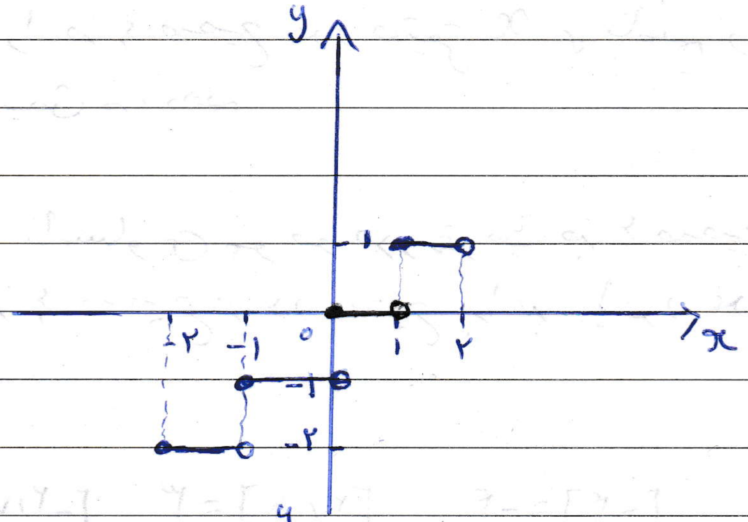
$\overset{n}{-۲} \le x < \overset{n+1}{-۱} \to [x]=-۲ \to y=-۲$

استاد حسن ...

$-1 \le x < 0 \to [x] = -1 \to y = -1$

$0 \le x < 1 \to [x] = 0 \to y = 0$

$1 \le x < 2 \to [x] = 1 \to y = 1$



مثال: نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-[x]}$ را روی $[-2,2)$ رسم کنید.

حل: ابتدا اعداد صحیح از ۲- تا ۲ را درنظر می‌گیریم.

$-2, -1, 0, 1, 2$

$-2 \le x < -1 \to [x] = -2 \to y=\sqrt{x-(-2)} \to y=\sqrt{x+2} \Rightarrow$

	تو پر	تو خالی
x	-2	-1
y	0	1

$-1 \le x < 0 \to [x] = -1 \to y=\sqrt{x-(-1)} \to y=\sqrt{x+1} \Rightarrow$

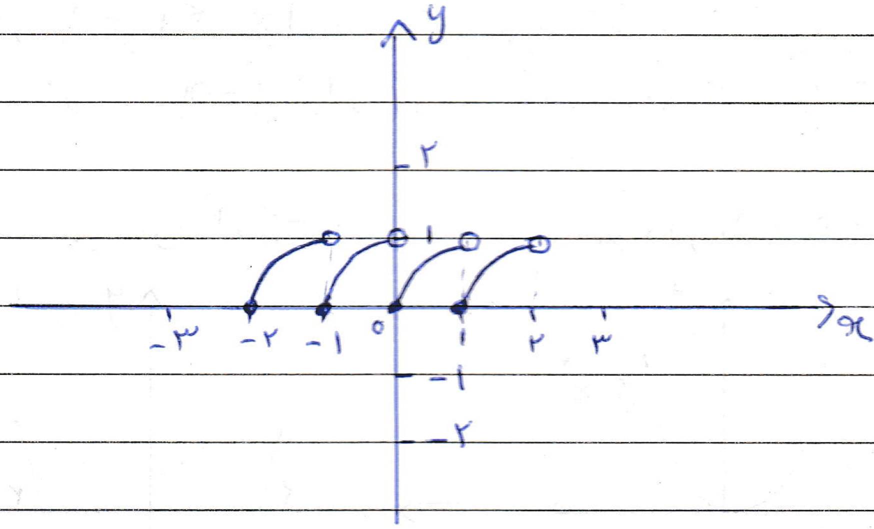
	تو پر	تو خالی
x	-1	0
y	0	1

$0 \le x < 1 \to [x] = 0 \to y=\sqrt{x+0} \to y=\sqrt{x} \Rightarrow$

x	توپر 0	توخالی 1
y	0	1

$1 \le x < 2 \to [x] \to y=\sqrt{x-1} \Rightarrow$

x	توپر 1	توخالی 2
y	0	1



$D_f = \mathbb{R} \quad , \quad R_f = [0,1)$

نکته: نمودار برخی از توابع را می‌توان به کمک انتقال رسم نمود که به صورت زیر می‌باشد:

۱) برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$، ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس به اندازه $|k|$ واحد به چپ (اگر $k>0$) یا به راست (اگر $k<0$) انتقال داده.

۲) برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$، ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس به اندازه $|k|$ واحد به بالا (اگر $k>0$) یا به پایین (اگر $k<0$) انتقال می‌دهیم.

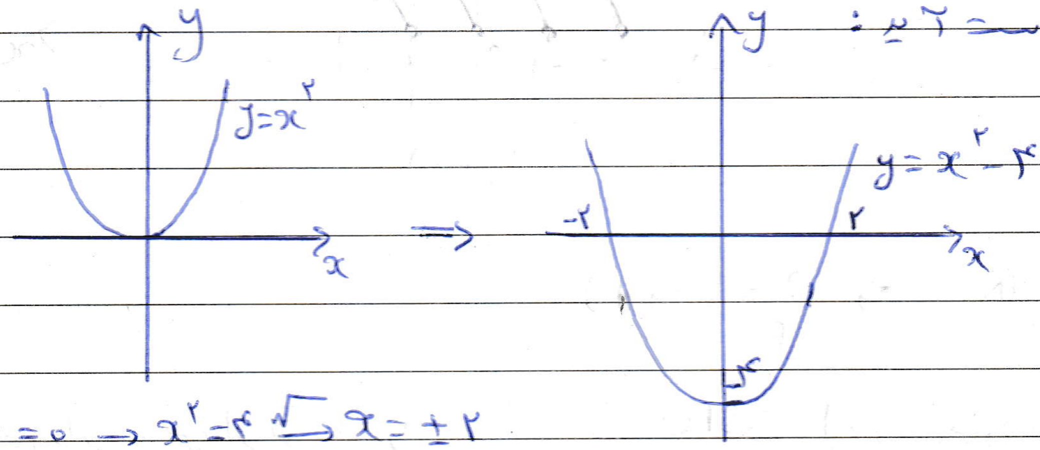
۳) برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$، ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم

Year: Month: Date: Subject: ۴

سپس آن قسمتی از نمودار تابع f که زیر محور x ها قرار گرفته است نسبت به محور x ها قرینه می کنیم تا بالای محور x ها قرار گیرد.

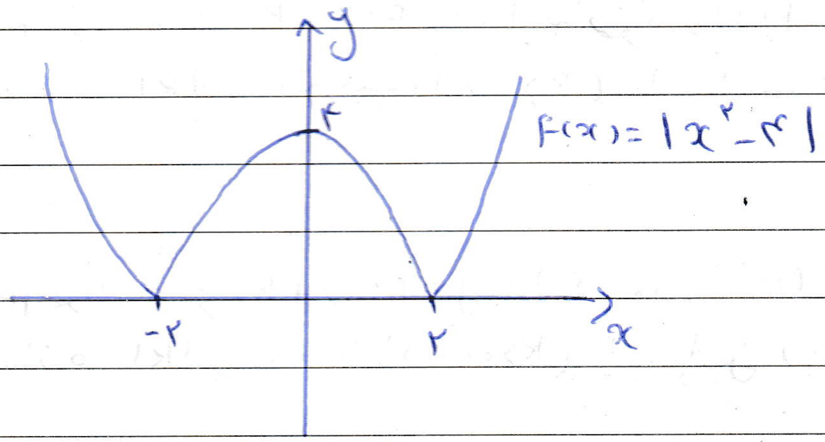
مثال: نمودار تابع $f(x)=|x^2-4|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار $y=x^2$ را رسم می کنیم و سپس آن را به اندازه ۴ واحد به سمت پایین انتقال می دهیم تا نمودار تابع $y=x^2-4$ به دست آید:



$x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \xrightarrow{\sqrt{}} x=\pm 2$

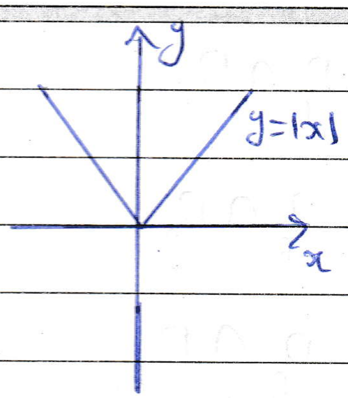
حالا قسمت هایی از نمودار که زیر محور x ها قرار گرفته است را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم تا نمودار $f(x)=|x^2-4|$ به دست آید:

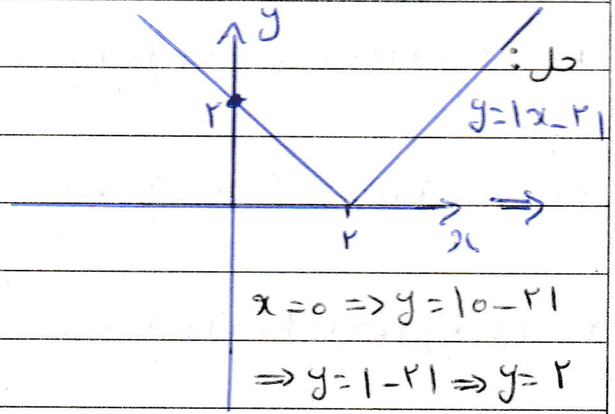


مثال: نمودار تابع $f(x)=||x-2|-2|$ را رسم کنید.

استاد حسینی

حل:

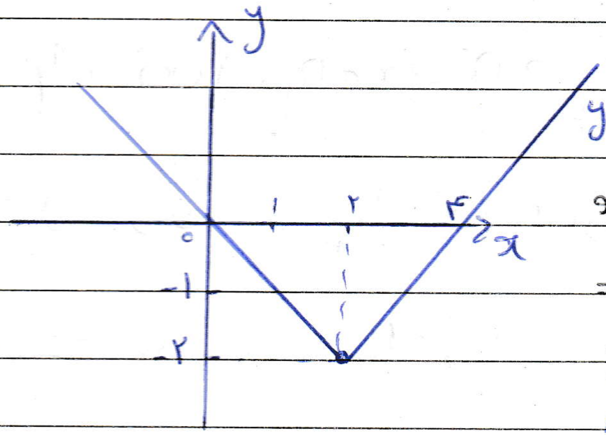




$x=0 \Rightarrow y=|0-2|$

$\Rightarrow y=|-2| \Rightarrow y=2$

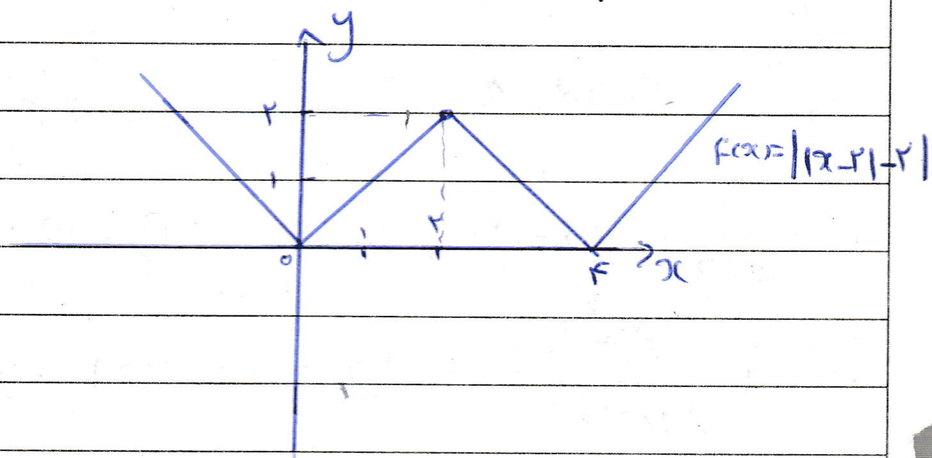
$\Rightarrow \left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$



$x=0 \Rightarrow y=|0-2|-2$

$\Rightarrow y=|-2|-2 \Rightarrow$

$y=2-2=0 \Rightarrow \left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$



$y=0 \Rightarrow |x-2|-2=0 \Rightarrow |x-2|=2 \Rightarrow x-2=\pm 2$

$$\begin{cases} x-2=2 \rightarrow x=2+2 \rightarrow x=4 \rightarrow \left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right. \\ x-2=-2 \rightarrow x=-2+2 \rightarrow x=0 \rightarrow \left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \end{cases}$$

نکته: اگر $a>0$ آنگاه $|u|=a \Rightarrow u=\pm a$

اعمال جبری توابع: فرض کنیم $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند. جمع، تفریق، ضرب و تقسیم توابع به صورت زیر همراه با دامنه‌هایشان تعریف می‌شوند:

۱) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $D_{f+g}=D_f\cap D_g$

۲) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, $D_{f-g}=D_f\cap D_g$

۳) $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$, $D_{f\times g}=D_f\cap D_g$

۴) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g ; g(x)=0\}$

مثال: فرض کنیم $f(x)=\frac{1}{x-2}$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$. مطلوب است محاسبه ضابطه و دامنه $f+g$ ، $f-g$ ، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$.

حل: تابع f یک تابع گویا است لذا $D_f=\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$ در نتیجه:

$x-2=0 \to x=2$ ریشه مخرج $\to D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

$\sqrt{x-1} \xrightarrow[\text{با فرجه زوج}]{\text{رادیکال}} x-1>0 \to x>1 \to D_g=(1,+\infty)$

مساوی صفر را منظور نکردیم تا در تابع g ریشه مخرج خود به خود حذف شود.

۱) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

۲) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

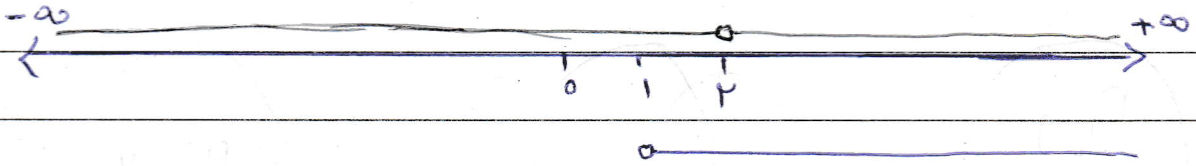
۳) $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{1}{x-2}\times\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{(x-2)\sqrt{x-1}}$

استاد حسنی

۴) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}=\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$

$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{fg}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{2\}\cap(1,+\infty)$

$=(1,2)\cup(2,+\infty)$



$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g\,;\,g(x)=0\}$

$g(x)=0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x-1}}=0\Rightarrow 1\neq 0\Rightarrow\{x\in D_g\,;\,g(x)=0\}$

$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=(1,2)\cup(2,+\infty)-\varnothing=(1,2)\cup(2,+\infty)$

ترکیب توابع: برای دو تابع f و g دو ترکیب f و g را با نماد fog یا gof نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

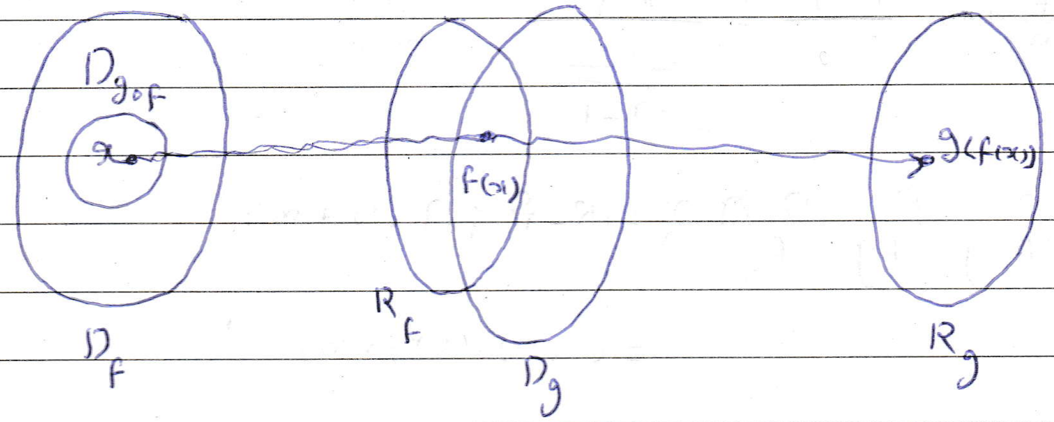
$(gof)(x)=g(f(x))\quad,\quad(fog)(x)=f(g(x))$

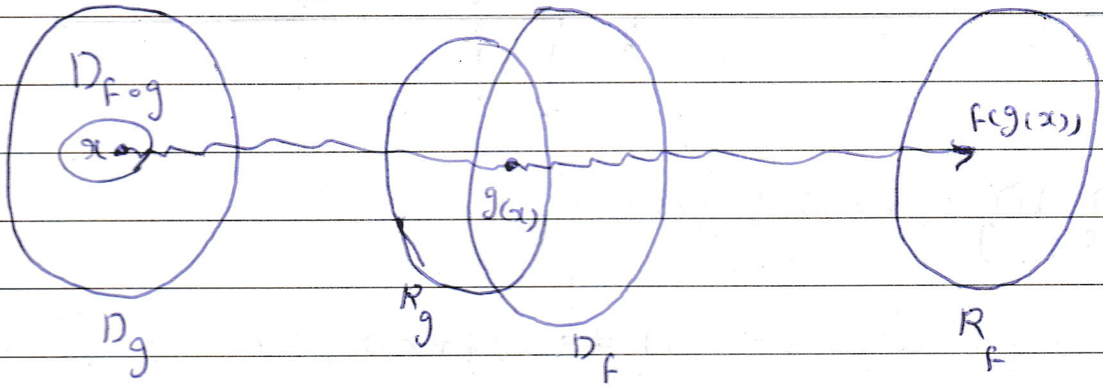
دقت کنید fog و gof هنگامی قابل تعریف می‌شوند که دامنه‌هایشان قابل تعریف باشند، پس لازم است D_{fog} و D_{gof} را تعریف کنیم:

$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}\qquad(D_{gof}\subseteq D_f)$

$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}\qquad(D_{fog}\subseteq D_g)$

استاد حسن فر





نکته: دقت کنیم که تابع $(g\circ f)(x)$ زمانی تعریف می‌شود، به طوری که $R_f \cap D_g \neq \emptyset$
و همچنین برای تعریف $(f\circ g)(x)$ باید داشته باشیم $D_f \cap R_g \neq \emptyset$.

مثال: فرض کنیم $g(x)=\frac{x}{x+1}$ و $f(x)=\sqrt{x+1}$. دامنه و ضابطه تابع $f\circ g$ را بیابید.

حل: ابتدا دامنه توابع f و g را مشخص می‌کنیم:

تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است؛ در نتیجه عبارت زیر رادیکال را ≥ 0 قرار می‌دهیم:

$x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1 \Rightarrow D_f=[-1,+\infty)$

تابع $g(x)=\frac{x}{x+1}$ یک تابع گویا است، لذا $D_g=\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$

استاد حسین فرخ

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ ریشه مخرج $\Rightarrow D_g = \mathbb{R}-\{-1\}$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{1}} = \sqrt{\dfrac{x+x+1}{x+1}}$

$= \sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}}$

$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \,;\, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}-\{-1\} \,;\, \dfrac{x}{x+1} \in [-1,+\infty)\}$

$x \in \mathbb{R}-\{-1\}\ ,\ \dfrac{x}{x+1} \in [-1,+\infty) \Rightarrow \dfrac{x}{x+1} \geq -1 \Rightarrow$

$\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{1} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x+x+1}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{x+1} \geq 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} 2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=\dfrac{-1}{2} & \text{ریشه صورت} \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 & \text{ریشه مخرج} \end{cases}$

		مخرج		صورت	
x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{2x+1}{x+1} \geq 0$	$+$		$-$	0	$+$
	ق	ن		ق	ق

$>0\ (+)$

$=0$ (ریشه‌ها)

$D_{f\circ g} = (-\infty,-1) \cup [-\frac{1}{2},+\infty)$

(مهم) مثال: ترکیب $f\circ g$ دو تابع زیر را مشخص کنید.

استاد حسین مرز

$$f(x)=\begin{cases}1-2x, & x<1\\ 1+x, & x\geq 1\end{cases}\quad , \quad g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ 1-x, & x\geq 0\end{cases}$$

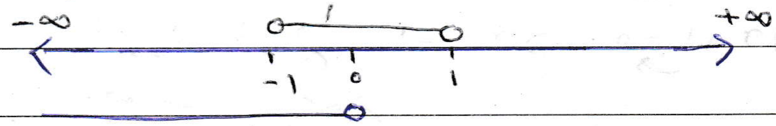
حل: $D_f=(x\geq 1)\cup(x<1)=\mathbb{R}\ ,\ D_g=(x<0)\cup(x\geq 0)=\mathbb{R}$

$D_{f\circ g}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}1-2g(x), & g(x)<1\\ 1+g(x), & g(x)\geq 1\end{cases}$$

$x<0,\ g(x)<1 \Rightarrow x<0,\ x^2<1 \xrightarrow{\sqrt{}} x<0,\ |x|<1 \Rightarrow$

$x<0,\ -1<x<1 \longrightarrow$ $\cap$



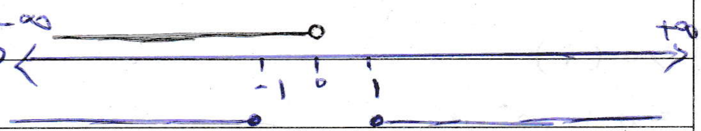
$\Rightarrow (-1,0)=-1<x<0$

$x\geq 0,\ g(x)<1 \Rightarrow x\geq 0,\ 1-x<1 \Rightarrow x\geq 0,\ 1-1<x$

$\Rightarrow x\geq 0 \overset{\cap}{,} x>0 \Rightarrow x>0=(0,+\infty)$

$x<0,\ g(x)\geq 1 \Rightarrow x<0,\ x^2\geq 1 \xrightarrow{\sqrt{}} x<0,\ |x|\geq 1$

$\Rightarrow x<0 \overset{\cap}{,} x\geq 1 \cup x\leq -1 \Rightarrow$



$\Rightarrow x\leq -1=(-\infty,-1]$

$x\geq 0,\ g(x)\geq 1 \Rightarrow x\geq 0,\ 1-x\geq 1 \Rightarrow 1-1\geq x$

استاد حسن

$\Rightarrow x \geq 0 \cap x < 0 \Rightarrow x = 0$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} 1-2x^2 & , -1 < x < 0 \\ 1-2(1-x) = 1-2+2x = 2x-1 & , x > 0 \\ 1+x^2 & , x < -1 \\ 1+(1-x) = 2-x & , x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} 1-2x^2 & , -1 < x < 0 \\ 2x-1 & , x > 0 \\ 1+x^2 & , x < -1 \\ 2-x & , x = 0 \end{cases}$$

تعریف: تابع $y=f(x)$ را یک تابع یک به یک گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in D_f$ اگر $x_1 \neq x_2$ آنگاه داشته باشیم $f(x_1) \neq f(x_2)$. به عبارتی دیگر از رابطه‌ی $f(x_1) = f(x_2)$ می‌توان به رابطه‌ی $x_1 = x_2$ رسید.

نکته: از نظر نموداری تابع f یک به یک است هرگاه هر خط موازی محور x ها نمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه قطع نماید.

مثال: یک به یک بودن تابع $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ را روی دامنه‌اش بررسی نمایید.

حل: تابع f یک تابع گویا است لذا $D_f = \mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$.

$x+5=0 \Rightarrow x=-5$ ریشه مخرج $\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$

اگر $f(x_1) = f(x_2)$ آنگاه:

$$\frac{x_1-3}{x_1+5} = \frac{x_2-3}{x_2+5}$$

استاد حسین ...

Year: Month: Date: Subject: ۱۲

$(x_1-3)(x_2+5)=(x_2-3)(x_1+5) \Rightarrow$

$\cancel{x_1x_2}+5x_1-3x_2-\cancel{15}=\cancel{x_1x_2}+5x_2-3x_1-\cancel{15}$

$\Rightarrow 5x_1+3x_1=5x_2+3x_2 \Rightarrow 8x_1=8x_2 \Rightarrow x_1=x_2$

مثال: یک به یک بودن تابع $f(x)=x^3+3x^2+3x$ را بررسی کنید.

حل: یادآوری $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$f(x)=(x^3+3x^2+3x+1)-1=(x+1)^3-1$

$D_f=\mathbb{R}$, $x_1,x_2\in D_f$; $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow$

$(x_1+1)^3-\cancel{1}=(x_2+1)^3-\cancel{1} \Rightarrow (x_1+1)^3=(x_2+1)^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }}$

$x_1+\cancel{1}=x_2+\cancel{1} \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow$ تابع f یک به یک است

مثال: تابع $f(x)=x^2$ روی دامنه اش یعنی $\mathbb{R}$ یک به یک نیست

زیرا $f(-1)=f(1)=1$ اما $-1\neq 1$

نکته: اگر تابعی روی دامنه اش یک به یک نباشد می توانیم دامنه اش را محدود کنیم تا تبدیل به تابع ۱-۱ شود البته باید دامنه را طوری محدود کنیم که برد تابع تغییر نکند به عنوان مثال تابع $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x^2$ یک به یک است زیرا:

$D_f=[0,+\infty)$, $x_1,x_2\in D_f$; $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }}$

$x_1=x_2 \Rightarrow$ تابع f، یک به یک است

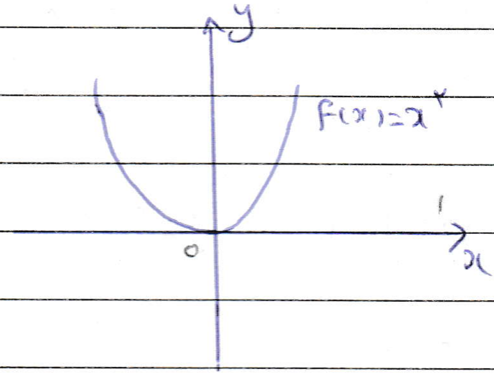
استاد محسن حزره

تعریف: تابع $f:A\to B$ را پوشا (پوششی) گوییم هرگاه $R_f = B$.

نکته: از نظر نمودار، تابع $f:A\to B$ پوشاست هرگاه هر خط $y=k\in B$ نمودار تابع f را حداقل در یک نقطه قطع کند.

مثال: تابع $f:\mathbb{R}\to\overbrace{\mathbb{R}}^{B}$ با ضابطهٔ $f(x)=x^3$ یک تابع پوشاست زیرا $R_f=\mathbb{R}=B$.

مثال: تابع $f:\mathbb{R}\to\overbrace{\mathbb{R}}^{B}$ با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ یک تابع پوشا نیست زیرا $R_f=[0,+\infty)$ و $B=\mathbb{R}$ درنتیجه $R_f\neq B$.



$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=[0,+\infty)$

مثال: تابع $f:\mathbb{R}\to\overbrace{[0,+\infty)}^{B}$ با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ پوشاست زیرا: $R_f=[0,+\infty)=B$.

مثال: تابع $f:\mathbb{R}\to\overbrace{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}$ با ضابطهٔ $f(x)=x^2+4x+1$ پوشا نیست زیرا:

حل: $f(x)=x^2+4x+1=\overbrace{(x^2+4x+4)}^{\text{مربع دوجمله‌ای}}-4+1$

$=(x+2)^2-3$

$x\in D_f=\mathbb{R} \Rightarrow (x+2)^2\geq 0 \xRightarrow{-3} \underbrace{(x+2)^2-3}_{f(x)}\geq -3 \Rightarrow f(x)\geq -3$

$\Rightarrow R_f=[-3,+\infty)\neq B=\mathbb{R} \Rightarrow$ تابع پوشا نیست

استاد حسن فرخ

تعریف: تابع $f:A \to B$ را یک تابع دوسویی گوئیم هرگاه f یک به یک و پوشا باشد.

نکته: از نظر نموداری تابع f دوسویی است هرگاه هر خط $y=x\in B$ نمودار تابع f را دقیقاً در یک نقطه قطع کند.

مثال: تابع $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=x^3$ یک تابع دوسویی است زیرا هم یک به یک است و هم پوشا است.

وارون (معکوس) یک تابع

تعریف: فرض کنیم $f:A \to B$ تابعی یک به یک باشد، در این صورت وارون (معکوس) f یعنی f^{-1} وجود دارد و چنین تعریف می‌شود:

$$f^{-1}=\{(y,x)\mid (x,y)\in f\} \quad , \quad y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

و با تبدیل x به y داریم: $y=f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x=f(y)$

نکته: برای به دست آوردن ضابطه f^{-1}، از ضابطه تابع یعنی از $y=f(x)$ استفاده کرده و x را بر حسب y به دست می‌آوریم. عبارتی که بر حسب y یعنی $x=f(y)$ به دست می‌آوریم همان f^{-1} است اما چون ضابطهٔ تابع را با x می‌شناسیم y را پاک می‌کنیم و به جای آن x می‌نویسیم تا $y=f^{-1}(x)$ به دست آید.

تعریف: برای تابع $f:A \to B$ تابعی مانند $g:B \to A$ را وارون چپ f می‌خوانیم، اگر:

$$\forall x\in A: g(f(x))=x$$

استاد حسن‌پور

تعریف: برای تابع $f: A \to B$ تابعی مانند $g: B \to A$ را وارون راست f می‌خوانیم اگر

$\forall y \in B: f(g(y)) = y$

تعریف: برای تابع $f: A \to B$ تابعی مانند $g: B \to A$ را وارون f می‌خوانیم اگر g وارون چپ و راست f باشد.

نکته: تابع $f: A \to B$ دارای:

۱) وارون چپ است اگر و تنها اگر f یک به یک باشد.

۲) وارون راست است اگر و تنها اگر f پوشا باشد.

۳) وارون است اگر و تنها اگر f یک به یک و پوشا باشد.

نکته: هرگاه معکوس f موجود باشد، آنگاه $\begin{cases} D_f = R_{f^{-1}} \\ R_f = D_{f^{-1}} \end{cases}$ و برای هر $x \in D_f$ و $y \in D_{f^{-1}}$ داریم:

$f^{-1} o f(x) = x \quad , \quad f o f^{-1}(y) = y$

نکته: هرگاه تابع $f: A \to B$ یک به یک باشد، آنگاه f معکوس پذیر است.

نکته: هرگاه تابع $f: A \to B$ یک به یک بوده و f^{-1} معکوس آن باشد، در این صورت f معکوس تابع f^{-1} است، به عبارت دیگر $(f^{-1})^{-1} = f$.

مثال: در مثالهای قبل دیدیم که تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ یک تابع یک به یک است در نتیجه تابع f معکوس پذیر است. حال می‌خواهیم f^{-1} را به دست آوریم که به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$y = f(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 1 = (x+1)^3 - 1 \Rightarrow y = (x+1)^3 - 1$

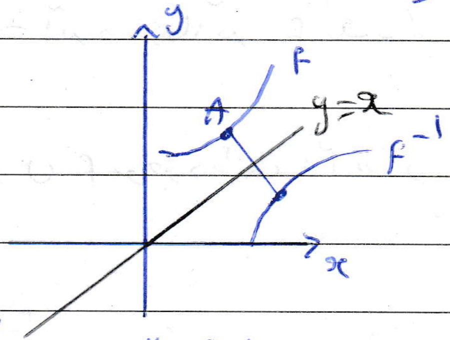
$\Rightarrow y + 1 = (x+1)^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} \sqrt[3]{y+1} = x + 1 \Rightarrow \underbrace{\sqrt[3]{y+1} - 1}_{f^{-1}} = x$

استاد حسن‌زاده

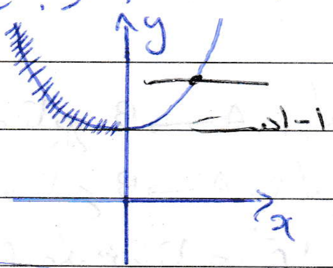
Year: Month: Date: Subject: ۱۶

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$

نکته: با توجه به اینکه اگر $(x,y)\in f$ آنگاه $(y,x)\in f^{-1}$ در نتیجه نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌باشند. در نتیجه برای رسم نمودار f^{-1} ابتدا نمودار f را رسم کرده سپس خط $y=x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) را رسم می‌کنیم و مقداری نقطه روی نمودار f در نظر می‌گیریم و سپس این نقاط را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم و نقاط جدید به دست آمده را به یکدیگر وصل می‌نماییم تا نمودار f^{-1} به دست آید.



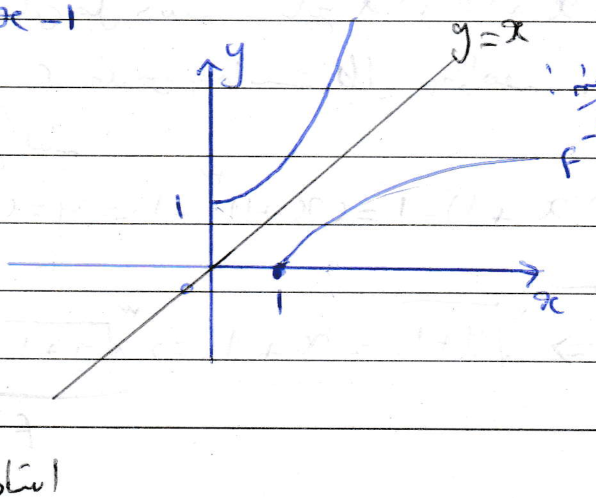
مثال: تابع $f(x)=x^2+1$ با ضابطه $f:[0,+\infty)\to \mathbb{R}$ یک به یک است و وارون آن به صورت زیر به دست می‌آید:



$y=f(x)=x^2+1 \Rightarrow y-1=x^2 \xrightarrow{\sqrt{}} x=\sqrt{y-1} \Rightarrow$ f^{-1}

$f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$

حال نمودار f^{-1} را رسم می‌کنیم:



استاد حسن مرادی

مثال: فرض کنید تابع f معکوس پذیر باشد و $g(x)=\frac{1-2f(x)}{2+f(x)}$. مطلوب است محاسبه ضابطه g^{-1}.

حل: $y=g(x) \Rightarrow x=g^{-1}(y)$

$$\frac{y}{1}=\frac{1-2f(x)}{2+f(x)} \Rightarrow y(2+f(x))=1-2f(x) \Rightarrow 2y+yf(x)=1-2f(x)$$

$$yf(x)+2f(x)=1-2y \Rightarrow f(x)(y+2)=1-2y \xrightarrow{\div(y+2)}$$

$$f(x)=\frac{1-2y}{y+2} \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(\frac{1-2y}{y+2}\right) \Rightarrow x=\overbrace{f^{-1}\left(\frac{1-2y}{y+2}\right)}^{g^{-1}}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(y)=f^{-1}\left(\frac{1-2y}{y+2}\right)$$

تعریف: تابع $f:A\to B$ را صعودی (یا صعودی اکید) گوییم هرگاه به ازای هر $x_1,x_2\in D_f$ داشته باشیم:

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ (یا $f(x_1)<f(x_2)$)

تعریف: تابع $f:A\to B$ را نزولی (یا نزولی اکید) گوییم هرگاه به ازای هر $x_1,x_2\in D_f$ داشته باشیم:

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$ (یا $f(x_1)>f(x_2)$)

تعریف تابع زوج: تابع $f:A\to B$ با ضابطه $y=f(x)$ را یک تابع زوج گوییم هرگاه دو شرط زیر صدق کند.

۱) اگر $x\in D_f$ آنگاه $-x\in D_f$ (یعنی دامنه نسبت به مبدأ متقارن باشد).

۲) $f(-x)=f(x)$.

تعریف تابع فرد: تابع $f:A\to B$ با ضابطه $y=f(x)$ را یک تابع فرد گوییم هرگاه دو شرط زیر صدق کند:

۱) اگر $x \in D_f$ آنگاه $-x \in D_f$.

۲) $f(-x) = -f(x)$.

نکته: نمودار توابع زوج نسبت به محور yها و نمودار توابع فرد نسبت به مبدأ متقارن هستند.

مثال: تابع $f(x) = x^4 + x^2$ یک تابع زوج است.

حل: اولاً $D_f = \mathbb{R}$ لذا دامنه این تابع متقارن است. یعنی اگر $x \in \mathbb{R}$ آنگاه $-x \in \mathbb{R}$. حال شرط دوم را بررسی می‌کنیم:

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

لذا f تابع زوج است.

مثال: تابع $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2+1}$ یک تابع فرد است.

حل: تابع f یک تابع گویاست لذا $D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$. در نتیجه:

$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1$ غ ق ق $\Rightarrow$ مخرج ریشه ندارد

در نتیجه $D_f = \mathbb{R}$، در نتیجه اگر $x \in D_f$ آنگاه $-x \in D_f$. حال شرط دوم را بررسی می‌کنیم:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3 + x}{x^2+1} = \frac{-(x^3 - x)}{x^2+1}$$

$$= -\frac{x^3 - x}{x^2+1} = -f(x)$$

استاد محسن فرخی

$\Rightarrow f(-x)=-f(x) \Rightarrow$ تابع f فرد است.

مثال: تابع $f(x)=x^3+x^2$ نه زوج است و نه فرد.

حل: تابع f یک چندجمله‌ای است لذا $D_f=\mathbb{R}$ درنتیجه اگر $x\in D_f$ آنگاه $-x\in D_f$. لذا شرط اول برقرار است. حال شرط دوم را بررسی می‌کنیم.

$$f(-x)=(-x)^3+(-x)^2=-x^3+x^2=-(x^3-x^2)\neq f(x), -f(x)$$

درنتیجه تابع f نه زوج است و نه فرد است.

نکته: تابع ثابت $f(x)=c$ هم زوج است و هم فرد.

مثال: تابع $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^4+x^2$ نه زوج است و نه فرد است زیرا دامنه تابع $[0,+\infty)$ $D_f=$ نسبت به مبدأ متقارن نیست یعنی اگر $2\in D_f$ اما $-2\notin D_f$ در واقع شرط اول برقرار نمی‌باشد.

توابع مثلثاتی: همانطور که از دبیرستان به یاد دارید توابع مثلثاتی که در دبیرستان خواندید عبارتند از:

1) $f(x)=\sin x \qquad D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\cos x \qquad D_f=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\cos x=0 \to x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ریشه‌های مخرج

استاد صنعتی

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \ (k \in \mathbb{Z})\}$

۴) $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$ ریشه‌های مخرج

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$

۵) $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = (۲k+1)\frac{\pi}{۲} = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ریشه‌های مخرج

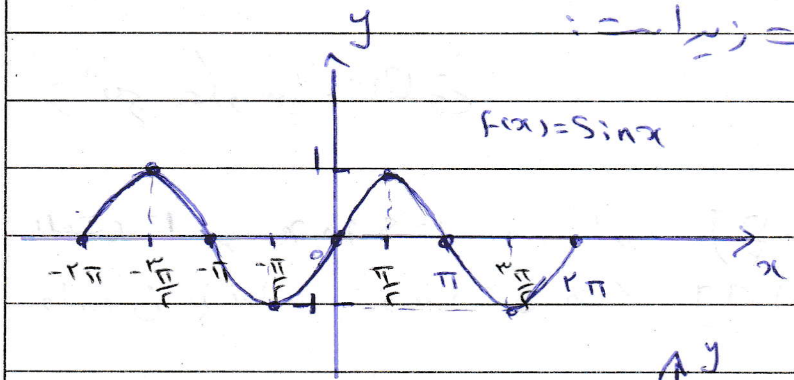
$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \ (k \in \mathbb{Z})\}$

۶) $f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x}$

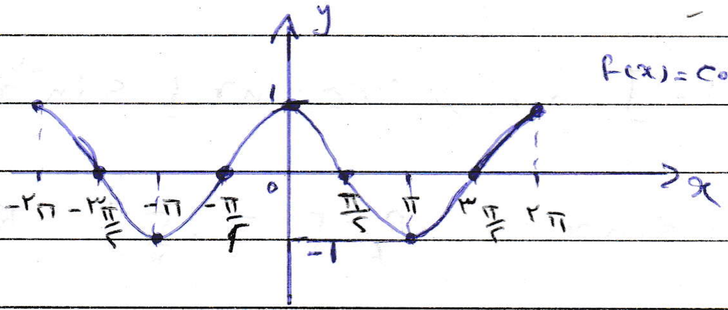
$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ ریشه‌های مخرج

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$

و نمودار این توابع به صورت زیر است:

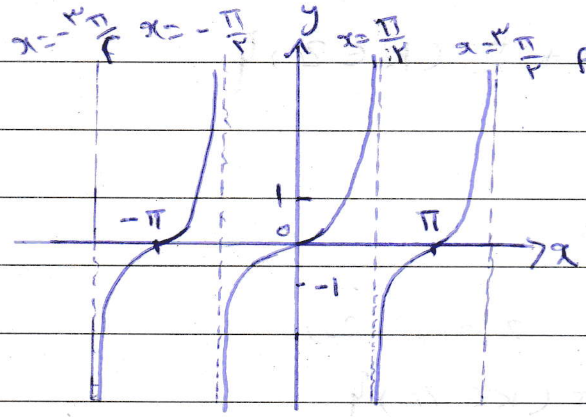


$R_f = [-1, 1]$



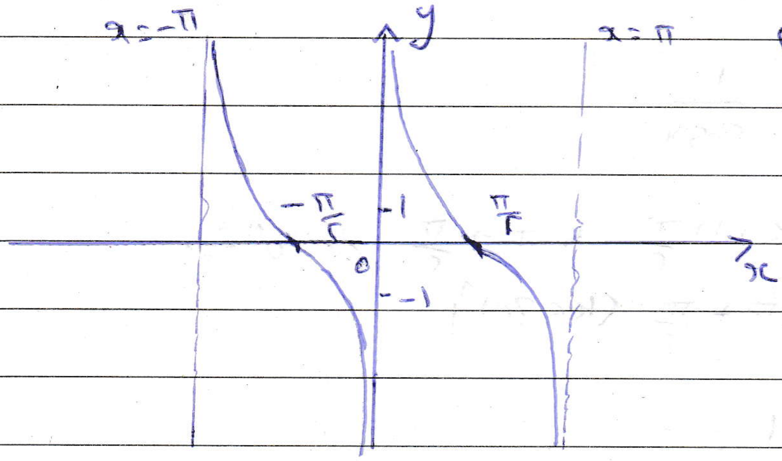
$R_f = [-1, 1]$

استاد حسن فرهنگ



$f(x)=\tan x$

$R_f=\mathbb{R}$



$f(x)=\cot x$

$R_f=\mathbb{R}$

نکته: توابع مثلثاتی روی دامنه‌هایشان یک به یک نیستند در نتیجه با محدود کردن دامنه‌هایشان طوری که برد تغییر نکند آنها را تبدیل به توابع یک به یک می‌نماییم و سپس وارون آنها را بدست می‌آوریم.

توابع معکوس مثلثاتی:

الف) تابع $y=\sin x$ روی بازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ یک به یک است لذا وارون پذیر است و برد آن هم $[-1,1]$ می‌باشد. معکوس این تابع با $\sin^{-1}x$ یا $\arcsin x$ بر بازه $[-1,1]$ تعریف می‌شود:

$f(x)=\sin x \quad D_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \quad R_f=[-1,1]$

استاد حسن [illegible]

$f^{-1}(x)=\sin^{-1}x=\arcsin x$ $\quad D_{f^{-1}}=[-1,1]$ $\quad R_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

ب) تابع $y=\cos x$ روی $[0,\pi]$ یک به یک است در نتیجه معکوس پذیر است و برد آن بازه‌ی $[-1,1]$ است. معکوس این تابع با نماد

$\cos^{-1}x$ یا $\arccos x$ به بازه‌ی $[-1,1]$ تعریف می‌شود یعنی:

$f(x)=\cos x$ $\quad D_f=[0,\pi]$ $\quad R_f=[-1,1]$

$f^{-1}(x)=\cos^{-1}x=\arccos x$ $\quad D_{f^{-1}}=[-1,1]$ $\quad R_{f^{-1}}=[0,\pi]$

پ) تابع $y=\tan x$ روی $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ یک به یک است در نتیجه معکوس پذیر است و برد آن IR است. معکوس این تابع با نماد

$\tan^{-1}x$ یا $\arctan x$ به بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ تعریف می‌شود یعنی:

$f(x)=\tan x$ $\quad D_f=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $\quad R_f=IR$

$f^{-1}(x)=\tan^{-1}x=\arctan x$ $\quad D_{f^{-1}}=IR$ $\quad R_{f^{-1}}=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

ت) تابع $y=\cot x$ روی $(0,\pi)$ یک به یک است در نتیجه معکوس پذیر است و برد آن IR است. معکوس این تابع با نماد $\cot^{-1}x$ یا $\text{arccot}\,x$

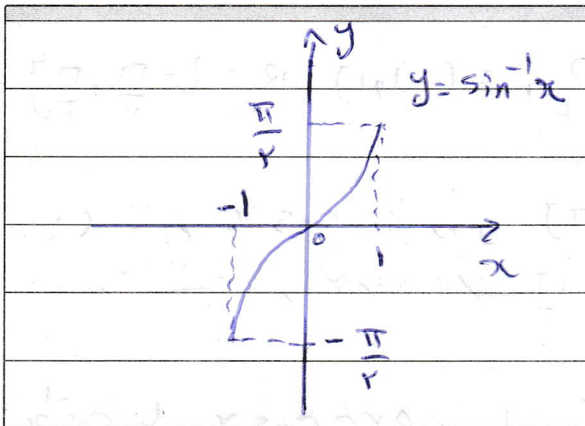
به بازه‌ی $(0,\pi)$ تعریف می‌شود یعنی:

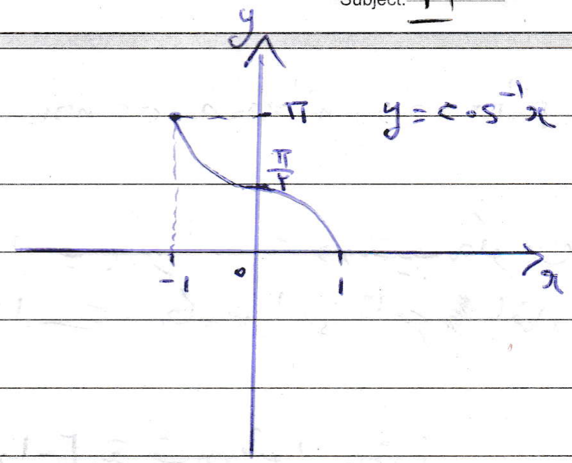
$f(x)=\cot x$ $\quad D_f=(0,\pi)$ $\quad R_f=IR$

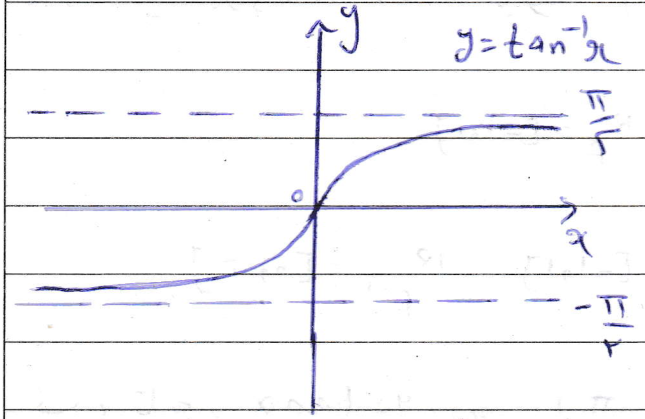
$f^{-1}(x)=\cot^{-1}x=\text{arccot}\,x$ $\quad D_{f^{-1}}=IR$ $\quad R_{f^{-1}}=(0,\pi)$

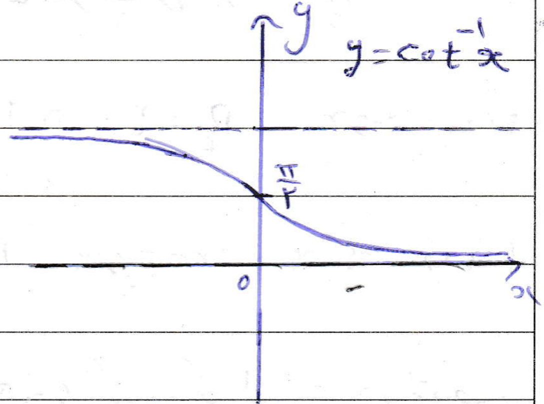
استاد [illegible]

Year: Month: Date: Subject: ۲۳









مثال: $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$

$(\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2})$

مثال: $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, $\arccos(-\frac{1}{2}) = 2\frac{\pi}{3}$

$(\cos(-2\frac{\pi}{3}) = +\cos(2\frac{\pi}{3}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2})$

مثال: $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

$(\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3})$

مثال: $\text{arccot}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$, $\text{arccot}(-\sqrt{3}) = 5\frac{\pi}{6}$

$(\cot(5\frac{\pi}{6}) = \cot(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3})$

استاد حسن

توابع هیپربولیک (توابع هذلولوی): در جلسات حضوری با دو تابع نمایی e^x و e^{-x} آشنا شدید. حال از ترکیب آن‌ها توابع خاصی به نام توابع هذلولوی به دست می‌آوریم که خواصی مشابه به توابع مثلثاتی دارند. از این خواص در حل مسائل ریاضی مهندسی استفاده می‌کنیم و حال این توابع را تعریف می‌کنیم.

(۱) $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

(۲) $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

(۳) $f(x) = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$D_f = \mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$

$$e^x + e^{-x} = 0 \Rightarrow \frac{e^x}{1} + \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow \frac{e^{2x} + 1}{e^x} = 0$$

$$\Rightarrow e^{2x} + 1 = 0 \rightarrow e^{2x} = -1 \Rightarrow (e^x)^2 = -1 \quad \text{غ ق ق}$$

$\Rightarrow$ مخرج ریشه ندارد $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

(۴) $f(x) = \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$D_f = \mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$

$$e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow \frac{e^x}{1} - \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^x} = 0 \Rightarrow$$

استاد حسن ز

$e^{2x}-1=0 \Rightarrow e^{2x}=1 \Rightarrow \underline{x=0}$ ریشه مخرج

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}-\{0\}$

ه) $f(x)=\operatorname{sech}x=\dfrac{1}{\cosh x}=\dfrac{1}{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}=\dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}}$

$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

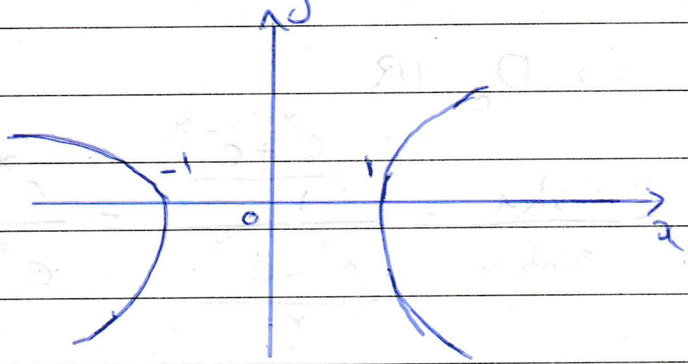
و) $f(x)=\operatorname{csch}x=\dfrac{1}{\sinh x}=\dfrac{1}{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}=\dfrac{2}{e^{x}-e^{-x}}$

$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

نکته: در توابع هیپربولیک داریم: $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$. حال اگر $\cosh t=x$ و $\sinh t=y$ قرار دهیم درنتیجه داریم $x^2-y^2=1$

که رابطه $x^2-y^2=1$ از لحاظ هندسی بیانگر یک هذلولی است

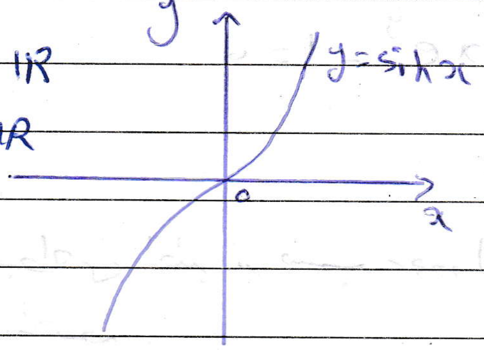
به همین دلیل به این توابع، توابع هذلولوی عمومی گویند.

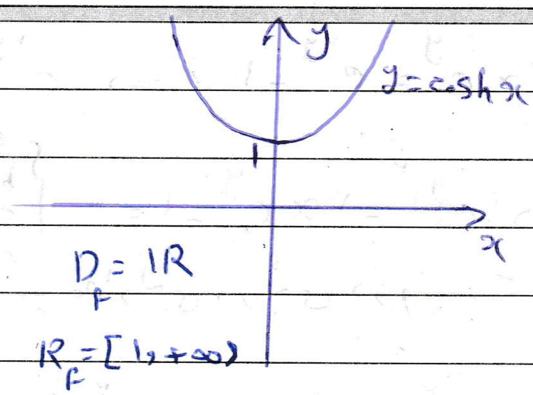


استاد من مرتضی

$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = \mathbb{R}$



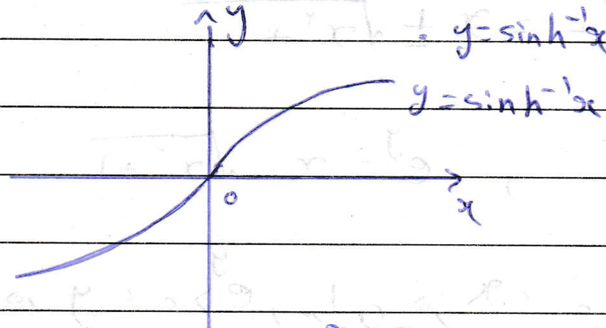


$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = [1, +\infty)$

توابع هذلولوی وارون:

تعریف: تابع $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک به یک است (زیرا هر خط موازی محور xها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع می کند) پس دارای وارون است. تابع سینوس هذلولوی وارون را با نماد $\sinh^{-1}$ نشان می دهیم و می نویسیم: $y = \sinh^{-1} x$.



چون $\sinh x$ برحسب تابع‌های e^x و e^{-x} تعریف شده است، این طور به نظر می رسد که بتوان $\sinh^{-1} x$ را برحسب یک تابع لگاریتمی بیان کرد. از این رو رابطهٔ $y = \sinh^{-1} x$ را به شکل $x = \sinh y$ می نویسیم پس:

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

اکنون سعی می کنیم که معادله را برحسب y حل کنیم. پس از ساده کردن به دست می آوریم:

$$\frac{x}{1} = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y - e^{-y}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{e^y}{1} - \frac{1}{e^y} \Rightarrow \frac{2x}{1} = \frac{e^{2y} - 1}{e^y} \Rightarrow$$

استاد حسن [illegible]

$$2xe^{y} = e^{2y} - 1 \Rightarrow e^{2y} - 2xe^{y} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (e^{y})^{2} - 2xe^{y} - 1 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2x \\ c = -1 \end{cases}$$

رابطه‌ی اخیر بر حسب مجهول e^y یک معادله‌ی درجه‌ی دو است، در نتیجه:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2x)^2 - 4(1)(-1) = 4x^2 + 4 = 4(x^2+1)$$

$$e^{y} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2x) \pm \sqrt{4(x^2+1)}}{2(1)}$$

$$e^{y} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2+1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow e^{y} = x + \sqrt{x^2+1} \quad , \quad e^{y} = x - \sqrt{x^2+1}$$

چون برای هر y، $e^y > 0$ و برای هر x، $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ تنها جواب قابل قبول عبارت است از:

$$e^{y} = x + \sqrt{x^2+1} \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\ln} \ln e^{y} = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\Rightarrow y \cancel{\ln e} = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\Rightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\Rightarrow y = \sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

تمرین: با توجه به نمودار $f(x) = \cosh x$ می‌توان دید که برای هر x، $\cosh x \geq 1$ همچنین تابع $\cosh : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ روی دامنه‌اش یک به یک نیست.

دفاتر مرجان MARJAN

استاد حسن ورکی

در نتیجه باید دامنه آن را محدود کنیم و دامنه آن را $[0,+\infty)$ می گیریم

در نتیجه $\cosh : [0,+\infty) \to [1,+\infty)$ یک به یک و پوشاست. پس با محدود کردن

قلمرو کسینوس هذلولوی، به مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی این تابع وارون دارد. تابع کسینوس هذلولوی وارون را با $\cosh^{-1}$

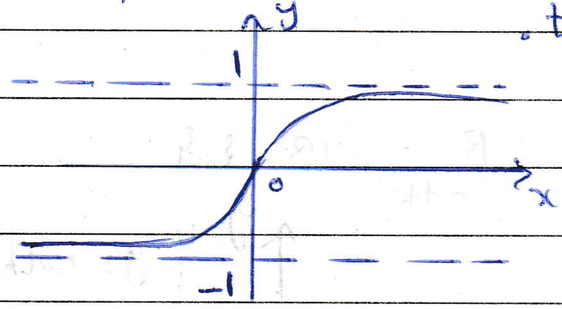
نشان می دهیم و در نتیجه $D_{f^{-1}}=[1,+\infty)$ و $R_{f^{-1}}=[0,+\infty)$ و به عنوان

تمرین نشان دهید برای هر $x\geq 1$، داریم:

$$f(x)=\cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

تعریف: با توجه به نمودار $f(x)=\tanh x$ داریم که $D_f=\mathbb{R}$, $R_f=(-1,1)$

در نتیجه $\tanh : \mathbb{R}\to(-1,1)$.



$f(x)=\tanh x$

در نتیجه تابع $\tanh:\mathbb{R}\to(-1,1)$ یک به یک و پوشاست، در نتیجه وارون دارد. تابع تانژانت هذلولوی وارون را با نماد $\tanh^{-1}$ نشان

می دهیم. به طور مشابه می توان نشان داد برای هر $x\in(-1,1)$،

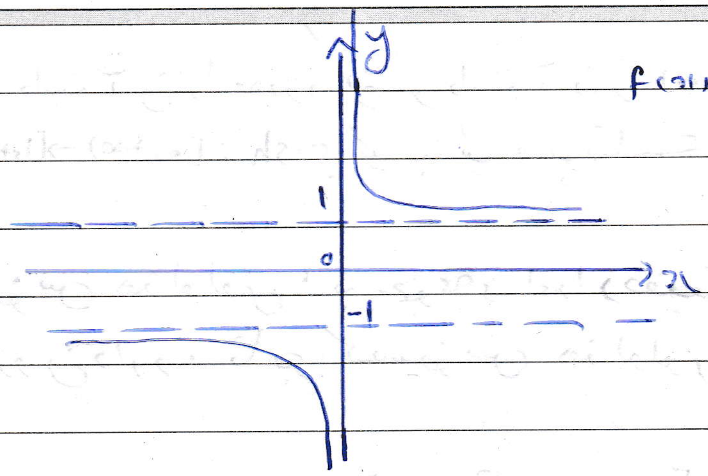
داریم:

$$f(x)=\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad D_{\tanh^{-1}}=(-1,1) \qquad R_{\tanh^{-1}}=\mathbb{R}$$

تعریف: با توجه به نمودار $f(x)=\coth x$ داریم که $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ و

$R_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ می باشد در نتیجه $\coth:\mathbb{R}-\{0\}\to(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

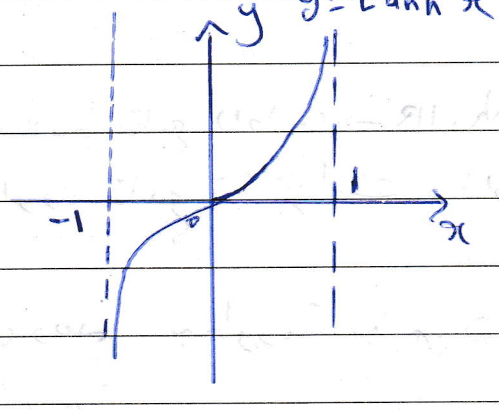
استاد حسن ...

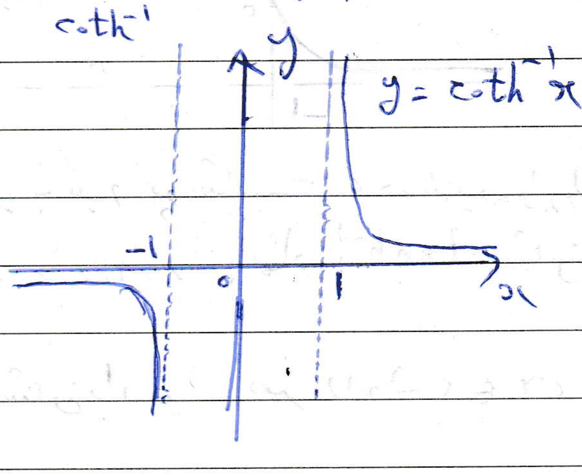


در نتیجه تابع $\coth : \mathbb{R}-\{0\} \to (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ یک به یک و پوشا است. بنابراین وارون دارد. تابع کتانژانت هذلولوی وارون را با $\coth^{-1}$ نشان می دهیم. می توان نشان داد که برای هر x که $|x|>1$ داریم:

$$f(x)=\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln \frac{x+1}{x-1}$$

$D_{\coth^{-1}} = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ $\qquad$ $R_{\coth^{-1}} = \mathbb{R}-\{0\}$





استاد حسن‌ز

مثال‌های حل شده فصل تابع:

۱) برد تابع $f(x)=\frac{|x|}{|x|+1}$ را بیابید.

حل: $D_f=\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$.

زیرا قدرمطلق همیشه مثبت است غ ق ق $|x|+1=0 \Rightarrow |x|=-1$

لذا مخرج ریشه ندارد پس $D_f=\mathbb{R}$. حال برد آن را تعیین

می‌کنیم: $f(x)$

$x\in D_f=\mathbb{R}\ ,\ 0\leq|x|<|x|+1 \xrightarrow{\div(|x|+1)} 0\leq\frac{|x|}{|x|+1}<1$

$\Rightarrow 0\leq f(x)<1 \Rightarrow R_f=[0,1)$

۲) فرض کنید تابع f طوری باشد که $f\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=x^2+1$. ضابطه و دامنه تابع f را بیابید.

حل: برای پیدا کردن ضابطه f از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم به صورت زیر:

$\frac{x-1}{x+2}=\frac{t}{1} \Rightarrow x-1=t(x+2) \Rightarrow x-1=tx+2t$

$x-tx=2t+1 \Rightarrow x(1-t)=2t+1 \xrightarrow{\div(1-t)}$

$x=\frac{2t+1}{1-t}$

$\Rightarrow f\left(\underbrace{\frac{x-1}{x+2}}_{t}\right)=x^2+1 \Rightarrow f(t)=\left(\frac{2t+1}{1-t}\right)^2+1$

$\Rightarrow f(t)=\frac{(2t+1)^2}{(1-t)^2}+\frac{1}{1}=\frac{4t^2+4t+1+(1-t)^2}{(1-t)^2}$

استاد حسین فرخ

Year: Month: Date: Subject: ۳۱

$$\Rightarrow f(t)=\frac{4t^2+4t+1+1-2t+t^2}{(1-t)^2}=\frac{5t^2+2t+2}{(1-t)^2}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{5x^2+2x+2}{(1-x)^2}$$

$D_f=\mathbb{R}-\{$ ریشه های مخرج $\}$

$(1-x)^2=0 \rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$ ریشه مخرج

$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

مثال: فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , x<2 \\ \frac{x}{2} & , x\geq 2 \end{cases}$ مطلوب است محاسبه ضابطه $f\circ f$.

حل:

$$f\circ f(x)=f(f(x))=\begin{cases} (f(x))^2+1 & , f(x)<2 \\ \frac{f(x)}{2} & , f(x)\geq 2 \end{cases}$$

1) $x<2,\ f(x)=x^2+1<2 \Rightarrow x<2,\ x^2<2-1 \Rightarrow x<2,\ x^2<1$

$\Rightarrow x<2,\ |x|<1 \Rightarrow x<2,\ -1<x<1 \Rightarrow -1<x<1$

$\cap$

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad +\infty$

2) $x<2,\ f(x)=x^2+1\geq 2 \Rightarrow x<2,\ x^2\geq 2-1 \Rightarrow x<2,\ x^2\geq 1$

$\Rightarrow x<2,\ |x|\geq 1 \Rightarrow x<2 \cap (x\geq 1$ یا $x\leq -1)$

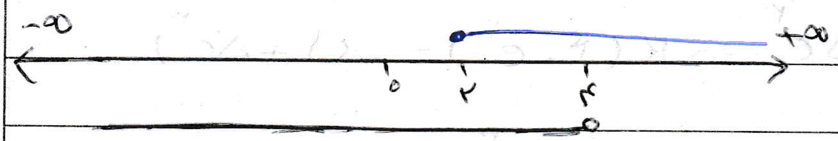
$\Rightarrow x\leq -1$ یا $1\leq x<2$

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad +\infty$

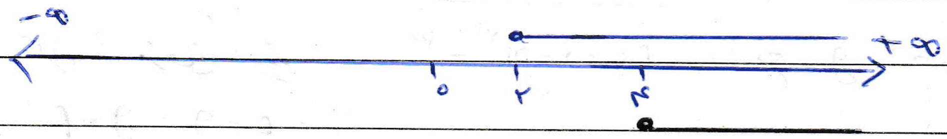
دفاتر مرجان MARJAN

استاد حسن زاده

۳) $x \geq 2 \;,\; f(x) = \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow x \geq 2 \cap x < 4 \Rightarrow \underline{2 \leq x < 4}$



۴) $x \geq 2 \;,\; f(x) = \frac{x}{2} \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 \cap x \geq 4 \Rightarrow \underline{x \geq 4}$



$$f\circ f(x) = f(f(x)) = \begin{cases} (x^2+1)^2+1 & , -1<x<1 \\ \frac{x^2+1}{2} & , 1\leq x<2 \;\text{یا}\; x\leq -1 \\ (\frac{x}{2})^2+1 & , 2\leq x<4 \\ \frac{\frac{x}{2}}{2} & , x\geq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f\circ f(x) = \begin{cases} (x^2+1)^2+1 & , -1<x<1 \\ \frac{x^2+1}{2} & , 1\leq x<2 \;\text{یا}\; x\leq -1 \\ \frac{x^2}{4}+1 & , 2\leq x<4 \\ \frac{x}{4} & , x\geq 4 \end{cases}$$

مثال: نقطه $A=(3,k)$ یک نقطه واقع بر نمودار تابع معکوس $y=\ln(\frac{4x+1}{x-5})$ می باشد. k را بیابید.

حل:

$\boxed{a^{\log_a x} = x} \Rightarrow \boxed{e^{\ln x} = x}$

$(3,k)\in f^{-1} \Rightarrow (k,3)\in f \Rightarrow f(k)=3 \Rightarrow \ln(\frac{4k+1}{k-5}) = 3$

$\Rightarrow e^{\ln(\frac{4k+1}{k-5})} = e^{3} \Rightarrow \frac{4k+1}{k-5} = \frac{e^3}{1} \Rightarrow$

استاد صنیع زاده

Year: Month: Date: Subject: ۳۳

$$4k+1=e^3(k-5) \Rightarrow 4k+1=ke^3-5e^3$$

$$\Rightarrow 4k-ke^3=-1-5e^3 \Rightarrow k(4-e^3)=-(1+5e^3)$$

$$\Rightarrow k=\frac{-(1+5e^3)}{4-e^3} \Rightarrow \boxed{k=\frac{1+5e^3}{e^3-4}}$$

مثال: فرض کنید $f(x)=x^3-3$. تابع g را طوری بیابید که $f\circ g=g\circ f$.

حل: چون تابع f چندجمله‌ای است لذا $D_f=\mathbb{R}$. همچنین تابع f وارون‌پذیر است زیرا:

$if\ f(x_1)=f(x_2) \overset{?}{\Rightarrow} x_1=x_2$ در واقع یک به یک بودن

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^3-\cancel{3}=x_2^3-\cancel{3} \Rightarrow x_1^3=x_2^3 \xRightarrow{\sqrt[3]{\ }} x_1=x_2 \Rightarrow$$ تابع f یک به یک است.

چون تابع f یک به یک است لذا f وارون‌پذیر است و بنا بر تعاریف در بحث تابع وارون که $f\circ f^{-1}(x)=f^{-1}\circ f(x)=x$ نتیجه می‌گیریم

که $g=f^{-1}$

$$f(x)=x^3-3 \Rightarrow y=x^3-3 \Rightarrow y+3=x^3 \xRightarrow{\sqrt[3]{\ }}$$

$$\underbrace{\sqrt[3]{y+3}}_{f^{-1}}=x \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+3} \Rightarrow g(x)=\sqrt[3]{x+3}$$

مثال: دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{[x]-|x|}$ را بدست آورید.

حل: تابع f یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است در نتیجه برای

تعیین دامنه آن: $[x]-|x|\geq 0 \Leftarrow [x]\geq |x|$. پس اولاً $[x]$

استاد حسن‌زاده

باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد یعنی $x \geq 0$.

ثانیاً $[x]$ همواره کوچکتر یا مساوی x است ($[x] \leq x$) و تنها

هنگامی که $x \in \mathbb{Z}$ باشد، $[x]=x$ است. که با توجه به اینکه $x \leq |x| \leq [x]$

در نتیجه اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد $x=[x] \leq |x| \leq [x]$ و در نتیجه $|x|=[x]$

بنابراین دامنهٔ تابع، مجموعهٔ اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی صفر،

یعنی $D_f = \{0,1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ است.

if $x \in D_f \Rightarrow [x]=|x| \Rightarrow f(x)=\sqrt{0}=0 \Rightarrow R_f=\{0\}$

مثال: برد تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$ را بیابید.

حل: ابتدا دامنه f را بدست می‌آوریم که چون f یک تابع گویا است لذا $D_f = \mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$.

$x^4+1=0 \Rightarrow x^4=-1$ غ ق ق ⇐ مخرج ریشه ندارد

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 ,\ x^4+1 > 0 \Rightarrow \boxed{f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1} \geq 0 ,\ x \in \mathbb{R}\ (1)}$

$\left((x^2-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^4-2x^2+1 \geq 0 \xrightarrow{\div x^2} x^2-2+\dfrac{1}{x^2} \geq 0 \right.$
$\left. \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2} \geq 2 \right)$

$\dfrac{x^4+1}{x^2} = \dfrac{x^4}{x^2}+\dfrac{1}{x^2} = x^2+\dfrac{1}{x^2} \geq 2 \Rightarrow \dfrac{x^4+1}{x^2} \geq 2$

استاد صنوبر

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x^4+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{x^4+1} \leq \frac{1}{2} \,, \; x\in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow R_f=[0,\frac{1}{2}]$$

مثال: برد تابع $y=\sqrt{-x^2+2x}+1$ را بیابید.

حل:

$$y=1+\sqrt{-x^2+2x} \geq 1 \quad (1)$$

$$y=1+\sqrt{-x^2+2x} \rightarrow y-1=\sqrt{-x^2+2x} \xrightarrow[2]{\text{توان}} (y-1)^2=-x^2+2x$$

$$x^2-2x+(y-1)^2=0 \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=(y-1)^2 \end{cases}$$

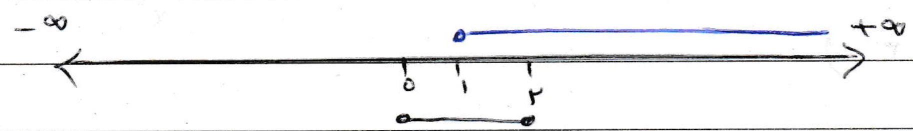
معادله درجه ۲ برای اینکه جواب داشته باشد باید $\Delta \geq 0$.

$$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(y-1)^2=4-4(y-1)^2=4(1-(y-1)^2)\geq 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} 1-(y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq (y-1)^2 \Rightarrow (y-1)^2 \leq 1 \xrightarrow{\sqrt{}}$$

$$|y-1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y-1 \leq 1 \xrightarrow{+1} 0 \leq y \leq 2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \cap \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow R_f=[1,2]$$



استاد من فرح