معادلات دیفرانسیل همگن خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

برای حل این معادلات ابتدا آن را بفرم عملگر Dy می‌نویسیم سپس بجای آن از r استفاده می‌کنیم درا‌ین‌صورت خبری از مشتقات نخواهد بود و معادله بفرم یک معادله درجه دوم ریاضی برحسب r بدست می‌آید که با بدست آوردن ریشه‌های آن می‌توان به شکل به جواب مورد نظر رسید.

لازم بذکر است به r مفسر می‌گوئیم

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را برحسب معادله مفسر حل کرده و ریشه‌های آن را بیابید

الف) $y'' + 5y' + 6y = 0$

حل: $D^2y + 5Dy + 6y = 0$

$$(D^2 + 5D + 6)y = 0$$

$$D^2 + 5D + 6 = 0$$

$$\underbrace{r^2 + 5r + 6 = 0}_{\text{معادله مفسر}} \Rightarrow (r+2)(r+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -2 \\ r_2 = -3 \end{cases}$$

ب) $y'' - y' - 6y = 0$

وازاین به بعد بجای مشتقات r می‌گذاریم وازنوشتن y صرف‌نظر می‌کنیم

$$\xrightarrow{\text{مستقیماً}} r^2 - r - 6 = 0$$

$$(r-3)(r+2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

فرم کلی معادلات دیفرانسیل همگن خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت بصورت $y''+a(x)y'+b(x)=0$ می باشد.

برای حل این معادلات ابتدا معادله مفسر مربوط را بدست آورده و سپس ریشه های این معادله را بدست می آوریم که سه حالت رخ می دهد.

الف) $\text{if } \Delta>0 \rightarrow$ دو ریشه متمایز دارد $r_1 \neq r_2 \rightarrow$ جواب عمومی همگن $y_g = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

مثال:

$$y''-2y'-3y=0$$

حل: $r^2-2r-3=0 \rightarrow (r-3)(r+1)=0 \rightarrow r_1=3,\ r_2=-1 \rightarrow y_g = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

ب) $\text{if } \Delta=0 \rightarrow$ ریشه مضاعف دارد $r_1=r_2 \rightarrow$ جواب عمومی همگن $y_g = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}$

مثال:

$$y''-2y'+y=0$$

حل: $r^2-2r+1=0 \rightarrow (r-1)^2=0 \rightarrow (r-1)(r-1)=0$

$$r_1=1,\ r_2=1 \Rightarrow y_g = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}$$

ج) $\text{if } \Delta<0 \rightarrow$ ریشه مختلط دارد $r=\alpha \pm \beta i \rightarrow$ جواب عمومی همگن $y_g = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin \beta x)$

مثال:

$$y''+y'+y=0$$

حل: $r^2+r+1=0 \rightarrow r = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2(1)} = \dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$

$$\rightarrow r = \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2} \Rightarrow r = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\alpha} \pm \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\beta} i$$

$$y_g = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

علیرضا زرگر ص ۳۵

Scanned by CamScanner

مثال :

$$y''' + y'' - 2y = 0$$

حل ; $r^3 + r^2 - 2 = 0 \longrightarrow (r-1)(r^2+2r+2) = 0 \rightarrow r = 1, \quad r = -1 \pm i$

$$y_g = c_1 e^{x} + e^{-x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x)$$

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

حل : $r^3 - 3r + 2 = 0 \longrightarrow (r+2)(r-1)^2 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 1, \quad r_3 = 2$

$$y_g = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{2x}$$

$$y''' + 2y'' = 0$$

حل : $r^3 + 2r^2 = 0 \longrightarrow r^2(r+2) = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 = -2$

$$y_g = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x}$$

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$$

حل : $r^3 - 2r^2 - 4r + 8 = 0 \longrightarrow (r-2)^2(r+2) = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 2, \quad r_3 = -2$

$$y_g = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

علیرضا [illegible] ص ۳۶

تعمیم به مراتب بالاتر

برای حل معادلات مرتبه سوم و چهارم و ... هم مثل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم عمل می‌کنیم

الف) متمایز باشند $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \dots \neq r_n \rightarrow$ جواب عمومی همگن $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$

مثال:

$$y''' - 7y' + 6y = 0$$

حل: $r^3 - 7r + 6 = 0 \rightarrow (r-1)(r-2)(r+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = -3 \end{cases}$

$$y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}$$

ب) برابر باشند $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_n \rightarrow$ جواب عمومی همگن $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_2 x} + \dots + c_n x^{n-1} e^{r_n x}$

مثال:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

حل: $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \rightarrow (r-1)^3 = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = 1 \end{cases}$

$$y_g = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 x^2 e^{x}$$

ج) $r = \alpha_1 \pm \beta_1 i , \dots , \alpha_n \pm \beta_n i$

$$\rightarrow y_g = e^{\alpha_1 x}\left(c_1 \cos(\beta_1 x) + k_1 \sin(\beta_1 x)\right) + \dots + e^{\alpha_n x}\left(c_n \cos(\beta_n x) + k_n \sin(\beta_n x)\right)$$

این حالت معمولاً بوجود نمی‌آید

تذکر: احتمال دارد ریشه‌های معادله ترکیبی از سه نوع معادله با ریشه‌های متفاوت باشد

معادلات دیفرانسیل خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت

حالت کلی این معادلات بفرم $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$

که در آن $g(x)$ مخالف صفر است.

برای حل این نوع معادلات سه روش کلی وجود دارد

الف) روش ضرایب نامعین

ب) روش عملگر D

ج) روش عملگر اپراتور معکوس

لازم بذکر است در حالت های مختلف $f(x)$ شامل چندجمله ای - نمایی - مثلثاتی و یا حاصلضرب آنها در یکدیگر می باشد.

در حالت کلی برای حل آنها ابتدا $g(x)$ را مساوی صفر قرار می دهیم و معادله را تبدیل به معادلات دیفرانسیل خطی همگن کرده و معادله مشخصه را پیدا می کنیم و جواب عمومی همگن را بوسیله روشهای قبلی گفته بدست می آوریم سپس از حالتهای که بعداً گفته می شود جواب خصوصی معادله را بدست می آوریم و آنرا با y_p نمایش می دهیم سپس جواب های عمومی همگن و جواب خصوصی را با هم جمع می کنیم یعنی

$$y=y_g+y_p$$

نکته: کنیه از روش عملگر اپراتور معکوس می توان در کنکور برای سرعت بیشتر استفاده کرد.

الف) روش ضرایب نامعین

۱. اگر $f(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_n x^n$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد آنگاه

اگر ریشه‌ها مخالف صفر باشد
$$y_p = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n$$

اگر ریشه‌ها برابر صفر با مرتبه تکرار t باشد
$$y_p = x^t (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n)$$

مثال:

$$y''' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$$

حل:
$$r^3 - 3r + 2 = 0 \rightarrow (r+2)(r-1)^2 = 0 \begin{cases} r_1 = r_2 = +1 \\ r_3 = -2 \end{cases}$$

$$y_g = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x}$$ جواب عمومی همگن

چون معادله غیرهمگن و چندجمله‌ای است و درجه آن ۲ و ریشه‌ها مخالف صفر است از حالت اول برای بدست آوردن جواب خصوصی استفاده می‌کنیم

$$y_p = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$$

به تعداد مرتبه معادله از جواب خصوصی مشتق می‌گیریم و آنرا در معادله قرار می‌دهیم تا ضرایب مجهول بدست بیاید.

$$y_p' = A_1 + 2A_2 x$$

$$y_p'' = 2A_2$$

$$y_p''' = 0$$

$$0 - 3(A_1 + 2A_2 x) + 2(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = 2x^2 + 1$$

$$2A_2 x^2 + (2A_1 - 6A_2)x + (2A_0 - 3A_1) = 2x^2 + 1$$

$$\begin{cases} 2A_2 = 2 \Rightarrow A_2 = 1 \\ 2A_1 - 6A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = 3 \\ 2A_0 - 3A_1 = 1 \Rightarrow A_0 = 5 \end{cases} \Rightarrow y_p = 5 + 3x + x^2$$ جواب خصوصی

$$y = y_g + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + 5 + 3x + x^2$$