درس ریاضی فیزیک ۳

فصلِ دوّم: توابع بِسِل

تابعِ بسل در گسترهٔ وسیعی از مسائلِ ریاضی فیزیک به کار می رود. مثلاً در بخشِ شعاعی معادلهٔ شرودینگر برای ذرّهٔ آزاد با تغییرِ متغیّر و تابع مناسب به توابع بسل می رسیم. در حلِّ معادلهٔ هلمهولتز در مختصّاتِ استوانه ای یا کروی معادلهٔ بسل ظاهر می شود . در بررسی پراشِ فرانهوفر از روزنهٔ دایره ای، انتشارِ امواج الکترومغناطیس در کابلِ تشدیدِ استوانه ای و در امواج صوتی از پوسته های نازک دایره ای با توابعِ بسل مواجه می شویم.

حلِّ معادلهٔ بسل از طریق سری:

معادلهٔ بسل به صورتِ زیر است:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0$$

نقطهٔ $x=0$ ویژگی منظّم معادله است. از این رو از شیوهٔ سری فروبنیوس برای حلِّ معادله استفاده می کنیم:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{\rho+m}$$

$$\Rightarrow y' = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left(\rho+m\right) x^{\rho+m-1} \Rightarrow y'' = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left(\rho+m\right)\left(\rho+m-1\right) x^{\rho+m-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left(\rho+m\right)\left(\rho+m-1\right) x^{\rho+m} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left(\rho+m\right) x^{\rho+m}$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{\rho+m+2} - n^2 \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{\rho+m} \equiv 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^{\rho+m} \left[C_m \left(\rho+m\right)\left(\rho+m-1\right) + C_m \left(\rho+m\right) + C_{m-2} - n^2 C_m\right] = 0$$

$$C_m \left[\left(\rho+m\right)\left(\rho+m-1\right) + \left(\rho+m\right) - n^2\right] + C_{m-2} = 0$$

$$\rho=+n \Rightarrow y_1=\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{n+m}=C_0 x^n\left[1+\frac{C_2}{C_0} x^2+\frac{C_4}{C_0} x^4+\ldots\right]$$
$$\rho=-n \Rightarrow y_2=\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{n+m}=C_0 x^{-n}\left[1+\frac{C_2}{C_0} x^2+\frac{C_4}{C_0} x^4+\ldots\right]$$

وقتی $n=0$ است، دو پاسخ یکی می شوند. معادلۀ نشانه ای $\rho^2-n^2=0$ دارای دو پاسخ $\pm n$ است و چنانچه n عددِ صحیح باشد اختلافِ دو ریشۀ این معادله عددِ درست می شود. در نتیجه بنا بر قضیۀ فوکس فقط یک پاسخ از طریقِ سری به دست می آید، و پاسخِ دوّم از راه مشتق گیری پاسخِ اوّل دارای جمله ای لگاریتمی خواهد بود. به ازای n غیرِ صحیح دو پاسخ مستقل از طریقِ سری نتیجه می شود.

برای این که پاسخِ معادلۀ دیفرانسیل بسل به شکلِ چند جمله ای شناخته شده ای در آید، پاسخِ y_1 را در $\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$ ضرب می کنیم و آن را به $J_n(x)$ نشان می دهیم. پس

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left[1-\frac{x^2}{2^2(n+1)}+\frac{x^4}{2!2^4(n+1)(n+2)}-\ldots\right]$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$J_n(x)$ تابعِ نوعِ اوّل مرتبۀ n بسل نامیده می شود. این سری به ازای تمام مقادیرِ x همگرای مطلق است. اگر n عددِ صحیح نباشد، پاسخِ دوّم چنین می شود:

$$J_{-n}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

و پاسخِ عمومی ،

$$y=C_1J_n(x)+C_2J_{-n}(x)$$

$J_{\pm n}(x)$ را توابعِ بسل نوعِ اوّل مرتبۀ n می نامند. چنانچه n عددِ صحیح باشد فقط یک پاسخ به دست می آید چرا که در زیر نشان می دهیم $J_{-n}(x)=(-1)^n J_{+n}(x)$. امّا در این حالت معادلۀ نشانه ای که اختلاف ریشه هایش عددِ صحیح است جمله ای لگاریتمی خواهد داشت. معمولاً پاسخِ عمومی معادله را چنین می نویسند:

$$y=C_1J_n(x)+C_2N_n(x)$$

که در آن، $N_n\left(x\right)$ تابعِ بسل ـ وِبِر نوعِ دوّم مرتبهٔ n نامیده می شود.

$$N_n\left(x\right)=\lim_{\upsilon\to n}\left[\frac{J_\upsilon\left(x\right)\mathrm{Cos}\,\upsilon\pi-J_{-\upsilon}\left(x\right)}{\mathrm{Sin}\,\upsilon\pi}\right]$$

تمرین ـ برای n عددِ صحیح نشان دهید که رابطهٔ زیر برقرار است:

$$J_{-n}\left(x\right)=\left(-1\right)^n J_{+n}\left(x\right)$$

حل ـ

$$\Gamma\left(n\right)=\frac{\Gamma\left(n+1\right)}{n}\Rightarrow\Gamma\left(0\right)=\infty \quad \text{و} \quad \Gamma\left(-2\right)=+\infty$$

به طوری که $\frac{1}{\Gamma\left(n\prec 0,n\in N\right)}\to 0$. اکنون می نویسیم:

$$J_{-n}\left(x\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^r}{r!\Gamma\left(-n+r+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^r}{r!\Gamma\left(r-\left(n-1\right)\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

بدین ترتیب برای $r=0,1,2,\ldots,n-1$ ، داریم:

$$r=s+n\Rightarrow J_{-n}\left(x\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{s+n}}{\left(s+n\right)!\Gamma\left(s+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

$$=\left(-1\right)^n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^s}{\left(s\right)!\Gamma\left(n+s+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}=\left(-1\right)^n J_n\left(x\right)$$

تابعِ مولّدِ تابعِ بسل:

تابعِ مولّد یک تابعِ دو متغیّری است که از طریقِ بسط لورانِ آن معادلهٔ بسل را به دست می آوریم:

$$g\left(x\right)=e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^n J_n\left(x\right)=e^{\frac{x}{2}t}.e^{-\frac{x}{2t}}$$

$$=\left[1+\frac{xt}{2}+\frac{x^2t^2}{2^22!}+\ldots+\frac{x^nt^n}{2^nn!}+\ldots\right]\times\left[1-\frac{x}{2t}+\frac{x^2}{2^22!t^2}+\ldots+\frac{\left(-1\right)^n x^n}{2^nn!t^n}+\ldots\right]$$

$$\Rightarrow J_n(x)=\frac{x^n}{2^n n!}\left[1-\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2!(n+1)(n+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\dots\right]$$

پس از بسط ضریبِ t^n و در پی آن ضریبِ t^{-n} را می توا ن به دست آورد. در مرحلهٔ بعد از رابطهٔ مولّد نسبت به x مشتق می گیریم و ضریبِ t^n را در دو طرف مساوی هم قرار می دهیم:

$$g(x)=e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n(x)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n'(x)$$

$$\Rightarrow\left(t-\frac{1}{t}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n(x)=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n'(x)$$

$$\Rightarrow 2J_n'(x)=J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x); \qquad (۱)$$

اکنون نسبت به t مشتق می گیریم و ضریبِ t^{n-1} را در دو سو برابر یکدیگر قرار می دهیم:

$$\frac{\partial g}{\partial t}=\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nt^{n-1}J_n(x)$$

$$\Rightarrow\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nt^{n-1}J_n(x)$$

$$\frac{x}{2}J_{n-1}(x)+\frac{x}{2}J_{n+1}(x)=nJ_n(x)$$

$$\Rightarrow\frac{2n}{x}J_n(x)=J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x); \qquad (۲)$$

$$\begin{cases}2J_n'(x)=J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)\\ \dfrac{2n}{x}J_n(x)=J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)\end{cases}$$

دو رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می کنیم.

$$\Rightarrow\frac{2n}{x}J_n(x)+2J_n'(x)=2J_{n-1}(x)$$

$$\Rightarrow xJ_n'(x)=xJ_{n-1}(x)-nJ_n(x); \qquad (۳)$$

چنانچه دو رابطه را از هم کم کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{2n}{x}J_n(x)-2J_n'(x)=2J_{n+1}(x)$$
$$\Rightarrow xJ_n'(x)=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)\,; \qquad (٤)$$

رابطهٔ (٣) را در x^{n-1} و رابطهٔ (٤) را در x^{-n-1} ضرب می کنیم:

$$x^nJ_n'(x)=x^nJ_{n-1}(x)-nx^{n-1}J_n(x)\Rightarrow\frac{d}{dx}\left[x^nJ_n(x)\right]=x^nJ_{n-1}(x)$$
$$x^{-n}J_n'(x)=nx^{-n-1}J_n(x)-x^{-n}J_{n+1}(x)\Rightarrow\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

اکنون فرض می کنیم $y=J_n(x)$ باشد. معادلهٔ دیفرانسیلِ بسل چنین می شود:

$$x^2J_n''(x)+xJ_n{}'(x)+\left(x^2-n^2\right)J_n(x)=0$$

از روابط بازگشتی در بالا کمک می گیریم:

$$xJ_n'(x)=xJ_{n-1}(x)-nJ_n(x)$$

نسبت به x مشتق می گیریم:

$$xJ_n''(x)+J_n'(x)=xJ_{n-1}'(x)+J_{n-1}(x)-nJ_n'(x)$$

به جای $xJ_{n-1}'(x)$ از رابطهٔ (۴) استفاده می کنیم:

$$xJ_n'(x)=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)\Rightarrow xJ_{n-1}'(x)=(n-1)J_{n-1}(x)-xJ_n(x)$$
$$\Rightarrow xJ_n''(x)+J_n'(x)=\left[(n-1)J_{n-1}(x)-xJ_n(x)\right]+J_{n-1}(x)-nJ_n'(x)$$

حالا معادلهٔ دیفرانسیل را می نویسیم و با اندکی جایگذاری و محاسبه به نتیجهٔ دلخواه دست می یابیم.

<u>نمایش انتگرالی تابع بسل برای n عددِ صحیح:</u>

$$g(x)=e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n(x)=J_0+J_1t+J_2t^2+\ldots+J_nt^n$$
$$+J_{-1}t^{-1}+J_{-2}t^{-2}+\ldots+J_{-n}t^{-n}+\ldots$$
$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_{+n}(x)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = J_0 + J_1\left(t-t^{-1}\right) + J_2\left(t^2+t^{-2}\right) + \ldots + J_n\left(t^n - t^{-n}\right) + \ldots$$

فرض می کنیم $t = e^{i\theta} = \mathrm{Cos}\,\theta + i\,\mathrm{Sin}\,\theta$ باشد. آنگاه

$$\Rightarrow \left(t-t^{-1}\right) = 2i\,\mathrm{Sin}\,\theta\,; \quad \left(t^2+t^{-2}\right) = 2\,\mathrm{Cos}\,\theta \ldots$$

$$e^{\frac{x}{2}\times 2i\,\mathrm{Sin}\,\theta} = e^{ix\,\mathrm{Sin}\,\theta} = \mathrm{Cos}\left(x\,\mathrm{Sin}\,\theta\right) + i\,\mathrm{Sin}\left(x\,\mathrm{Sin}\,\theta\right)$$

$$= J_0 + 2J_1\,\mathrm{Sin}\,\theta + 2J_2\,\mathrm{Cos}\,\theta + 2J_3\left(\mathrm{Sin}\,3\theta\right) + \ldots$$

$$\begin{cases} \mathrm{Cos}\left(x\,\mathrm{Sin}\,\theta\right) = J_0 + 2J_2\,\mathrm{Cos}\,\theta + \ldots + 2J_{2n}\,\mathrm{Cos}\,2n\theta = J_0\left(x\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}\left(x\right)\mathrm{Cos}\,2n\theta \\ \mathrm{Sin}\left(x\,\mathrm{Sin}\,\theta\right) = 2J_1\,\mathrm{Sin}\,\theta + 2J_3\,\mathrm{Sin}\,3\theta + \ldots + J_{2n+1}\,\mathrm{Sin}\left(2n+1\right)\theta + \ldots = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}\left(x\right)\mathrm{Sin}\left(2n-1\right)\theta \end{cases}$$

روابط زیر به راحتی به دست می آید:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}\left(x\,\mathrm{Sin}\,\theta\right)\mathrm{Cos}\,n\theta\,d\theta = \begin{cases} J_n\left(x\right); n = 2k \\ 0; n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Sin}\left(x\,\mathrm{Sin}\,\theta\right)\mathrm{Sin}\,n\theta\,d\theta = \begin{cases} J_n\left(x\right); n = 2k+1 \\ 0; n = 2k \end{cases}$$

بنابراین برای تمام مقادیر صحیح n خواهیم داشت:

$$J_n\left(x\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\mathrm{Cos}\left(x\,\mathrm{Sin}\,\theta\right)\mathrm{Cos}\,n\theta + \mathrm{Sin}\left(x\,\mathrm{Sin}\,\theta\right)\mathrm{Sin}\,n\theta\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{Cos}\left(x\,\mathrm{Sin}\,\theta - n\theta\right)d\theta; n = 0,1,2,\ldots$$

نتیجهٔ مهم ـ چنانچه $n = 0$ باشد، آنگاه

$$J_0\left(x\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{Cos}\left(x\,\mathrm{Sin}\,\theta\right)d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\mathrm{Cos}\left(x\,\mathrm{Sin}\,\theta\right)d\theta$$

اکنون فرض می کنیم $\mathrm{Sin}\,\theta = t$ باشد. در این صورت

$$J_0\left(x\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{Cos}\,xt}{\sqrt{1-t^2}}dt\,; \qquad (۵)$$

این رابطه در واقع تبدیلِ فوریهٔ تابعِ کسینوس است.

شکل انتگرالی دیگر تابعِ بسل (تابعِ هانکل):

فرض می کنیم،

$$I=\int_0^{\pi}\mathrm{Sin}^{2n}\theta\,\mathrm{Cos}\left(x\,\mathrm{Cos}\,\theta\right)d\theta=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{Sin}^{2n}\theta\,\mathrm{Cos}\left(x\,\mathrm{Cos}\,\theta\right)d\theta$$

بخشِ کسینوس عبارتِ زیرِ انتگرال را بسط می دهیم:

$$I=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{Sin}^{2n}\theta\left[1-\frac{x^2\,\mathrm{Cos}^2\theta}{2!}+\frac{x^4\,\mathrm{Cos}^4\theta}{4!}-\ldots\right]d\theta$$

از رابطهٔ زیر در مبحثِ تابع گاما کمک می گیریم:

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{Sin}^p\theta\,\mathrm{Cos}^q\theta\,d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+1}{2}\right)}$$

تمرین ـ این عبارت را ثابت کنید.

بدین ترتیب عبارتِ I به صورتِ زیر در می آید:

$$I=2\left[\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(n+1\right)}-\frac{x^2}{2!}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma\left(n+2\right)}+\frac{x^4}{4!}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{2\Gamma\left(n+3\right)}+\ldots\right]$$

$$=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n+1\right)}\left[1-\frac{x^2}{2^2\left(n+1\right)}+\frac{x^4}{2!2^4\left(n+1\right)\left(n+2\right)}-\ldots\right]$$

دو طرفِ رابطهٔ بالا را در عبارتِ $\dfrac{x^n}{2^n\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ ضرب می کنیم:

$$\frac{x^n\sqrt{\pi}}{2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}I=\frac{x^n}{2^2\Gamma(n+1)}\left[1-\frac{x^2}{2^2(n+1)}+\frac{x^4}{2!2^4(n+1)(n+2)}-\dots\right]$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\Gamma(n+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}\equiv J_n(x)$$

و بدین ترتیب نتیجهٔ نهایی حاصل می گردد:

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\mathrm{Sin}^{2n}\theta\,\mathrm{Cos}(x\,\mathrm{Cos}\,\theta)d\theta$$

اکنون اگر قرار دهیم $\mathrm{Cos}\,\theta=t$، آنگاه

$$I=2\int_0^1\left(1-t^2\right)^{n-1}\mathrm{Cos}\,xtdt$$

و در نتیجه

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1\left(1-t^2\right)^{n-1/2}\mathrm{Cos}\,xtdt$$

این رابطه به انتگرالِ هانکل برای نمایشِ $J_n(x)$ معروف است. توجّه داریم که رابطهٔ (۵) در بخشِ پیش به واقع از همین انتگرالِ هانکل نیز به دست می آید:

$$n=0\Rightarrow J_0(x)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)\mathrm{Cos}\,xtdt=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\mathrm{Cos}\,xt}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

شکل های دیگر توابع هانکل:

۱ – توابع هانکل:

$$H_n^{(1)}(x)=J_n(x)+iN_n(x)$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x)$$

توابعِ $H_n^{(1)}(x)$ و $H_n^{(2)}(x)$ را توابعِ مرتبهٔ n نوعِ سوّم یا توابعِ مرتبهٔ n هانکل می نامیم.
روابط بازگشتی در موردِ توابع نویمان و هانکل نیز صدق می کند.

۲ – توابع دگرگون شدهٔ بسل: تابعِ $I_n(x)$ با نمایشِ سری زیر، تابع دگرگون شده یا تغییرِ شکل یافته بسل نامیده می شود.

$$I_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left[1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4.(2n+2)(2n+4)} - \ldots\right]$$

می توان نشان داد که $I_n(x) = i^{-n} J_n(x)$ است و چنانچه معادله دیفرانسیل دگرگون یافته به شکلِ

$$x^2 y'' + xy' - \left(x^2 + n^2\right) y = 0$$

باشد، آنگاه در حالتِ کلّی پاسخِ معادله برای n غیرِ صحیح به صورتِ $y = AI_n + BI_{-n}$ خواهد بود.

چند تمرین حل شده:

۱ – با قرار دادنِ $x = u + iv$ از تابعِ مولّدِ توابع بسل، نشان دهید که

$$J_n(u+v) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u) J_{n-s}(v)$$

حل –

$$J(u+v,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(u+v)t^n = \ldots + J_{-2}(u+v)t^{-2} + J_{-1}(u+v)t^{-1} + J_0(u+v) + J_1(u+v)t + \ldots \quad \text{(I)}$$

$$J(u+v,t) = J(u,t)\,J(v,t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u)t^s \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(v)t^n \qquad \text{(II)}$$

$$(I),(II) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(u+v)t^n = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u)t^s \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(v)t^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u) J_n(v) t^{n+s}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(u+v) t^n - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u) J_n(v) t^{n+s}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \left[J_n(u+v) - \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u) J_{n-s}(v) \right] = 0$$

$$\Rightarrow J_n(u+v) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u) J_{n-s}(v)$$

$$n = 0 \Rightarrow$$

$$J_0(u+v) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u) J_{-s}(v) = J_0(u) J_0(v) + \sum_{s=-\infty}^{-1} J_s(u) J_{-s}(v) + \sum_{s=1}^{\infty} J_s(u) J_{-s}(v)$$

$$\sum_{s=-\infty}^{-1} J_s(u) J_{-s}(v) \to \sum_{s=1}^{\infty} J_{-s}(u) J_s(v) = \sum_{s=1}^{\infty} J_s(u) J_{-s}(v)$$

$$\Rightarrow J_0(u+v) = J_0(u) J_0(v) + 2\sum_{s=1}^{\infty} J_s(u) J_{-s}(v)$$

۲ – (الف) ـ رابطهٔ ژاکوبی ـ آنژه (Jacobi - Anger) را به دست آورید:

$$e^{ix\operatorname{Cos}\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x) e^{in\theta}$$

این رابطه بسطِ موجِ تخت برحسبِ امواج استوانه ای است.

(ب) ـ توجّه کنید که این رابطه بسطِ تابعِ متناوبِ $e^{ix\operatorname{Cos}\theta}$ برحسبِ θ به سری فوریه است که در آن $i^n J_n(x)$ ضریبِ بسط فوریه است. با این شناخت $J_n(x)$ را به صورتِ انتگرال با متغیّر θ به دست آورید.

حل ـ (الف) ـ تابعِ مولّدِ توابعِ بسل به صورتِ زیر است:

$$g(x,t) = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

فرض می کنیم $t = e^{i\theta}$ باشد. آنگاه

$$e^{x\frac{ie^{i\theta} - \left(ie^{i\theta}\right)^{-1}}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \left(ie^{i\theta}\right)^n = e^{\frac{ix}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}$$

$$\Rightarrow e^{ix\mathrm{Cos}\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) i^n e^{in\theta}$$

(ب) ـ در رابطهٔ ژاکوبی ـ آنژه تابعِ $e^{ix\mathrm{Cos}\theta}$ متناوب با دورهٔ تناوبِ 2π است. همچنین می توان آن را به صورتِ $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}$ یعنی بسط فوریه نوشت، به طوری که

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

اگر رابطهٔ ژاکوبی ـ آنژه را به عنوان بسط فوریه بگیریم، در این صورت

$$C_n = i^n J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\mathrm{Cos}\theta} e^{-in\theta} d\theta$$

و از آنجا،

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\mathrm{Cos}\theta - n\theta)} i^{-n} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\left(x\mathrm{Cos}\theta - n\theta - n\frac{\pi}{2}\right)} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\left[x\mathrm{Cos}\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) - n\theta'\right]} d\theta' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\mathrm{Sin}\theta' - n\theta')} d\theta'$$

به طوری که در این روابط $\theta + \frac{\pi}{2} = \theta'$ انتخاب شده است.

چند مسئله برای حل:

۱ – **الف :** معادلهٔ هلمهولتز $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0; \left(k^2 \succ 0\right)$ را در مختصّاتِ کروی بنویسید. با روشِ جداسازی $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$ بخشِ شعاعی معادله را استخراج کنید. سپس تغییرِ تابعِ زیر را اِعمال کنید و شکلِ جدیدِ معادلهٔ شعاعی را بنویسید.

$$R(rk) = \frac{Z(rk)}{(rk)^{1/2}}$$

خواهید دید معادلهٔ حاصل، معادلهٔ بسل می شود.

ب ــ همین شیوه را در موردِ بخشِ شعاعی معادلهٔ شرودینگر به کار برید و معادلهٔ دیفرانسیل را استخراج کنید.

۲ – الف ـ اگر a و b مثبت باشند، رابطِ زیر را به دست آورید (انتگرالِ لیپ شیتز):

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

سپس با قرار دادنِ عددِ موهومی $a \to ia$ روابط زیر را نتیجه بگیرید:

$$\int_0^\infty e^{-aix} J_0(bx)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}; b^2 \succ a^2 \\ \dfrac{-i}{\sqrt{a^2-b^2}}; a^2 \succ b^2 \end{cases}$$

ب ـ با به کار بردنِ شکل های مثلّثاتی تحقیق کنید که

$$J_0(bx) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{ibx\,\mathrm{Sin}\,\theta}\,d\theta$$

۳ – نشان دهید که روابطِ زیر در بارهٔ تابعِ نویمان برقرار است:

$$N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x)$$
$$N_0'(x) = -N_1(x)$$