# درس ریاضی فیزیک ۳
# فصلِ سوّم: توابع لژاندر

چند جمله ای های لژاندر در گسترهٔ وسیعی از مسائلِ ریاضی فیزیک ظاهر می شوند. به عنوانِ نمونه:

**۱ –** در حلِّ معادلهٔ لاپلاس و یا اساساً در حلِّ معادلهٔ هلمهولتز در مختصّاتِ کروی به این چند جمله ای برمی خوریم.

**۲ –** در مکانیکِ کوانتومی، به صورتِ هارمونیک های کروی و برای نمایشِ ویژه توابعِ اندازه حرکتِ زاویه ای مطرح می شود.

**۳ –** پاسخِ معادلهٔ دیفرانسیلِ معروف به معادلهٔ لژاندر، به چند جمله ای لژاندر معروف است.

**۴ –** می توان این چند جمله ای را توسّط یک تابعِ مولّد ایجاد کرد و این همان شیوه ای است که اغلبِ کتاب های ریاضی ـ فیزیک از دیدگاه ریاضی به آن می پردازند.

## ۱ – مثال از الکتروستاتیک به عنوان پایهٔ فیزیکی توابعِ لژاندر:

در این قسمت از تعبیرِ مستقیمِ فیزیکی در بارهٔ چند جمله ای لژاندر استفاده می کنیم. بارِ الکتریکی $q$ را در نقطهٔ $z=a$ روی محورِ $z$ قرار می دهیم. پتانسیلِ الکتروستاتیک این بار در نقطه ای از فضا به فاصلهٔ $r_1$ از بارِ مذکور چنین است:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1}$$

می خواهیم این پتانسیل را در مختصّاتِ کروی بر حسبِ $r$ و $\theta$ بیان کنیم (البتّه به دلیلِ تقارن مختصّهٔ $\varphi$ ظاهر نمی شود).

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(r^2+a^2-2ar\,\mathrm{Cos}\,\theta\right)^{-1/2}$$

فاصلهٔ نقطهٔ موردِ مطالعه در فضا تا مبدأ مختصّات را با $r$ نشان می دهیم. $\theta$ نیز زاویهٔ میانِ بردارِ $r$ و محورِ $z$ است. حالتِ $r \succ a$ یا دقیق تر $r^2 \succ \left|a^2 - 2ar\,\mathrm{Cos}\,\theta\right|$ را در نظر می گیریم:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\mathrm{Cos}\,\theta\right)\left(\frac{a}{r}\right)^n$$

$P_n\left(\mathrm{Cos}\,\theta\right)$ نمایشِ سری توان های $\frac{a}{r}$ در جملهٔ $n$ام توان $\left(\frac{a}{r}\right)$ است که چند جمله ای لژاندر نامیده می شود و در ریاضیات آن را از طریقِ تابعِ مولّد به صورتِ زیر تعریف می کنیم:

$$g\left(x,t\right) = \left(1 - 2xt + t^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(x\right)t^n$$

این نحوه نمایش معادل این است که سمتِ راست معادلات (۱) و (۲) را با هم مساوی قرار دهیم با این فرض که $x = \mathrm{Cos}\,\theta$ و $\frac{a}{r} = t$ انتخاب شود. در ادامه بحث نشان می دهیم که $\left|P_n\left(\mathrm{Cos}\,\theta\right)\right| \prec 1$ است بدین معنا که بسط سری (۳) برای $|t| \prec 1$ همگراست. مگر حالتِ $|x| = 1$ .

اکنون قضیهٔ بسط دو جمله ای را در موردِ رابطهٔ (۳) به کار می بریم:

$$\left(1 - 2xt + t^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(2n+1\right)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}\left(2xt - t^2\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(2n+1\right)!!}{\left(2n\right)!!}\left(2xt - t^2\right)^n$$

چند جمله ای فوق را بسط می دهیم و ضرایبِ توان های همانند را با ضرایبِ بسط رابطه مساوی هم قرار می دهیم. چند جمله نخست بسط لژاندرچنین می شود:

$$P_0\left(x\right) = 1; \qquad P_1\left(x\right) = x; \qquad P_2\left(x\right) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

از مبحثِ سری ها می دانیم که بسط عبارتِ $\left(1 - 2xt + t^2\right)^{-1/2}$ را می توان به صورتِ جمع دوگانهٔ زیر نوشت:

$$\left(1 - 2xt + t^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k \frac{\left(2n-k\right)!}{2^{2n-2k}\,k!\left(n-k\right)!\left(n-2k\right)!}\left(2x\right)^{n-2k}\,t^k$$

چنانچه در بسط بالا جمله های مشابه با بسط سری (۳) را برابر قرار دهیم، چند جمله ای لژاندر به شکلِ زیر نتیجه می شود:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\,\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}(x)^{n-2k}$$

که در آن قرار بر این است که $\left[{}^{n}\!/_{2}\right]=\frac{n}{2}$ برای $n$ زوج و $\left[{}^{n}\!/_{2}\right]=\frac{n-1}{2}$ برای $n$ فرد انتخاب شود.

**نکته ــ** در کاربردهای فیزیکی اغلب از رابطۀ برداری زیر استفاده می شود:

$$\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}=\frac{1}{r_{\succ}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_{\prec}}{r_{\succ}}\right)^n P_n(\mathrm{Cos}\,\gamma)$$

در واقع این رابطه نمایشگر پتانسیل در نقطه $\vec{r}_1$ ناشی از از واحد بار نقطه ای در $\vec{r}_2$ است و $\gamma$ زاویه بین دو بردار $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ است.

## ۲ – روابط بازگشتی و چند ویژگی توابع لژاندر:

از تابعِ مولّد چند جمله ای لژاندر برای یافتنِ روابط بازگشتی کمک می گیریم. از تابعِ مولّد (۳) نسبت به $t$ مشتق می گیریم.

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}=\frac{x-t}{\left(1-2xt+t^2\right)^{1/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}$$

رابطۀ (۳) را در عبارتِ فوق قرار داده جملات را مرتب می کنیم:

$$\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}+(t-x)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=0$$

ضریبِ هر توانِ $t$ را برابر صفر می گذاریم. در نتیجه

$$\sum_{m=0}^{\infty}P_m(x)t^{m-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2nxP_n(x)t^n+\sum_{s=0}^{\infty}sP_s(x)t^{s-1}$$
$$+\sum_{s=0}^{\infty}P_s(x)t^{s+1}-\sum_{n=0}^{\infty}xP_n(x)t^n=0$$

حال با انتخابِ $m=n+1$ و $s=n-1$ خواهیم داشت:

$$\left(2n+1\right)xP_n\left(x\right)=\left(n+1\right)P_{n+1}\left(x\right)+nP_{n-1}\left(x\right)$$

این رابطهٔ بازگشتی شبیه رابطهٔ بازگشتی سه جمله ای توابع بسل است.

## ۳ – معادلهٔ دیفرانسیلِ لژاندر:

از معادلهٔ (۳) نسبت به $x$ مشتق می گیریم:

$$\frac{\partial g\left(x,t\right)}{\partial x}=\frac{1}{\left(1-2xt+t^2\right)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n'\left(x\right)t^n$$

$$\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}P_n'\left(x\right)t^n-t\sum_{n=0}^{\infty}P_n\left(x\right)t^n=0$$

ضریبِ توان های مساوی $t$ را برابر صفر قرار می دهیم:

$$P_{n+1}'\left(x\right)+P_{n-1}'\left(x\right)=2xP_n'\left(x\right)+P_n\left(x\right) \qquad (۹)$$

از رابطهٔ بازگشتی (۸) استفاده کرده نسبت به $x$ مشتق می گیریم. نتیجه را در ۲ ضرب می کنیم. آنگاه تفاضلِ آن را از $\left(2n+1\right)$ برابر رابطهٔ (۹) حساب می کنیم. جمله $P_n'$ را حذف می کنیم. نتیجه چنین می شود:

$$P_{n+1}'\left(x\right)-P_{n-1}'\left(x\right)=\left(2n+1\right)P_n\left(x\right); \qquad (۱۰)$$

از معادلات فوق خواهیم داشت:

$$\begin{cases}P_{n+1}'\left(x\right)=\left(n+1\right)P_n\left(x\right)+xP_n'\left(x\right)\\ P_{n-1}'\left(x\right)=-nP_n\left(x\right)+xP_n'\left(x\right)\\ \left(1-x^2\right)P_n'\left(x\right)=nP_{n-1}\left(x\right)-nxP_n\left(x\right)\end{cases} \qquad (۱۱)$$

از رابطهٔ آخر (۱۱) مشتق می گیریم و رابطهٔ قبل آن را جایگزین می کنیم:

$$\left(1-x^2\right)P_n''\left(x\right)-2xP_n'\left(x\right)+n\left(n+1\right)P_n\left(x\right)=0$$

و یا بر حسبِ $\theta$ (با انتخابِ $x=\mathrm{Cos}\,\theta$ ):

$$\frac{1}{\operatorname{Sin}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{Sin}\theta\frac{dP_n(\operatorname{Cos}\theta)}{d\theta}\right)+n(n+1)P_n(\operatorname{Cos}\theta)=0 \qquad (۱۲)$$

**تمرین ـ** از تابع مولد کمک بگیرید و نتایج زیر را به دست آورید:

$$P_n(1)=1$$
$$P_n(-1)=(-1)^n$$
$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad n=1,2,3,\ldots$$
$$P_{2n+1}(0)=0 \qquad n=0,1,2,\ldots$$

## ۴–۱. پاریته:

$$g(-t,-x)=g(t,x)$$
$$\Rightarrow\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2}=\left[1-2(-t)(-x)+(-t)^2\right]^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-x)(-t)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$
$$\Rightarrow P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$$

یعنی توابعِ لژاندر نسبت به $x=0$ (یا $\theta=\frac{\pi}{2}$) زوج یا فرد هستند. این خاصیّتِ پاریته یا ویژگی بازتابی نقشِ عمده ای در مکانیکِ کوانتومی دارد. در موردِ مختصّاتِ کروی توجه داریم که وارونی نقطهٔ $(r,\theta,\varphi)$ نسبت به مبدأ از طریقِ تبدیلِ زیر صورت می گیرد:

$$r\to r;\quad \theta\to\pi-\theta;\quad \varphi\to\varphi+\pi$$

آنگاه $\operatorname{Cos}\theta\to\operatorname{Cos}(\pi-\theta)$ که وابسته به $x\to-x$ است.

## ۵– حلِّ معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر:

معادلهٔ دیفرانسیلِ لژاندر را قبلاً استخراج کردیم:

$$\left(1-x^2\right)P''(x)-2xP'(x)+l(l+1)P(x)=0$$

برای حل از شیوۀ فروبنیوس کمک می گیریم، هر چند نقطۀ $x=0$ نقطۀ عادی این معادله است و سری مک لورن نیز برای حلِّ آن کفایت می کند:

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{\rho+n}$$

$$\Rightarrow P'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\rho)x^{\rho+n-1}\Rightarrow P''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{\rho+n-2}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{\rho+n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{\rho+n}$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\rho)x^{\rho+n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n l(l+1)x^{\rho+n}=0$$

و در نهایت رابطۀ بازگشتی بین ضرایب چنین می شود:

$$a_{n+2}=\frac{(n+\rho)(n+\rho+1)-l(l+1)}{(n+\rho+2)(n+\rho+1)}a_n$$

معادلۀ نشانه ای یا اندیسی به ازای $n=-2$ به دست می آید:

$$\rho(\rho-1)=0\qquad\Rightarrow\begin{cases}\rho=0\\\rho=1\end{cases}$$

چون تفاضلِ ریشه ها عددِ صحیح است یک پاسخ قطعاً وجود دارد که به ازای $\rho=0$ همان بسط مک لورن خواهد بود. این پاسخ مستقل از $l$ و در فاصلۀ $-1\le x\le 1$ همگراست. سری برای $x=\pm 1$ واگراست، مگر اینکه به صورتِ چند جمله ای در آید.

چند جملۀ نخستِ سری لژاندر را در زیر می نویسیم:

$$P_0(x)=1\qquad\qquad P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\qquad\qquad P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$

بدین ترتیب می توان شکلِ فشردۀ چند جمله ای را به صورتِ زیر نوشت:

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)$$

این رابطه به فرمولِ رودریگرز (Rodrigues' formula) معروف است.

**تمرین ــ** حلِّ معادلۀ لژاندر را ادامه دهید و دو پاسخِ زوج و فردِ معادلۀ دیفرانسیل را بیابید. از طریقِ آزمونِ گاوس نشان دهید که سری پاسخ های معادله به ازای $x = \pm 1$ واگرا هستند.

## ۶– چند جمله ای وابستۀ لژاندر ــ حلِّ معادلۀ شرودینگر در پتانسیل مرکزی:

چند جمله ای زیر به نامِ چند جمله ای وابستۀ لژاندر شناخته می شود:

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \left(x^2 - 1\right)^l \qquad\qquad |m| \leq l$$

در ادامه خواهیم دید که این چند جمله ای پاسخِ بخشِ زاویه ای معادلۀ شرودینگر در پتانسیلِ مرکزی است. حالتِ $m = 0$ چند جمله ای شناخته شدۀ لژاندر را نتیجه می دهد. تابعِ $P_l^m(x)$ هنگامی در حلِّ معادلۀ دیفرانسیلِ لژاندر ظاهر می شود که مسئله دارای تقارنِ سمتی $\varphi$ نباشد.

## ۷- معادلۀ شرودینگر در پتانسیلِ مرکزی:

هامیلتونی ذرّه‌ای که در فضای سه بُعدی حرکت می‌کند چنین است:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$$

که در آن $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ عملگرِ اندازه‌حرکت است. چنانچه پتانسیل فقط به اندازۀ بردارِ $\vec{r}$ یعنی $r$ بستگی داشته باشد آن را پتانسیلِ مرکزی می‌نامیم که در این صورت روشِ جداسازی متغیّرها در حلِّ معادلۀ شرودینگر کاملاً به‌کار می‌آید؛ همان‌گونه که در قسمتِ قبل در موردِ سیستمِ دو ذرّه بحث کردیم. از آن‌جا که حرکت در پتانسیلِ مرکزی یکی از مهمّ‌ترین مباحثِ فیزیک است عمدۀ بحثِ خود را به این نوع پتانسیل اختصاص می‌دهیم، به‌ویژه که سرانجام به اتمِ هیدروژن به عنوانِ هدفِ نهایی این درس رهنمون می‌شویم و پتانسیلِ اتمِ هیدروژن نیز از نوعِ مرکزی است.

از ویژگی‌های پتانسیلِ مرکزی این است که می‌توان نشان داد که $H = \dfrac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$ تحتِ دَوَران نیز ناورداست. در پی آن انتظار داریم قانونِ بقایی در موردِ این پتانسیل وجود داشته باشد، مانند بقای پاریته؛ ناوردایی در اثرِ انتقال؛ و ناوردائی در اثرِ چرخش.

## ۷-۱. حرکت ذرّه در پتانسیلِ مرکزی:

مسئلهٔ حرکتِ ذرّه در پتانسیلِ مرکزی $V(r)$ یکی از مسائلِ قابلِ توجّه در فیزیک است؛ چراکه به یاری این نظریهٔ عمومی می‌توان مطالبِ مربوط به بیناب مولکول‌های دو اتمی، نظریهٔ اتم‌های شبه هیدروژن، نظریهٔ غیرنسبیّتی دوترون و ... را بررسی کرد. نکتهٔ مهمّ این است که بخشِ زاویه‌ای تابعِ موج، چنان‌که در زیر می‌بینیم، به شکلِ پتانسیل بستگی ندارد. بدین ترتیب این بخش در تمامِ مسائلِ مربوط به پتانسیل‌های مرکزی یکی است.

**معادلهٔ شرودینگر** – معادلهٔ شرودینگر برای ذرّه‌ای به جرمِ $\mu$ که در پتانسیلِ مرکزی $V(r)$ قرار دارد به‌صورتِ زیر است:

$$\left[\nabla^2 + k^2(r)\right]\psi(\vec{r}) = 0 \qquad (۱۳)$$

که در آن،

$$k^2(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - V(\vec{r})\right] \qquad (۱۴)$$

به دلیلِ شکلِ خاصّ $V(r)$ و وابستگی آن فقط به $r$، بهتر است محاسباتِ خود را در دستگاه مختصّاتِ کروی انجام دهیم. این کار را با نوشتنِ معادلاتِ تبدیل بین مختصّاتِ دکارتی $(x,y,z)$ یک نقطه و مختصّاتِ کروی $(r,\theta,\varphi)$ آن با روابط زیر انجام می‌دهیم:

$$x = r\,Sin\theta\,Cos\varphi$$
$$y = r\,Sin\theta\,Sin\varphi$$
$$z = r\;Cos\theta$$

و عاملِ لاپلاسین در مختصّاتِ کروی چنین است:

$$\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2}\nabla_{\theta,\varphi}^2$$

که در آن

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

$$\nabla_{\theta,\varphi}^2 = \frac{1}{Sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{Sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = \nabla_\theta^2 + \frac{1}{Sin^2\theta}\nabla_\varphi^2$$

بنابراین معادلهٔ شرودینگر به‌صورتِ زیر در می‌آید:

$$\left[\nabla_r^2+\frac{1}{r^2}\nabla_{\theta,\varphi}^2+k^2(r)\right]\psi(r,\theta,\varphi)=0$$

**۲-۷. روش جداسازی متغیّرها:**

پاسخی به صورتِ زیر در نظر می‌گیریم:

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)=R(r)\,\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

با بردنِ این پاسخ در معادلهٔ شرودینگر نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{r^2\nabla_r^2R(r)}{R(r)}+r^2k^2(r)=-\frac{\nabla_{\theta,\varphi}^2\mathrm{Y}(\theta,\varphi)}{\mathrm{Y}(\theta,\varphi)}$$

برابری دو تابع که یکی به $r$ بستگی دارد و دیگری از آن مستقل است و وابسته به زاویه، در صورتی امکان‌پذیر است که توابعِ مذکور هر کدام برابر با مقدارِ ثابتِ $\lambda$ باشند.

$$\left[\nabla_r^2+\left(k^2(r)-\frac{\lambda}{r^2}\right)\right]R(r)=0 \qquad \text{بخشِ شعاعی}$$

$$\left(\nabla_{\theta,\varphi}^2+\lambda\right)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)=0 \qquad \text{بخشِ زاویه‌ای}$$

مشاهده می‌شود که بخشِ زاویه‌ای معادلهٔ شرودینگر به شکلِ خاصّ پتانسیل بستگی ندارد و همان‌گونه که قبلاً گفتیم پاسخِ این بخش برای هر نوع پتانسیلِ مرکزی پذیرفتنی است. توجّه داشته باشید اساساً روشِ جداسازی متغیّرها تنها هنگامی مؤثّر است که پتانسیل به‌صورتِ *V(r)* نوشته شود؛ یعنی پتانسیلِ مرکزی باشد.

اکنون تابعِ $\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$ را به شکلِ متغیّرهای جدا شده می‌نویسیم:

$$\mathrm{Y}(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

در نتیجه بخشِ زاویه‌ای به‌صورتِ دو معادلهٔ از هم جدا می‌شود:

$$\left[\nabla_\theta^2+\left(\lambda-\frac{m^2}{Sin^2\theta}\right)\right]\Theta(\theta)=0 \quad ; \quad \nabla_\theta^2=\frac{1}{Sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$(\nabla_\varphi^2+m^2)\Phi(\varphi)=0 \quad ; \quad \nabla_\varphi^2=\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

که در آن $m^2$ عددِ مثبتی است که مانند $\lambda$ انتخاب شده است، و انتخابِ $m^2$ صرفاً به جهت راحتی کار با معادلهٔ دوّم است.

**تمرین**– تمامِ معادلات بالا را به‌دست آورید.

بدین ترتیب معادلهٔ سه متغیّری شرودینگر به سه معادلهٔ یک متغیّری تبدیل می‌شود. برای عملِ بهنجارشِ تابعِ موج شرایط زیر را می‌نویسیم:

$$\int_0^\infty R^*(r)R(r)\,r^2dr=1$$

$$\int_0^\pi \Theta^*(\theta)\Theta(\theta)\,Sin\theta\,d\theta=1 \qquad ; \qquad \int_0^\pi \Phi^*(\varphi)\Phi(\varphi)\,d\varphi=1$$

این سه تابع $R$، $\Theta$ و $\Phi$ را به‌طورِ جداگانه بهنجار می‌کنیم، بدین ترتیب تابعِ موج که حاصل‌ضربِ این سه تابع است بهنجار خواهد بود. معادلهٔ $\Phi$ به راحتی حل می‌شود:

$$\Phi(\varphi)=ce^{im\varphi}$$

شرطِ بهنجارش مقدارِ ثابتِ $c$ را برابرِ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ می‌دهد و پارامترِ $m$ نیز باید از شرطِ زیر به‌دست آید:

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$$

این شرط بستگی به تعبیرِ بورن را نشان می‌دهد، یعنی چون $\psi^*\psi$ احتمالی حضورِ ذرّه را نشان می‌دهد پس در یک نقطهٔ معیّن باید احتمال یکی باشد و دو نقطهٔ $\varphi$ و $\varphi+2\pi$ نیز در واقع یک نقطه هستند، بنابراین شرط فوق باید برقرار باشد. در نتیجه،

$$e^{im2\pi}=1 \quad \Rightarrow \quad m=0,\pm1,\pm2,...$$

$$Cos\,2\pi m+iSin2\pi m=1 \quad \Rightarrow \quad Sin2\pi m=0=Sink\pi \quad \Rightarrow \quad m=\frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m=\begin{cases} k \text{ زوج} \Rightarrow m= \text{عددِ صحیح} \\ k \text{ فرد} \Rightarrow m= \text{عددِ نیمه‌صحیح} \end{cases}$$

البتّه این نحوهٔ استدلال کاملاً درست نیست و حالتِ درست وقتی است که اندازه‌حرکتِ زاویه‌ای را بحث کنیم و از آن‌جا طیفِ نردبانی آن را بسازیم که مقادیرِ $m$ معادلِ درست یا نیمه درست حاصل می‌شود. همچنین در واقع باید نوشت: عددِ صحیح $m=c+$، که $c$ عدد ثابتی است و ثابت می‌شود باید برابر ۱/۲ یا صفر باشد. بدین ترتیب

$$\Phi_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که توابعِ $\Phi_m$ راست هنجار هستند:

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{m'}^{m}(\varphi)\,\Phi_m(\varphi)\,d\varphi = \delta_{mm'}$$

برای تحقّقِ این ویژگی یا باید $m'$ و $m$ هر دو عددِ درست باشند، یا تفاضلشان. و در بالا نیز دیدیم که $m$ یا باید درست باشد و یا نیمه درست.

اکنون به حلِّ معادلهٔ $\Theta$ می‌پردازیم:

$$\left[\nabla_\theta^2 + \left(\lambda - \frac{m^2}{Sin^2\theta}\right)\right]\Theta(\theta) = 0$$

تغییرِ متغیّرِ $x = Cos\theta$ را به‌کار می‌بریم. معادلهٔ به‌صورتِ زیر در می‌آید:

$$\left[\left[(1-x^2)\Theta'(\theta)\right]' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\right]\Theta(\theta) = 0$$

اکنون رابطهٔ بالارا به‌دست می‌آوریم:

$$\left[\nabla_\theta^2 + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\right]\Theta(\theta) = 0$$

$$x = Cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -Sin\theta\frac{d}{dx}$$

$$\nabla_\theta^2 = \frac{1}{Sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta(\theta)\right) = \frac{d}{dx}\left[Sin^2\theta\frac{d}{dx}\right]\Theta(\theta) = \left[(1-x^2)\Theta'(\theta)\right]'$$

$$= -\frac{d}{dx}\left[Sin\theta(-Sin\theta)\frac{d}{dx}\right]\Theta(\theta)$$

$$= -2x\frac{d}{dx}\Theta(\theta) + (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\Theta(\theta)$$

و بلافاصله معادلهٔ مورد نظر حاصل می‌شود.

پاسخی به‌صورتِ $\Theta = (1-x^2)^{\frac{s}{2}}u(x)$ در نظر می‌گیریم. علّت این است که به ازای $m=\ell$ یک پاسخِ خاصّ به شکلِ $\Theta = (1-x^2)^{\frac{\ell}{2}} = Sin^\ell\theta$ می‌توان یافت، و چنانچه این پاسخ را در معادلهٔ بالا بگذاریم، برای تحقّقِ این امر باید شرطِ $\lambda = \ell(\ell+1)$ برقرار شود. این نکته را بعداً بررسی می‌کنیم (مسألهٔ ۱۰- فصلِ ۱۰، کتابِ گاسیورویچ). فعلاً تغییرِ شکلِ معادله را در جایگذاری پاسخِ خاصّ داده شده بررسی می‌کنیم.

$$\Theta = Sin^{s}\theta\, u(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}} u(x)$$

$$\Theta' = \left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}} u'(x) - xs\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}-1} u(x)$$

$$\Theta'' = \left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}} u''(x) - xs\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}-1} u'(x) - s\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}-1} u(x)$$

$$+2x^2 s\left(\frac{s}{2}-1\right)^{\frac{s}{2}-1}\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}-2} u(x) - xs\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}-1} u'(x)$$

$$\Rightarrow \quad -2x\left[\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}} u'(x) - xs\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}-1} u(x)\right] + \left(1-x^2\right)\left[\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}} u''(x) - xs\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}-1} u'(x)\right.$$

$$\left. -s\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}-1} u(x) + 2x^2 s\left(\frac{s}{2}-1\right)\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}-1} u(x) - xs\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}-1} u'(x)\right]$$

$$+\left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}} u(x) = 0$$

با تقسیمِ طرفینِ رابطه بر $\left(1-x^2\right)^{\frac{s}{2}}$،

$$\Rightarrow \quad -2xu'(x) + \frac{2x^2 s}{1-x^2} u(x) + \left(1-x^2\right) u''(x) - xsu'(x) + su(x)$$

$$+\frac{2x^2 s}{1-x^2}\left(\frac{s}{2}-1\right) u(x) - xsu'(x) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right) u(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(1-x^2\right) u''(x) - 2x(s+1)u'(x) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} + \frac{2x^2 s}{1-x^2}\left(\frac{s}{2}-1\right)\right) u(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(1-x^2\right) u''(x) - 2x(s+1)u'(x) + \left(\lambda - s + \frac{2x^2 s}{1-x^2} + \frac{x^2 s^2 - 2x^2 s}{1-x^2} - \frac{m^2}{1-x^2}\right) u(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(1-x^2\right) u''(x) - 2x(s+1)u'(x) + \left(\lambda - s + \frac{x^2 s}{1-x^2} - \frac{m^2}{1-x^2}\right) u(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(1-x^2\right) u''(x) - 2x(s+1)u'(x) + \left(\lambda - s + \frac{x^2 s^2 - s^2 + s^2}{1-x^2} - \frac{m^2}{1-x^2}\right) u(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2)u'' - 2x(s+1)u' + (\lambda - s - s^2 + \frac{s^2 - m^2}{1-x^2})u = 0$$

برای این‌که ضریبِ $u$ در هر نقطه‌ای معیّن باشد و بی‌نهایت نشود (اکنون در $x=\pm 1$ و $\theta = 0, \pi$ بی‌نهایت می‌شود) پارامتر $s$ را برابر $s=\pm m$ انتخاب می‌کنیم و چون پاسخِ اصلی تنها به $m^2$ بستگی دارد می‌توان رابطهٔ زیر را در نظر گرفت:[1]

$s = m \geq 0$

بدین ترتیب با در نظر گرفتنِ شرطِ $s = m \geq 0$، خواهیم داشت:

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + (\lambda - m(m+1))u = 0$$

چون این معادلهٔ دیفرانسیل در نقطهٔ $x=0$ ویژگی ندارد، پس روشِ سری مک‌لورن در حلّ آن معتبر است:

$$u = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha x^\alpha \qquad \Rightarrow \qquad u' = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha \alpha\, x^{\alpha-1} \quad \Rightarrow \quad u'' = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha \alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{\alpha=0}^{\infty} \alpha(\alpha-1)\, a_\alpha x^{\alpha-2} - \sum_{\alpha=0}^{\infty} \alpha(\alpha-1)\, a_\alpha x^\alpha - 2m \sum_{\alpha=0}^{\infty} \alpha\, a_\alpha x^\alpha - 2\sum_{\alpha=0}^{\infty} \alpha\, a_\alpha\, x^\alpha$$

$$+ [\lambda - m(m+1)] \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha\, x^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{\alpha=0}^{\infty} \{(\alpha+2)(\alpha+1)\, a_{\alpha+2} - \alpha(\alpha-1)\, a_\alpha - 2m\alpha\, a_\alpha - 2\alpha\, a_\alpha + [\lambda - m(m+1)] a_\alpha\} x^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha+2)(\alpha+1) a_{\alpha+2} + [\lambda - m(m+1) - \alpha(\alpha-1) - 2m\alpha - 2\alpha] a_\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{\alpha+2} = \frac{\lambda - (m+\alpha)(\alpha+m+1)}{(\alpha+2)(\alpha+1)}\, a_\alpha$$

---

[1]- نکته- "توضیح این‌که اگر $s=-m$ باشد، چون $m \geq 0$ است، با انتخابِ $\ell = -s-1 = -m-1$، مسأله فرقی نمی‌کند زیرا

$$s^2 + s = (-\ell-1)^2 - (-\ell-1) = (\ell+1)(\ell+2)$$

و باز با انتخابِ $k = \ell + 1$ خواهیم داشت:

$$s^2 + s = k(k+1) = k^2 + k = (\ell+1)^2 + (\ell+1) = (\ell+1)(\ell+2)$$

و تفاوتی در صورتِ معادله ایجاد نمی‌شود."

در بحثِ $u$، می‌دانیم $-1 \le x = Cos\theta \le 1$ است پس $x \to \infty$ نمی‌رود. همچنین شرطِ لازم برای همگرایی این است که جملات نزولی باشند و در این‌جا نیز چنین است. امّا این شرطِ کافی برای همگرایی نیست. پس برای اطمینان از همگرایی سری، $u$ باید چند جمله‌ای باشد. بدین ترتیب در این رابطه که ارتباط میان ضرایبِ سری را نشان می‌دهد، مشاهده می‌شود که تابع $u$ یا زوج و یا فرد خواهد بود. می‌خواهیم سری پاسخ، به ازای مقدارِ بیشینهٔ معیّنی از $\alpha$ مثلاً تا درجهٔ $A$ متوقّف شود تا چند جمله‌ای درجهٔ $A$ به‌دست آید. همان‌طور که گفته

شد علّتِ این کار محدودیتِ فیزیکی روی $\psi = R\Theta\Phi$ است و تابعِ $u$ نیز بخشی از $\psi$ است و شرطِ فیزیکی $\lim\limits_{x\to\infty}\psi = 0$ باید رعایت شود، و نیز استدلالِ فوق که بیان شد. پس

$$\alpha_{A+2} = 0 \qquad ; \qquad \alpha_A = 0$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\lambda - (A+m)(A+m+1) = 0 \qquad ; \qquad A = 0,1,2,\ldots$$

جملهٔ $A+m$ را برابرِ $\ell$ می‌گیریم. آنگاه

$$\ell = A + m \qquad ; \qquad \ell = 0,1,2,\ldots$$

یعنی $\ell$ بزرگتر یا مساوی $m$ است: $\ell \ge m$. بنابر رابطهٔ فوق خواهیم داشت:

$$\lambda = \ell(\ell+1)$$

و معادلهٔ $u$ چنین می‌شود:

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + \left[\ell(\ell+1) - m(m+1)\right]u = 0$$

یا

$$u = a_{\ell-m}x^{\ell-m} + a_{\ell-m-2}x^{\ell-m-2} + \ldots + \begin{cases} a_0 \\ \\ a_1 x \end{cases}$$

برای این‌که پاسخ را به شکلِ بهتری بنویسیم (به‌صورتِ چند جمله‌ای‌های شناخته شده درآوریم)، تابعِ $v = \left(1-x^2\right)^l$ را تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که:

$$v = (x^2-1)^\ell \;\Rightarrow\; v' = \ell(-2x)(1-x^2)^{\ell-1} \;\Rightarrow\; (1-x^2)v' + 2x\ell v = 0$$

با این انتخاب در واقع تأکید بر این است که $\ell \geq 0$ است. با $(\ell+m+1)$ بار مشتق‌گیری از معادلهٔ بالا و به کمکِ رابطهٔ لایب نیتز[۲] و با قرار دادنِ

$$v^{(\ell+m)} = \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(1-x^2)^{\ell} = u_1$$

معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$(1-x^2)u_1'' - 2x(m+1)u_1' + \left[\ell(\ell+1) - m(m+1)\right]u_1 = 0$$

**نکته**- در موردِ استخراج رابطهٔ فوق به ترتیبِ زیر عمل می‌کنیم: رابطهٔ لایب نیتز دربارهٔ مشتق‌گیری چنین است:

$$y = uv \;\Rightarrow\; y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)} + \ldots + uv^{(n)}$$

پس با $(\ell+m+1)$ بار مشتق‌گیری به کمکِ دستورِ فوق داریم:

$$(1-x^2)v' + 2x\ell v = 0$$

$$\left[(1-x^2)v\right]^{(\ell+m+1)} + 2\ell(vx)^{(\ell+m+1)} = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)v^{(\ell+m+2)} - 2x(\ell+m+1)v^{(\ell+m+1)} - (\ell+m+1)(\ell+m)v^{(\ell+m)}$$
$$+ 2\ell x v^{(\ell+m+1)} + 2\ell(\ell+m+1)v^{(\ell+m)} = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)v^{(\ell+m+2)} - 2(m+1)xv^{(\ell+m+1)} + (\ell+m+1)(\ell-m)v^{(\ell+m)} = 0$$

با قرار دادنِ $u_1 = v^{(l+m)} = \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left(1-x^2\right)^{l}$، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_1' = v^{(\ell+m+1)} \\ u_1'' = v^{(\ell+m+2)} \end{cases} \Rightarrow (1-x^2)u_1'' - 2x(m+1)u_1' + (\ell+m+1)(\ell-m)u_1 = 0$$

مشاهده می‌شود که این معادله درست مانندِ معادلهٔ $u$ است، یعنی $u_1$ و $u$ هر دو در معادلهٔ دیفرانسیلِ یکسانی صدق می‌کنند، پس با هم متناسبند.

$$u = \text{عدد ثابت} \times u_1$$

[۲]- Leibnitz

و چون ضریبِ بهنجارش را هنوز برای تابع $\Theta$ معین نکرده‌ایم عددِ ثابتِ بالا را برابرِ $\frac{1}{2^{\ell}\,\ell!}$ می‌گیریم تا حداقل پاسخِ موردِ نظر برای $m=0$ چند جمله‌ای شناخته شده‌ای درآید (چند جمله‌ای لژاندر[۳]).

## فرمولِ رودریگز[۴]:

$$\text{چند جمله‌ای لژاندرِ درجهٔ } \ell = \frac{1}{2^{\ell}\,\ell!}\frac{d^{\ell}(x^2-1)^{\ell}}{dx^{\ell}} \qquad (۱۵)$$

و تابعِ $u$ نیز در رابطه با $u_1$ چنین می‌شود:

$$u = \text{عددِ ثابت} \times u_1 = \frac{1}{2^{\ell}\,\ell!}v^{(\ell+m)} = \frac{1}{2^{\ell}\,\ell!}\frac{d^{(\ell+m)}}{dx^{(\ell+m)}}(x^2-1)^{\ell}$$

و بالاخره تابعِ $\Theta$ چنین می‌شود:

$$\Theta_{\ell}^{m} = (1-x^2)^{\frac{s}{2}}u = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}u = c_{\ell}^{m}\,p_{\ell}^{m}(x)$$

در این‌جا $p_{\ell}^{m}(x)$ چند جمله‌ای وابستهٔ لژاندر[۵] است که به‌صورتِ زیر تعریف می‌شود:

$$p_l^m(x) = (-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left(\frac{x^2-1}{2^l\,l!}\right)^l$$

و حدودِ تغییراتِ $m$ به‌صورتِ زیر است:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \ell$$

شرطِ بهنجارش اندازهٔ ثابتِ $c_{\ell}^{m}$ را به‌دست می‌دهد:

$$c_{\ell}^{m} = \left[\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین

---

[۳]- Legendre

[٤]- Rodrigues formula

[٥]- Associated Legendre polynomial

$$\Theta_{\ell}^{m}=\left[\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}p_{\ell}^{m}(x)$$

اکنون می‌توانیم به یاری روابطِ بالا تابعِ $\Upsilon(\theta,\varphi)$ را که قبلاً تعریف کردیم و به هارمونیک‌های کروی معروف است[۶] چنین بنویسیم (چون این تابع در مختصّاتِ کروی و روی کره تعریف می شود. ثانیاً پاسخِ بخشِ زاویه ای معادلهٔ لاپلاس است، و پاسخ های معادلهٔ لاپلاس عموماً به توابعِ هارمونیک معروف هستند، از این رو نامِ هارمونیک های کروی متداول است):

$$Y_{l}^{m}\left(\theta,\varphi\right)=\Theta_{l}^{m}\Phi_{m}=\left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{\left(l-m\right)!}{\left(l+m\right)!}\right]^{\frac{1}{2}}p_{l}^{m}\left(Cos\theta\right)e^{im\varphi}$$

رابطهٔ راست هنجارش برای $\Upsilon_{\ell}^{m}$ به شکلِ زیر است:

$$\int\Upsilon_{\ell'}^{m'^{*}}\Upsilon_{\ell}^{m}d\Omega=\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

بخشِ شعاعی معادلهٔ شرودینگر را هنگامی می‌توان حلّ کرد که شکلِ تابع $V(r)$ معلوم باشد.

## ۸ - چند مسئلهٔ حل شده:

**۱ –** نشان دهید که رابطه زیر برقرار است:

$$\int_{-1}^{+1}x^{n}P_{n}\left(x\right)dx=\frac{2^{n+1}\left(n!\right)^{2}}{\left(2n+1\right)!}$$

**حل ـ** از فرمول رودریگرز کمک می گیریم.

$$P_{n}\left(x\right)=\frac{1}{2^{n}n!}\frac{d^{n}}{dx^{n}}\left(x^{2}-1\right)^{n}$$

به راحتی می توان نشان داد (مثلاً از طریق استقراء) که تساوی زیر برقرار است:

$$\int_{-1}^{+1}\left(1-x^{2}\right)^{n}dx=2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

آنگاه

۶- Spherical Harmonics

$$I=\int_{-1}^{+1} x^n P_n(x)\,dx=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{+1} x^n \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n dx$$
$$=\frac{1}{2^n n!}\left\{\left[x^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n\right]_{-1}^{+1}-n\int_{-1}^{+1} x^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n dx\right\}$$

با $n$ بار انتگرال گیری جزء به جزء و با توجّه به اینکه همواره جزء اوّل انتگرالِ گرفته شده صفر می شود، خواهیم داشت:

$$I=\frac{(-1)^n}{2^n n!}n!\int_{-1}^{+1}\left(x^2-1\right)^n dx=\frac{1}{2^n}\int_{-1}^{+1}\left(1-x^2\right)^n dx$$
$$=\frac{1}{2^n}\times 2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{2}{2^n}\frac{\left(2^n n!\right)}{(2n+1)!/2^n n!}=\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

**۲** – نشان دهید که چند جمله ای های لژاندر یک مجموعۀ کاملِ اورتوگونال از توابع در فاصلۀ $-1\le x\le 1$ تشکیل می دهند. همچنین مقدارِ نرمالیزه (بهنجار) چند جمله ای های مذکور را به دست آورید.

**حل** – برای اثباتِ خاصیّت تعامد چند جمله ای های لژاندر چنین عمل می کنیم: معادلۀ دیفرانسیلِ اصلی لژاندر را در $P_{l'}(x)$ ضرب کرده و در فاصلۀ موردِ نظر انتگرال می گیریم:

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}(x)\left\{\left[\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^n\frac{dP_l}{dx}\right]+l(l+1)P_l(x)\right\}dx=0$$

انتگرال جزء به جزء می گیریم:

$$\int_{-1}^{1}\left[\left(x^2-1\right)\frac{dP_l}{dx}\frac{dP_l}{dx}+l(l+1)P_l(x)P_{l'}(x)\right]dx=0$$

اکنون رابطۀ بالا را یک بارِ دیگر می نویسیم و فقط جای $l$ و $l'$ را با هم عوض می کنیم. سپس دو رابطه را از هم کم می کنیم. نتیجه چنین می شود:

$$\left[l(l+1)-l'(l'+1)\right]\int_{-1}^{1}P_l(x)P_{l'}(x)dx=0$$

چنانچه $l\neq l'$ باشد، عبارتی انتگرال صفر می شود و این خود رابطهٔ تعامد بین چند جمله ای های لژاندر را نشان می دهد. برای حالتِ $l=l'$، عبارتی انتگرال مقداری معیّن می شود یعنی لزومی ندارد صفر گردد. در یک روش برای یافتنِ مقدارِ آن از فرمولِ رودریگرز استفاده می کنیم:

$$N_l=\int_{-1}^{1}\left[P_l(x)\right]^2dx=\frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l dx$$

با $l$ بار انتگرال گیری جزء به جزء نتیجه چنین می شود:

$$N_l=\frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^l\frac{d^{2l}}{dx^{2l}}\left(x^2-1\right)^l dx$$

اکنون $2l$ بار از عبارتِ $\left(x^2-1\right)^l$ مشتق می گیریم. نتیجه $(2l)!$ می شود (دلیلِ آن را بیان کنید)! بنابراین

$$N_l=\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^l dx$$

از طرفی داریم

$$\left(1-x^2\right)^l=\left(1-x^2\right)\left(1-x^2\right)^{l-1}=\left(1-x^2\right)^{l-1}+\frac{x}{2l}\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^l$$

بنابراین

$$N_l=\left(\frac{2l-1}{2l}\right)N_{l-1}+\frac{(2l-1)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}xd\left[\left(1-x^2\right)^l\right]$$

$$=\left(\frac{2l-1}{2l}\right)N_{l-1}-\frac{1}{2l}N_l\Rightarrow(2l+1)N_l=(2l-1)N_{l-1}$$

بدین ترتیب می توان از رابطهٔ بازگشتی بالا نشان داد که

$$N_l=\int_{-1}^{1}\left[P_l(x)\right]^2dx=\frac{2}{2l+1}$$

در نتیجه،

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

و در نهایت شکلِ نرمالیزه (بهنجار) چند جمله ای های لژاندر را می توان به صورتِ زیر نمایش داد.

$$u_l(x) = \sqrt{\frac{2}{2l+1}} P_l(x)$$

در محاسبهٔ فرمولِ بالا می توان از تابعِ مولّد استفاده کرد. این شیوه را به عنوان تمرین به کار برید. جهتِ راهنمایی به کتاب آرفکن، بخشِ ۱۲ – ۳، مراجعه کنید.

**۳-** تابعِ موجِ حالتِ یک الکترون به‌صورتِ زیر داده شده است:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(e^{i\varphi} Sin\theta + Cos\theta\right) g(r)$$

که در آن

$$\int_{\circ}^{\infty} |g(r)|^2 r^2 dr = 1$$

و $\theta$ و $\varphi$ به ترتیب زوایای سمتی و قطبی هستند.

الف) نتایجِ ممکنِ اندازه‌گیری روی $L_z$ الکترون در این حالت چیست؟

ب) احتمالِ یافتنِ هر یک از نتایجِ ممکن در قسمتِ (الف) چیست؟

پ) مقدارِ چشمداشتی $L_z$ چقدر است؟

راهنمایی- از روابطِ زیر کمک بگیرید.

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} Cos\theta$$

$$Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} Sin\theta \quad e^{\pm i\varphi}$$

**حلّ- الف)** از راهنمایی مسأله کمک می‌گیریم:

$$Cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10} \qquad \Rightarrow \qquad Sin\theta\, e^{\pm i\varphi} = \mp\sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{1\pm1}$$

$$\Rightarrow \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(-\sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{1+1} + \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}\right) g(r) = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} Y_{1+1} + \sqrt{\frac{1}{3}} Y_{10}\right) g(r)$$

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که مقادیرِ ممکنِ $L_Z$ عبارتست از $\hbar\,,0$.

**ب)** نخست کنترل می‌کنیم که آیا $\psi$ به‌صورتِ داده شده بهنجار هست یا نه :

$$\int|\psi|^2 d^3r \int_0^\infty |g(r)|^2 r^2 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \left(e^{-i\varphi}\sin\theta+\cos\theta\right)\left(e^{i\varphi}\sin\theta+\cos\theta\right)\sin\theta d\varphi$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta d\varphi\left(1+2\sin 2\theta\cos\varphi\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta\left\{\left[\frac{1}{2\sin 2\theta}\sin\varphi\right]_0^{2\pi}+\varphi\Big|_0^{2\pi}\right\}=\frac{1}{2}\int_0^\pi\sin\theta d\theta=\frac{1}{2}\left(-\cos\theta\right)_0^\pi=1$$

بدین ترتیب برای محاسبهٔ چگالی احتمال کافی است که از رابطهٔ $P=|\psi|^2$ استفاده کنیم. از این‌رو احتمالِ $L_z=+\hbar$ عبارتست از $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$ یا $\frac{2}{3}$؛ و احتمالِ $L_z=0$، عبارتست از $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$ یا $\frac{1}{3}$، به‌طوری‌که جمعِ احتمال‌ها برابر واحد می‌شود.

**پ)**

$$\langle L_z\rangle=\int\psi^* L_z\psi r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi=\int\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}Y_{11}+\sqrt{\frac{1}{3}}Y_{10}\right]^*$$

$$L_z\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}Y_{11}+\sqrt{\frac{1}{3}}Y_{10}\right]\times|g(r)|^2 r^2 dr Sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$=\frac{2}{3}\hbar\int_\circ^\pi Sin\theta\, d\theta\int_\circ^{2\pi} Y^*_{11}\, Y_{11} d\varphi=\frac{2}{3}\hbar$$

## <u>چند مسئله برای حل :</u>

**۱-** الف) به کمکِ عملگرهای $L_\pm$، رابطه‌ای برای عملگرِ $L^2$ برحسبِ $L_z$ و $L_\pm$ بنویسید.

ب) نشان دهید که رابطهٔ جابجایی زیر برقرار است:

$$[L_\pm, L_z]=\mp\hbar L_\pm$$

آنگاه $L_z L_+$ را بر $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ (هارمونیک‌های کروی) اثر دهید و با استفاده از رابطهٔ قبل نشان دهید که این عملگرها واقعاً عملگرهای نردبانی هستند؛ یعنی

$$L_\pm Y_{lm}(\theta,\varphi)=C_\pm Y_{lm\pm 1}(\theta,\varphi)$$

پ) با فرضِ بهنجارشِ توزیع ویژه توابعِ $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ ، ضریبِ $C_+$ را به‌دست آورید.
ت) از خواصِّ فضای هیلبرت استفاده کنید و نشان دهید که همواره $-\ell \le m \le \ell$ برقرار است.
$\ell$ و $m$ به ترتیب اعدادِ کوانتومی مداری و مغناطیسی اندازه‌حرکتِ زاویه‌ای هستند.

**۲ ـ** نشان دهید که فرمولِ رودریگرز پاسخِ معادلهٔ لژاندر است.

**۳ -** تابعِ $\delta(x)$ دیراک را برحسبِ چند جمله ای های لژاندر در بازهٔ $(-1,1)$ بسط دهید.

۴ - به کمکِ تعریفِ چندجمله ای وابستهٔ لژاندر $P_l^m(\mathrm{Cos}\,\theta)$ نشان دهید که

$$P_l^l(\mathrm{Cos}\,\theta)=(2l-1)!!\mathrm{Sin}^l\,\theta$$