

# اندازه گیری در مکانیک کوانتومی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۱۰ اسفند ۱۳۹۶

## ۱ مقدمه

اصل موضوع اندازه گیری به آن شکلی که معمولاً در درس مکانیک کوانتومی بیان می شود به شکل زیر است:

به هر مشاهده پذیر مثل  $A$  یک عملگر هرمیتی مثل  $\hat{A}$  وابسته است. اندازه گیری روی یک حالت دلخواه مثل  $|\psi\rangle$ ، حتماً یکی از ویژه مقدارهای عملگر  $\hat{A}$  مثل  $a$  را با احتمال  $P(a) = |\langle a|\psi\rangle|^2$  به دست خواهد داد. سیستم کوانتومی بعد از اندازه گیری با همان احتمال به ویژه بردار مربوط به آن ویژه مقدار یعنی  $|a\rangle$  تصویر خواهد شد.

در این درس نخست به طور دقیق تر به این نوع اندازه گیری نگاه می کنیم و سپس در ادامه با اندازه گیری های عمومی تر آشنا خواهیم شد.

کار یک دستگاه اشترن گرایخ این است که ذرات را به طور تصادفی و با احتمالاتی که قابل محاسبه و تست کردن است به دو حالت متمایز از هم جدا می کند. یک پولاروید که جلوی باریکه نور قرار می گیرد نیز همین کار را انجام می دهد و بعضی از فوتون ها را جذب و بعضی دیگر را از خود عبور می دهد. هم چنین است یک آینه نیم شفاف که بعضی از فوتون ها را از خود عبور می دهد و بعضی دیگر را منعکس می کند. یک بلور کالسیت<sup>۱</sup> نیز که ضریب شکست آن بستگی به قطبش نور تابیده دارد، فوتون های تابیده شده به آن را بر اساس جهت قطبش عمودی  $V$  و یا افقی  $H$  آنها از هم جدا می کند، شکل ۴.

<sup>۱</sup> Calcite crystal

. تمام این آزمایش ها خصلت های زیر را به طور مشترک دارا هستند که همگی محصول مستقیم تجربه هستند.

۱ - نتیجه این آزمایشها همواره تصادفی است و هرگز نمی توان رفتار دو ذره کاملاً یکسان را در این آزمایشها و یا اندازه گیری ها پیش بینی کرد. اما احتمالات تابع قوانین دقیق هستند.

۲ - نمی توان گفت که این آزمایشها یک خاصیت از قبل موجود ذره را «مشاهده» می کنند و می سنجند. تنهایی توان گفت که این آزمایشها یا «اندازه گیری» ها ذرات را به نحوی از هم جدا می کنند. ذراتی که بعد از آمایش جدا می شوند دارای خصلت هایی هستند که ما بنابر یک مدل نظری به آنها نسبت می دهیم. به عنوان مثال ذراتی که از خروجی بالای یک آزمایش اشترن گراخ بیرون می آیند در حالت  $|z+\rangle$  هستند و ذراتی که از شکاف پایینی بیرون می آیند در حالت  $|z-\rangle$  هستند. به هیچ وجه نمی توان گفت که مولفه اسپین این ذرات از قبل دارای این مقادیر بوده است.

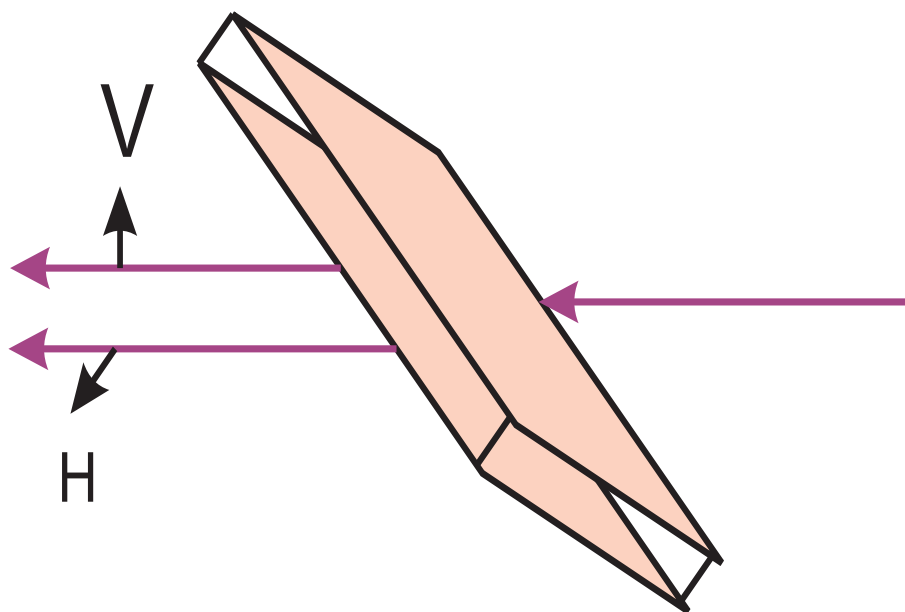
۳ - ذرات خارج شده از این دستگاه حالت های کاملاً متمایز دارند به این معنا که می توان براحتی تک تک آنها را با انجام آزمایشی از همان نوع از یکدیگر و به طور قطع تمیز داد.

توجه به این موضوع بسیار مهم است که در موارد سه گانه بالا هیچ اثری از عملگری که به یک مشاهده پذیر نسبت داده می شود وجود ندارد. درواقع این عملگر دراندازه گیری نقش کاملاً فرعی و ثانوی ایفا می کند و برای تعریف اندازه گیری توجه به آن ضرورت ندارد. در باره این موضوع و چگونگی وارد شدن عملگر مربوط به یک مشاهده پذیر در ادامه بحث خواهیم کرد. در این جا می خواهیم اصل موضوع اندازه گیری را دوباره و به شکلی تعریف کنیم که هم این ملاحظه در آن وارد شده باشد و هم جامعیت بیشتری داشته باشد.

در ادامه بحث نیز از حالت ذره صحبت می کنیم اگرچه آگاه هستیم که ممکن است با یک سیستم چندذره ای سروکار داشته باشیم. اصطلاح ذره فقط برای راحتی به کار می رود. فرض کنید که ذره قبل از ورود به دستگاه در حالت  $|\psi\rangle$  است. (بعدا این وضعیت را به حالت های آمیخته تعمیم می دهیم.) دستگاه اندازه گیری دارای تعدادی خروجی متمایز است. این ذرات در حالت های

$$|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots |a_N\rangle$$

قرار دارند. این ذرات بر اساس یک خاصیت که آن را  $A$  می نامیم از هم جدا شده اند. مشاهدات مکرر نشان می دهد که احتمال آنکه ذره در



شکل ۱: یک بلور کالسیت که ضریب شکست آن بستگی به قطبش نور تابیده دارد، فوتون های تابیده شده به آن را بر اساس جهت قطبش افقی و عمودی آنها جدا می کند

حالت  $|a_i\rangle$  قرار گیرد برابر است با

$$P(a_i) = |\langle a_i|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle = \langle\psi|P_i|\psi\rangle, \quad (۱)$$

که در آن  $P_i = |a_i\rangle\langle a_i|$  یک عملگر تصویرگر است. از آنجا که حالت های خروجی از هم متمایز هستند و مجموع احتمالات نیز برابر واحد است نتیجه می گیریم که:

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i, \quad \sum_i P_i = I \quad (۲)$$

اگر توجه خود را به یکی از حالت های خروجی مثلا خروجی  $i$  ام معطوف کنیم حالت این ذرات عبارت است  $|a_i\rangle$  این حالت ساده را می توان به شکل پیچیده تری نیز نوشت که اگر چه در نگاه اول ممکن است غیرلازم به نظر برسد ولی مفید بودن و ضروری بودن خود را بعدا نشان خواهد داد. می توان حالت فوق را به صورت زیر نوشت:

$$|a_i\rangle\langle a_i| = \frac{P_i|\psi\rangle\langle\psi|P_i}{\langle\psi|P_i|\psi\rangle}. \quad (۳)$$

دقت کنید که برای توصیف آنچه که تا کنون گفته ایم اصولا نیازی به استفاده از یک عملگر هرمیتی که متناظر با خاصیتی که اندازه گیری کرده ایم نداشته ایم. اندازه گیری چیزی نیست جز یک چیدمان آزمایشگاهی که ذرات را از هم تمیز می دهد. البته می توان پس از این جداسازی یک عملگر متناظر با این اندازه گیری نیز تعریف کرد. می توانیم با توجه به ملاحظات فیزیکی بگوییم که ذراتی که در خروجی  $i$  ام قرار دارند خاصیت  $a_i$  دارند و در نتیجه متوسط خاصیت اندازه گیری شده که آن را  $A$  می نامیم به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_i a_i P(a_i) = \sum_i a_i \langle\psi|a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle, \quad (۴)$$

که در آن عملگر  $\hat{A}$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{A} = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|. \quad (۵)$$

اگر ذراتی را که توسط دستگاه اندازه گیری جدا شده اند دوباره مخلوط کنیم حالت آنها چه خواهد بود؟ ممکن است که فکر کنید چرا می بایست ذراتی را که توسط یک دستگاه اندازه گیری از هم جدا شده اند دوباره مخلوط کنیم. پاسخ این است که در بسیاری اوقات پس از مدتی اگر ذرات تمیز داده شده را به صورت فیزیکی از هم جدا نکنیم ذرات در اثر پاشندگی معمولا باهم مخلوط می شوند (مثل فوتون هایی که از بلور

کالسیت خارج می شوند). در بسیاری دیگر از مواقع نیز آزمایش خود را به قصد معینی طوری ترتیب می دهیم که این اتفاق بیفتد. در چنین شرایطی حالت ذرات در خروجی دستگاه عبارت است از:

$$\rho' = \sum_i P(a_i) |a_i\rangle \langle a_i| = \sum_i \langle \psi | P_i | \psi \rangle \frac{P_i | \psi \rangle \langle \psi | P_i}{\langle \psi | P_i | \psi \rangle} = \sum_i P_i | \psi \rangle \langle \psi | P_i. \quad (6)$$

در بیشتر اوقات حالت ورودی به دستگاه اندازه گیری یک حالت خالص نیست بلکه یک حالت آمیخته به صورت

$$\rho = \sum_{\alpha} P_{\alpha} | \psi_{\alpha} \rangle \langle \psi_{\alpha} |, \quad (7)$$

است. در چنین شرایطی احتمالات نهایی ترکیبی از احتمالات کوانتومی ای که قبلا در باره آنها صحبت کردیم و احتمالات کلاسیک ناشی از این آمیختگی است. در نتیجه احتمال اینکه نتیجه  $a_i$  بدست بیاید برابر است با:

$$P(a_i) = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \langle \psi_{\alpha} | P_i | \psi_{\alpha} \rangle = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \text{tr}(P_i | \psi_{\alpha} \rangle \langle \psi_{\alpha} |) = \text{tr}(P_i \rho) = \text{tr}(P_i \rho P_i). \quad (8)$$

حالت خروجی  $i$  ام هم چنان عبارت است از  $|a_i\rangle \langle a_i|$ . این بار این حالت خروجی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|a_i\rangle \langle a_i| = \frac{P_i \rho P_i}{\text{tr}(P_i \rho P_i)}, \quad (9)$$

و اگر حالت های تمیز داده شده را از هم جدا نکنیم حالت خروجی عبارت خواهد بود از:

$$\rho' = \sum_i P(a_i) |a_i\rangle \langle a_i| = \sum_i \text{tr}(P_i \rho P_i) \frac{P_i \rho P_i}{\text{tr}(P_i \rho P_i)} = \sum_i P_i \rho P_i. \quad (10)$$

حال می پرسیم که عبارت طرف راست (۳) چه مزیتی بر عبارت طرف چپ دارد؟ مگر هر دوی این عبارات یک چیز را بیان نمی کنند؟ به چه دلیل می بایست برای توصیف حالت در یکی از خروجی های دستگاه اندازه گیری از عبارت طرف راست استفاده کنیم و نه از عبارت طرف چپ که خیلی ساده تر است؟ پاسخ این است که این دو عبارت فقط در حالت ساده ای که حالت های خروجی دستگاه دارای واگنی نباشند باهم مساوی هستند. ( منظور از واگنی این است که حداقل یک آزمایش دیگر وجود دارد که خروجی  $i$  ام دستگاه را باهم به دو یا چند خروجی دیگر می شکافد. تحت این شرایط خروجی های دستگاه دوم را با  $|a_i, b_g\rangle, \dots, |a_i, b_2\rangle, |a_i, b_1\rangle$  نشان می دهیم. )

تحت چنین شرایطی خروجی  $i$  ام دستگاه اندازه گیری هیچ گونه بستگی به حالت اولیه ندارد و تنها می توان آن را به صورت  $|a_i\rangle \langle a_i|$  که به وضوح از حالت اولیه مستقل است بیان کرد. اما در بقیه موارد و در واقع شاید در بسیاری از موارد دستگاه های اندازه گیری ما آنقدر ظریف نیستند

یا به شکلی طراحی نشده اند که این تمیز کامل را انجام دهند. برای درک این موضوع می بایست به یک مثال توجه کنیم: فرض کنید که دو ذره اسپین 1/2 داریم که در حالت زیر قرار دارند:

$$|\psi\rangle = a|0,0\rangle + b|0,1\rangle + c|1,0\rangle + d|1,1\rangle, \quad (11)$$

که در آن،  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  به ترتیب نشان دهنده اسپین بالا و پایین هستند. دستگاه اندازه گیری ما طوری است که فقط تعیین می کند که آیا اسپین ها با هم موازی هستند یا پادموازی. در این صورت این اندازه گیری با دو عملگر تصویر گر زیر توصیف می شود:

$$P_0 = |0,0\rangle\langle 0,0| + |1,1\rangle\langle 1,1|, \quad P_1 = |0,1\rangle\langle 0,1| + |1,0\rangle\langle 1,0|. \quad (12)$$

احتمال بدست آوردن نتیجه های موازی و پادموازی به ترتیب برابرند با:

$$P(0) = \langle\psi|P_0|\psi\rangle = |a|^2 + |d|^2, \quad P(1) = \langle\psi|P_1|\psi\rangle = |b|^2 + |c|^2, \quad (13)$$

حالت های بعد از اندازه گیری نیز به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{P_0|\psi\rangle\langle\psi|P_0}{\langle\langle\psi|P_0|\psi\rangle\rangle} = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|, \\ \rho_1 &= \frac{P_1|\psi\rangle\langle\psi|P_1}{\langle\langle\psi|P_1|\psi\rangle\rangle} = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|, \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن

$$|\Psi_0\rangle = \frac{a|0,0\rangle + d|1,1\rangle}{\sqrt{|a|^2 + |d|^2}}, \quad |\Psi_1\rangle = \frac{b|0,1\rangle + c|1,0\rangle}{\sqrt{|b|^2 + |c|^2}}. \quad (15)$$

به این ترتیب می بینیم که در اینجا با شرایطی روبرو هستیم که صورت بندی جامع تری که برای اندازه گیری معرفی کرده ایم بخوبی توصیف کننده آزمایش هست و حال آنکه صورت بندی مقدماتی ای که در درس های مقدماتی مکانیک کوانتومی دیده ایم پاسخگوی آن نیست.

برای راحتی مراجعه یک بار دیگر اندازه گیری متعامد را در زیر بیان می کنیم:

اندازه گیری متعامد: یک اندازه گیری متعامد با یک مجموعه از عملگرهای تصویری  $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  مشخص می شود که در شرایط

$$P_i P_j = \delta_{ij}, \quad \sum_i P_i = I$$

صدق می کنند. هر عملگر تصویری متناظر با یکی از خروجی های متمایز چیدمان آزمایشگاهی است. وقتی که روی ذراتی که در حالت کوانتومی  $\rho$  قرار دارند این اندازه گیری را انجام می دهیم نتیجه  $i$  ام با احتمال زیر بدست می آید:

$$P(i) = \text{tr}(P_i \rho P_i)$$

و حالت ذره ای که از خروجی  $i$  ام خارجی می شود عبارت است از:

$$\rho_i := \frac{P_i \rho P_i}{\text{tr}(P_i \rho P_i)}.$$

در صورتی که ذرات را از هم جدا نکنیم کار این چیدمان آزمایشگاهی این است که حالت  $\rho$  را به حالت  $\rho'$  مطابق با زیر تبدیل می کند:

$$\rho \longrightarrow \rho' = \sum_i P_i \rho P_i.$$

■ تمرین: اگر روی دو ذره ای که در حالت (۱۱) هستند اسپین کل دو ذره را اندازه گیری کنیم چه مقادیری و با چه احتمالاتی بدست می آید؟

■ تمرین: سه ذره در حالت زیر هستند:

$$|\psi\rangle = a|0, 0, 0\rangle + b|0, 0, 1\rangle + c|0, 1, 0\rangle + d|0, 1, 1\rangle + e|1, 0, 0\rangle + f|1, 0, 1\rangle + g|1, 1, 0\rangle + h|1, 1, 1\rangle. \quad (۱۶)$$

یک اندازه گیری انجام می دهیم تا مشخص کنیم اکثریت اسپین ها رو به بالا هستند یا پایین. احتمالات مربوطه و هم چنین حالت های بعد از اندازه گیری را تحت شرایط زیر تعیین کنید:

الف: وقتی که حالت های بعد از اندازه گیری را از هم جدا می کنیم.

ب: وقتی که حالت های بعد از اندازه گیری را از هم جدا نمی کنیم.

■ تمرین: دو ذره را که در حالت (۱۱) هستند در نظر بگیرید. روی آنها اندازه گیری در پایه بل انجام می دهیم. احتمالات مربوطه را محاسبه کنید. اگر حالت های بدست آمده را از هم جدا نکنیم حالت بعد از اندازه گیری را مشخص کنید.

■ تمرین: چهار کیوبیت در حالت زیر هستند:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle)_{A,B} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle)_{C,D}. \quad (17)$$

ذرات  $A$  و  $B$  از هم دور هستند. همینطور ذرات  $C$  و  $D$  نیز از هم دور هستند ولی ذرات  $B$  و  $C$  به هم نزدیک و در یک آزمایشگاه هستند. روی این دو ذره اندازه گیری در پایه بل انجام می دهیم. حالت ذرات  $A, D$  را بعد از اندازه گیری پیدا کنید. از این روش می توان برای درهم تنیده کردن ذرات دور از هم استفاده کرد. این روش را تعویض درهم تنیدگی<sup>۲</sup> می گویند.

## ۲ اندازه گیری های نامتعامل

آنچه که در بالا گفتیم مربوط به اندازه گیری های متعامل یا تصویری<sup>۳</sup> است. ولی این نوع اندازه گیری کلی ترین اندازه گیری قابل انجام در آزمایشگاه نیست. در واقع نوع کلی تری از اندازه گیری به نام اندازه گیری نامتعامل<sup>۴</sup> وجود دارد که در واقع از نظر تجربی خیلی رایج تر از اندازه گیری های تصویری است. فرق این نوع اندازه گیری ها با اندازه گیری های متعامل از نظر فیزیکی این است که ذراتی که در اندازه گیری از هم جدا می شوند به طور مطلق و صد در صد از هم قابل تمیز نیستند. این خاصیت از نظر ریاضی خود را به این شکل نشان می دهد که عملگرهای

<sup>۳</sup>Entanglement Swapping

<sup>۴</sup>Projective Measurements

<sup>۵</sup>Non-Orthogonal Measurement



مربوط به این نوع اندازه گیری عملگرهای مصور نیستند. البته می توان نشان داد، چنانکه در همین فصل به تفصیل نشان خواهیم داد، که نهایتاً این نوع اندازه گیری ها از یک نوع اندازه گیری تصویری پدید می آیند. چگونگی این پدید آمدن را به بعد موكول می كنیم. نخست این نوع اندازه گیری را به دقت تعریف می كنیم:

یک اندازه گیری نامتعامل با مجموعه ای از عملگرهای  $\{M_m, m = 1 \dots K\}$  مشخص می شود که در شرط

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I$$

صدق می کنند. این عملگرها الزاماً عملگرهای مصور نیستند یعنی

$$M_i M_j \neq \delta_{ij} M_i.$$

اندازه گیری روی حالت  $\rho$  با احتمال  $P(m) = \text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)$  نتیجه  $m$  را بدست می دهد. حالت هایی که نتیجه  $m$  را دارند عبارتند از

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)}$$

. توجه به این نکته مهم است که تعداد عملگرهای  $M_m$  می تواند از بعد فضا بیشتر باشد. هرگاه حالت های خروجی را از هم جدا نکنیم، حالت خروجی با یک آنزامل مخلوط از حالت ها یعنی با آنزامل زیر داده می شود:

$$\rho' = \sum_m P(m) \rho_m = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger.$$

اندازه گیری های نامتعامل لااقل به دو طریق پدیدار می شوند. نخست وقتی که یک اندازه گیری ایده آل با یک تحول یکانی اغلب ناخواسته بعد از اندازه گیری همراه می شود که باعث می شود تابع موج ذرات جدا شده از هم همپوشانی پیدا کرده و دیگر از هم کاملاً تمیز ناپذیر نباشند. ( شکل (۱؟) و شکل (۲) دوم اینکه وقتی سیستمی را که روی آن اندازه گیری می کنیم به عنوان بخشی از یک سیستم بزرگ تر با فضای هیلبرت بزرگ تر در نظر گرفته و در فضای بزرگ اندازه گیری متعامد انجام می دهیم. طبیعی است که دستگاه بردارهای متعامد در فضای بزرگ از دیدگاه یک زیر فضا دیگر متعامد نخواهد بود، شکل (۳). در زیر نخست این مطالب را شرح می دهیم و سپس مثال های متعددی را بررسی می کنیم.

## ۱.۲ وقتی که حالت های بعد از اندازه گیری تغییر می کنند.

ممکن است که در یک اندازه گیری ذرات را از هم جدا کنیم ولی ذرات جدا شده کاملاً از هم قابل تمیز نباشند. درواقع اندازه گیری تصویری یک ایده آل سازی است که در آن فرض می کنیم ذراتی که در اثر آزمایش جدا شده اند (مثلاً ذرات اسپین 1/2 در آزمایش اشترن گرلاخ) تحت تاثیر گرادیان مغناطیسی در دو جهت مختلف نیرو احساس می کنند و جدا می شوند ولی تحت تاثیر خود میدان مغناطیسی نیز قرار گرفته و اسپین آنها حول میدان متوسط می چرخد، بنابراین وقتی که ذرات به آشکارسازهای ما می رسند دیگر در حالت های ایده آل  $|z, +\rangle$  و  $|z, -\rangle$  نیستند، بلکه این حالت ها به حالت های  $U_+|z, +\rangle$  و  $U_-|z, -\rangle$  تبدیل شده اند که در آن  $U_+$  و  $U_-$  نشان دهنده اثر میدان مغناطیسی موضعی بر حرکت موضعی اسپین ها در فاصله ای است که این ذرات به آشکارسازها رسیده اند. از آنجا که میدان موضعی برای باریکه های جدا شده می تواند متفاوت باشد عملگر یکانی ای که به کار برده ایم نیز متفاوت است. بنابراین حالت های رسیده به آشکارسازها دیگر متعامد نیستند. به این دلیل عملگرهایی که حالت های پس از اندازه گیری را مشخص می کنند دیگر دو عملگر تصویری  $P_+$  و  $P_-$  نیستند، بلکه این عملگرها عبارتند از  $M_+ := U_+ P_+$  و  $M_- := U_- P_-$ .

به طور کلی تر وقتی که یک اندازه گیری تصویری و ایده آل را با یک تحول زمانی خواسته یا ناخواسته دنبال کنیم، خواهیم داشت

$$M_m = U_m P_m \quad (18)$$

که در آن  $U_m$  ها عملگرهای یکانی هستند. در این شرایط با توجه به تعریف اندازه گیری متعامد خواهیم داشت:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \sum_m P_m U_m^\dagger U_m P_m = \sum_m P_m = I, \quad (19)$$

و

$$P(m) = \text{tr}(P_m \rho P_m) = \text{tr}(U_m^\dagger M_m \rho M_m^\dagger U_m) = \text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger). \quad (20)$$

هم چنین حالت بعد از اندازه گیری عبارت است از:

$$\rho_m = U_m \frac{P_m \rho P_m}{\text{tr}(P_m \rho P_m)} U_m^\dagger = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)}. \quad (21)$$

## ۲.۲ وقتی که روی یک فضای بزرگ تر اندازه گیری متعامد انجام می دهیم.

ممکن است ایده اندازه گیری در یک فضای بزرگ تر و مترادف با آن انجام یک اندازه گیری روی یک سیستم  $d$  بعدی که تعداد خروجی های اندازه گیری بیش از  $d$  باشد در نگاه اول کمی عجیب به نظر برسد. در این بخش مثال هایی از این نوع اندازه گیری را معرفی می کنیم.



شکل ۲: تصویر سمت چپ یک اندازه گیری متعامد را نشان می دهد. ذرات اسپین  $1/2$  از یک آزمایش اشتراک گزینش ایده آل بیرون آمده اند. تصویر سمت راست یک اندازه گیری نامتعامد را نشان می دهد. ذرات اسپین  $1/2$  بعد از بیرون آمدن از آزمایش اشتراک گزینش ایده آل تا به آشکارسازهای ما برسند کمی چرخیده اند. احتمالات دست نخورده باقی می مانند ولی حالت ها دیگر بر هم عمود نیستند.

subsubsection مثال اول: اندازه گیری اسپین کل برای دو ذره

## ۱.۲.۲ مثال ۱

فرض کنید که یک ذره اسپین  $1/2$  در حالت  $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$  است که در آن  $|+\rangle$  و  $|-\rangle$  ویژه حالت های عملگر  $S_z$  هستند. ممکن است که بدلا یلی اندازه گیری اسپین این ذره در راستای  $z$  برای ما امکان پذیر نباشد ولی بتوانیم اسپین کل یک سیستم دو ذره ای را مشخص کنیم. برای سادگی فرض می کنیم که ذره دوم در حالت  $|+\rangle$  قرار داشته باشد. در این صورت سیستم مرکب در حالت

$$|\Psi\rangle = a|+,+\rangle + b|-,+\rangle \quad (۲۲)$$

قرار دارد. برای اندازه گیری اسپین کل یعنی  $S^2$  این دو ذره حالت فوق را به صورت زیر بسط می دهیم :

$$|\Psi\rangle = \alpha|1,1\rangle + b\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle - |0,0\rangle). \quad (۲۳)$$

در این جا از نمادهای  $|l,m\rangle$  مربوط به تکانه زاویه ای استفاده کرده ایم. از آنجا که اندازه گیری اسپین کل انجام می شود، این سیستم دو ذره ای با احتمالات زیر به حالت های نوشته شده تصویر می شود:

$$\begin{aligned} P(1) = a^2 + \frac{b^2}{2} & \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}}} (a|1,1\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|1,0\rangle) \\ P(0) = \frac{b^2}{2} & \longrightarrow |0,0\rangle. \end{aligned} \quad (۲۴)$$

یا با بازنویسی حالت ها

$$\begin{aligned} P(1) &= a^2 + \frac{b^2}{2} & \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}}} \left( a|++\rangle + \frac{b}{2}(|+,-\rangle + |-,+\rangle) \right) \\ P(0) &= \frac{b^2}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle - |-,+\rangle) \end{aligned} \quad (۲۵)$$

برای آنکه حالت های بعد از اندازه گیری را برای ذره اول تشخیص دهیم می بایست ماتریس چگالی آن را محاسبه کنیم. بدست می آوریم

$$\begin{aligned} P(1) &= a^2 + \frac{b^2}{2} & \rho_1 &= \frac{1}{a^2 + \frac{b^2}{2}} \begin{pmatrix} a^2 + \frac{b^2}{4} & \frac{ab}{2} \\ \frac{ab}{2} & \frac{b^2}{4} \end{pmatrix} \\ P(0) &= \frac{b^2}{2} & \rho_0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (۲۶)$$

و حالت های  $\rho_0$  و  $\rho_1$  برهم عمود نیستند و حال آنکه اندازه گیری اسپین کل یک اندازه گیری تصویری و متعامد است.

## ۲.۲.۲ مثال ۲

یکی از راه های مرسوم اندازه گیری آن است که حالت سیستم مورد نظر یعنی  $A$  را با یک حالت مرجع از سیستم دیگر مثل  $B$  جفت کرده و بعد از یک عمل یکانی روی کل سیستم  $AB$ ، در پایه های  $B$  اندازه گیری انجام می دهیم. اگر حالت اولیه سیستم  $A$  را با  $|\phi\rangle$ ، حالت مرجع سیستم  $B$  را با  $|0\rangle$  و بردارهای پایه سیستم  $B$  را با  $\{|\mu\rangle\}_{m=1}^K$  نمایش دهیم، آنگاه عمل یکانی  $U$  روی سیستم  $AB$  حالت  $|0\rangle_B \otimes |\phi\rangle_A$  چنین خواهد بود:

$$U : |\phi\rangle_A \otimes |0\rangle_B \longrightarrow \sum_{m=1}^K |\phi_m\rangle_A \otimes |m\rangle. \quad (27)$$

لازمه ی خطی بودن این عملگر نسبت به  $|\phi\rangle$  آن است که بردارهای  $|\phi_m\rangle$  به صورت  $M_m|\phi\rangle$  باشند که در آن ها  $M_m$  ها عملگرهایی در فضای  $A$  هستند، بنابراین

$$|\phi\rangle_A \otimes |0\rangle_B \longrightarrow \sum_{m=1}^K M_m|\phi\rangle_A \otimes |m\rangle. \quad (28)$$

حال اندازه گیری تصویری سیستم  $B$  در پایه ی  $\{|m\rangle\}$  باعث می شود که سیستم  $A$  در یکی از حالت های نامتعامد  $M_m|\phi\rangle$  قرار گیرد. این کار با احتمال  $P(m) = \langle\phi|M_m^\dagger M_m|\phi\rangle$  صورت می گیرد. در این جا چند نکته ی جالب توجه وجود دارد. اول اینکه تعداد حالت های  $K$  می تواند بیشتر از بعد فضای هیلبرت باشد. مثلاً می توانیم به این ترتیب یک ذره اسپین  $1/2$  را روی بیش از دو حالت نامتعامد تصویر کنیم. دوم اینکه احتمالات را می توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$P(m) = \langle\phi|M_m^\dagger M_m|\phi\rangle = \text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho) \quad (29)$$

واضح است که حالت ذره را نیز پس از بدست آوردن نتیجه ی  $m$  می توان به صورت  $\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)}$  نمایش داد. ضمناً شرط یکانی بودن عملگر  $U$  الزام می کند که به ازای هر حالت اولیه ی  $|\phi\rangle$  داشته باشیم

$$\langle\phi| \otimes \langle 0| U^\dagger U |\phi\rangle \otimes |0\rangle = \langle\phi|\phi\rangle, \quad (30)$$

که پس از جایگزاری و ساده کردن طرف راست منجر به شرط زیر می شود:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I_A. \quad (31)$$

■ تمرین: آلیس و باب هر کدام یک ذره در اختیار دارند و حالت دو ذره به صورت زیر است:

$$|\phi\rangle_{AB} = \sqrt{1-p}|0,0\rangle + \sqrt{p}|1,1\rangle. \quad (32)$$

آنها می خواهند این حالت را به یک حالت درهم تنیده ماکزیمال تبدیل کنند. برای این کار آلیس یک کیوبیت کمکی در حالت صفر در کنار کیوبیت خودش قرار می دهد. اکنون حالت کل ذرات به این شکل است:

$$|\phi\rangle_{A'AB} = \sqrt{1-p}|0,0,0\rangle + \sqrt{p}|0,1,1\rangle. \quad (33)$$

حال آلیس روی کیوبیت هایی که در اختیار خودش است یعنی  $A$  و  $A'$  یک عملگر  $U$  مناسب اعمال می کند. سپس در پایه محاسباتی روی کیوبیت  $A'$  یک اندازه گیری انجام می دهد. این اندازه گیری باعث می شود که با یک احتمال معین حالت کیوبیت های  $A, B$  به صورت یک حالت درهم تنیده ماکزیمال یعنی یک حالت بل در بیاید. عملگر مناسب  $U$  را پیدا کنید. و بیشترین احتمال تولید حالت بل را بدست آورید.

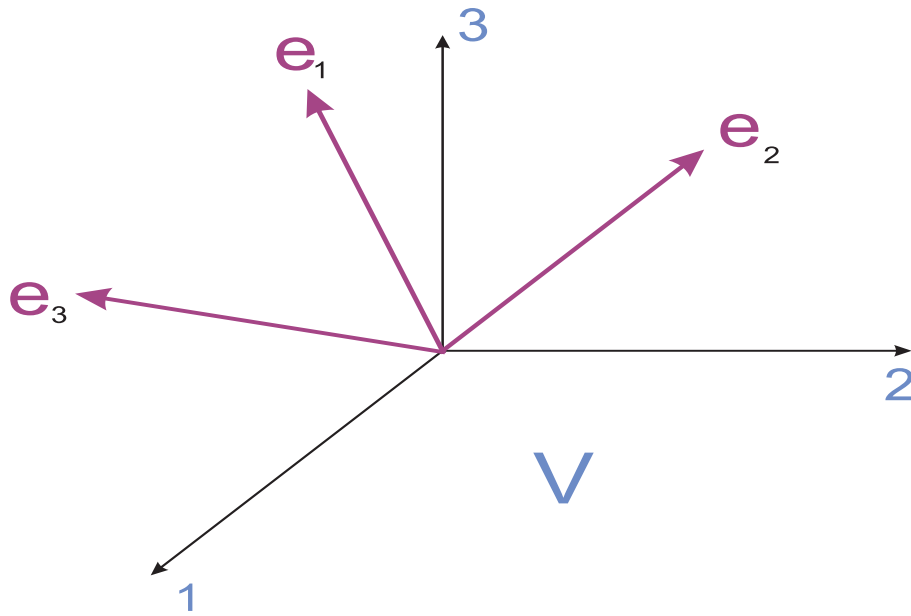
### ۳.۲.۲ مثال ۳

آنچه که در مثال قبلی گفتیم نمونه ای است از یک قضیه کلی تر موسوم به قضیه نویمارک<sup>۵</sup> که بر مبنای آن هر اندازه گیری نامتعامل را می توان ناشی از یک اندازه گیری متعامل در یک فضای بزرگ تر در نظر گرفت. در زیر نمونه ای از استدلال را می بینیم که خواننده را برای اثبات کلی در ادامه درس آماده می کند.

در بسیاری از اوقات ما روی یک سیستم بزرگ تر یک اندازه گیری تصویری انجام می دهیم و این اندازه گیری روی یک سیستم اصلی ما به عنوان یک اندازه گیری نامتعامل پدیدار می شود. شکل (۳) به طور شماتیک این پدیده را نشان می دهد. برای فهم بهتر این موضوع نخست یک مثال را بررسی می کنیم:

شکل (۳) یک فضای سه بعدی و یک زیر فضای دوبعدی از آن را نشان می دهد. زیر فضای دوبعدی با بردارهای پایه  $|1\rangle$  و  $|2\rangle$  جاروب می شود. ولی ما به دلایلی سیستم خود را که یک سیستم دو بعدی است در یک سیستم بزرگ تر که سه بعد دارد جای داده و در فضای هیلبرت

<sup>۵</sup>Neumark



شکل ۳: اندازه گیری تصویری در امتداد بردارهای فضای بزرگ از دید ناظری که در یک زیر فضا قرار دارد یک اندازه گیری نامتعامد است .

بزرگ تر یک اندازه گیری متعامد در پایه  $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$  انجام می دهیم. در آینده مثال ها و تمرین های مشخصی از این نوع اندازه گیری خواهیم دید. فضای دوبعدی کوچک را با  $H_A$  و فضای بزرگ تر را با  $H$  نشان می دهیم.  $H_A$  یک زیر فضای  $H$  است. فرض کنید که برداری های نشان داده شده در شکل به صورت زیر باشند:

$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle \\ |e_2\rangle &= \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle \\ |e_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle. \end{aligned} \quad (۳۴)$$

حال یک اندازه گیری تصویری در امتداد بردارهای فوق روی حالت زیر که مربوط به سیستم  $A$  است و به همین جهت بردار حالت آن در فضای هیلبرت  $H_A$  قرار دارد، انجام می دهیم. بردار حالت سیستم  $A$  را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle. \quad (۳۵)$$

اگرچه این بردار در زیر فضای  $H_A$  قرار دارد ولی اندازه گیری ما در فضای بزرگ  $H$  انجام می شود.

برای اینکه نتیجه اندازه گیری را بفهمیم می بایست بردار  $|\psi\rangle$  را برحسب بردارهای سه گانه فضای بزرگ بسط دهیم. بنابراین از روابط زیر استفاده می کنیم

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \frac{1}{2}|e_1\rangle + \frac{1}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_3\rangle \\ |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle \\ |3\rangle &= \frac{1}{2}|e_1\rangle + \frac{1}{2}|e_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|e_3\rangle. \end{aligned} \quad (36)$$

و بسط بردار  $|\psi\rangle$  را پیدا می کنیم:

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)|e_1\rangle + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)|e_2\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|e_3\rangle \quad (37)$$

دراین صورت اندازه گیری تصویری روی این بردار حالت در امتداد های  $|e_1\rangle$ ،  $|e_2\rangle$  و  $|e_3\rangle$  با احتمالات زیر مرتبط است:

$$\begin{aligned} P(e_1) &= \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ P(e_2) &= \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ P(e_3) &= \frac{a^2}{2}. \end{aligned} \quad (38)$$

به این معنا که با احتمالات فوق حالت ذره به یکی از حالت های  $|e_1\rangle$ ،  $|e_2\rangle$  و یا  $|e_3\rangle$  تصویر خواهد شد. اما نتیجه اندازه گیری را می بایست از دید ناظر درون زیرفضای  $H_A$  نگاه کنیم. درنتیجه می بایست بردارهای فوق را به زیرفضای  $H_A$  تصویر کنیم. بنابراین نتیجه آن خواهد شد که اندازه گیری انجام شده از دید این ناظر، بردار حالت را با احتمالات بالا به یکی از حالت های غیر متعامد زیر تصویر می کند. دقت کنید که بردارها را بهنجار کرده ایم.

$$\begin{aligned} |v_1\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle \\ |v_2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle \\ |v_3\rangle &= |1\rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

این مثال نشان می دهد که چگونه یک اندازه گیری غیر متعامد از یک اندازه گیری تصویری یا متعامد در یک فضای بزرگ تر بوجود می آید. حال می توانیم آنچه را که در این مثال بیان کردیم به صورت کلی تر صورتبندی کنیم. فرض کنید که حالتی که می خواهیم اندازه گیری کنیم در فضای  $H_A$  قرار دارد ولی ما روی فضای هیلبرت  $H = H_A \oplus H_A^\perp$  یک اندازه گیری تصویری در پایه ی  $\{|e_m\rangle\}$  انجام می دهیم. فضای  $H_A^\perp$



بر  $H_A$  عمود است. هر حالت  $|e_m\rangle$  به شکل یکتایی به صورت زیر تجزیه می شود:

$$|e_m\rangle = |v_m\rangle + |v_m^\perp\rangle \quad (40)$$

یا به صورت صریح تر:

$$|e_m\rangle = \begin{pmatrix} |v_m\rangle \\ |v_m^\perp\rangle \end{pmatrix} \quad (41)$$

که در آن بلوک بالا مربوط به زیر فضای  $H_A$  و بلوک پایین مربوط به زیر فضای  $H_A^\perp$  است. از آنجا که حالت سیستم ما یعنی  $\rho_A$  در فضای هیلبرت  $H_A$  است، می دانیم که

$$\langle v_m^\perp | \rho_A = 0 = \rho_A | v_m^\perp \rangle. \quad (42)$$

باز هم به طور صریح تر حالت سیستم بزرگ تر چنین است:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \rho_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

که واضح است خاصیت های گفته شده را دارد.

در اندازه گیری تصویری ای که در فضای  $H$  انجام می دهیم نتیجه ای  $m$  با احتمال زیر حاصل می شود

$$P(m) = \text{tr}(\rho_{AB} |e_m\rangle \langle e_m|) = \langle e_m | \rho_{AB} | e_m \rangle.$$

اما با توجه به شکل  $\rho_{AB}$  و  $|e_m\rangle$  این احتمال را می توان به صورت زیر نوشت:

$$P(m) = \langle v_m | \rho_A | v_m \rangle = \text{tr}(|v_m\rangle \langle v_m| \rho_A).$$

برای اینکه این احتمال را به صورت  $\text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)$  بنویسیم فکر می کنیم ببینیم که  $|v_m\rangle \langle v_m|$  را به صورت مربع چه عملگری می توان نوشت:

قرار می دهیم  $M_m := c |v_m\rangle \langle v_m|$  که در آن  $c$  یک پارامتر حقیقی است. بنابراین  $M_m$  یک عملگر هرمیتی است. می خواهیم که تساوی زیر برقرار باشد.

$$M_m^\dagger M_m = |v_m\rangle \langle v_m| \quad (44)$$

بنابراین بدست می آوریم که  $c = \frac{1}{\sqrt{\langle v_m | v_m \rangle}}$

و در نتیجه قرار می دهیم:

$$M_m = \frac{|v_m\rangle\langle v_m|}{\sqrt{\langle v_m | v_m \rangle}}. \quad (45)$$

بنابراین می توانیم بنویسیم

$$P(m) = \text{tr}(M_m \rho_A M_m^\dagger). \quad (46)$$

هم چنین می دانیم که

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \sum_m |v_m\rangle\langle v_m|. \quad (47)$$

اما طرف راست را با استفاده از عملگر تصویرگر روی فضای  $H_A$  می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \sum_m |v_m\rangle\langle v_m| = P_A \left( \sum_m |e_m\rangle\langle e_m| \right) P_A = P_A I_{A \oplus B} P_A = P_A \equiv I_A, \quad (48)$$

که در آن  $P_A$  عملگر تصویرگر روی فضای  $H_A$  است و طبیعی است که از نظر  $A$  این عملگر مثل عملگر واحد در این فضا می ماند.

حالت بعد از اندازه گیری نیز در فضای بزرگ  $H$  برابر خواهد بود با  $|e_m\rangle$  ولی در زیر فضای  $H_A$  تنها تصویر این بردار یعنی  $|v_m\rangle$  دیده می

شود. بنابراین حالت بعد از اندازه گیری از دید سیستم  $A$  بعد از بهنجار شدن برابر خواهد بود با:

$$\rho_m = \frac{|v_m\rangle\langle v_m|}{\sqrt{\langle v_m | v_m \rangle}} \quad (49)$$

■ تمرین: از تعریف  $M_m$  استفاده کنید و نشان دهید که عبارت فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)}. \quad (50)$$

### ۳ اندازه گیری های POVM

تقریباً در اغلب موارد ما تنها به آمار اندازه گیری علاقمندیم و به حالت های پس از اندازه گیری علاقمند نیستیم یا اینکه به آنها دسترسی نداریم. مثلاً یک دستگاه شمارشگر فوتون<sup>۶</sup> را در نظر بگیرید. فوتونی که به این دستگاه وارد می شود در همان اول جذب یک الکتروود فلزی شده و یک یا چند الکترون را آزاد می کند که به نوبه خود در چند مرحله پیاپی یک جریان الکتریکی را تولید می کنند. به این ترتیب با ثبت یک پالس جریان متوجه می شویم که یک فوتون به شمارشگر وارد شده است. در اینجا به حالت فوتون بعد از این که به شمارشگر وارد شده علاقه ای نداریم. یا پرده فلوروسانسی را در نظر بگیرید که به کمک آن می توانیم شدت نور را روی یک نقاط مختلف پرده تعیین کنیم. در هر دوی این موارد واقعاً حالت ذرات ثبت شده مورد علاقه ما نیست چرا که اصولاً ذرات ثبت شده تغییر حالت می دهند و از دسترس ما نیز خارج می شوند (در حالت اول در صفحات فلزی ریزی که درون شمارشگر وجود دارد و در حالت دوم روی پرده جذب می شوند). در چنین مواردی تنها به احتمال رویدادها علاقمند هستیم، مثلاً علاقمندیم بدانیم که در هرثانیه چند تا فوتون به شمارشگر ما می رسند یا چند تا فوتون به یک نقطه از پرده می رسند یا چند تا فوتون قطبش افقی دارند و چند تا عمودی و نظایر این ها. در این موارد می توانیم بنویسیم

$$P(m) = \text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho) = \text{tr}(E_m \rho), \quad (51)$$

که در آن  $E_m$  ها عملگرهای مثبت هستند و در شرط

$$\sum_m E_m = I, \quad (52)$$

صدق می کنند. به این ترتیب به نوعی از اندازه گیری می رسیم که به صورت زیر تعریف می شود:

---

<sup>۶</sup>Photo-multiplier tube

یک اندازه گیری  $POVM$  با مجموعه ای از عملگرهای مثبت  $\{E_m, m = 1 \dots K\}$  که در شرط

$$\sum_m E_m = I$$

صدق می کنند تعریف می شود. در این نوع اندازه گیری تنها به آمار اندازه گیری (تعداد کلیک های شمارشگرها) علاقه مندیم و نه به حالت ذرات بعد از اندازه گیری. وقتی که روی حالت  $\rho$  اندازه گیری می کنیم، احتمال بدست آوردن نتیجه  $m$  برابر است با:

$$P(m) = \text{tr}(\rho E_m)$$

■ تمرین: عملگرهای زیر را در نظر بگیرید:

$$M_1 = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad M_2 = \frac{1}{2}(I + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad M_3 = \frac{1}{2}(I + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (53)$$

رابطه سه بردار  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{r}$ , و  $\mathbf{t}$  چگونه باشد که این سه عملگر یک اندازه گیری نامتعامل را تعریف کنند. مثال های مشخصی از عملگرهای مربوطه ارائه دهید.

■ تمرین: دو ذره در حالت

$$|\psi\rangle = \cos \theta |0, 0\rangle + \sin \theta |1, 1\rangle, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad (54)$$

قرار دارند. روی ذره اول یک اندازه گیری نامتعامل با ماتریس های زیر انجام می دهیم:

$$M_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-a^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-b^2} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

الف- نسبت پارامترهای  $a$ ,  $b$  را چنان تعیین کنید که وقتی که نتیجه 0 بدست می آید، حالت بعد از اندازه گیری یک حالت بل باشد.

ب - مقدار مطلق این پارامترها را چنان تعیین کنید که احتمال بست آوردن یک حالت بل به بیشترین مقدار ممکن برسد. تحت این شرایط وقتی که نتیجه 1 بدست می آید، حالت دو ذره به چه حالتی تبدیل می شود؟

■ تمرین: فرض کنید که دو ذره در حالت (۱۱) هستند. یک ذره در حالت  $|0\rangle$  را در کنار این دو ذره قرار می دهیم. بنابراین حالت سه ذره با هم اکنون به صورت زیر است:

$$|\Psi\rangle_{A',A,B} = \cos\theta|0,0,0\rangle + \sin\theta|0,1,1\rangle. \quad (۵۶)$$

دو ذره  $A, A'$  در یک آزمایشگاه و در نزدیکی هم قرار دارند. اما ذره سوم از این دو ذره دور است. نخست روی دو ذره  $A, A'$  یک عملگر یکانی  $U$  اثر می دهیم و سپس ذره  $A'$  را در پایه محاسباتی اندازه گیری می کنیم. بنابراین در اثر اندازه گیری ذرات  $A$  و  $B$  بسته به نتیجه اندازه گیری می توانند به دو حالت مختلف تصویر شوند. عملگر  $U$  را به شکل مناسبی انتخاب کنید طوری که

الف - یکی از این حالت ها یک حالت کاملاً درهم تنیده یعنی یک حالت بل باشد.

ب - سپس با انتخاب مناسب عملگر یکانی کاری کنید که احتمال بدست آمدن حالت بل به بیشترین مقدار خود برسد.

نشان دهید که این احتمال مساوی با همان احتمالی است که در مسئله قبلی بدست آوردید. به این ترتیب می بینیم که چگونه یک اندازه گیری نامتعامل روی ذره  $A$  را می توان از طریق یک عمل یکانی و سپس یک اندازه گیری متعامل روی یک ذره کمکی موسوم به کیوبیت خدمتکار<sup>۷</sup> بدست آورد.

■ تمرین: دو عملگر

$$E_1 = a_0 I + \mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad b_0 + \mathbf{b}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

را در نظر بگیرید. تحت چه شرایطی این دو عملگر یک  $POVM$  می سازند.

■ تمرین: یک اتم رادیواکتیو را در نظر بگیرید که از خود ذرات گاما در همه جهات ساطع می کند. در بالا و پایین این ذره دو آشکارساز قرار داده ایم که بتوانند تعداد ذرات تابیده شده در جهت های بالا و پایین بشمارند. عملگرهای مربوط به این اندازه گیری عبارتند از:

<sup>۷</sup>Ancilla qubit

(۵۷)

$$E_{up} = \int_0^{\frac{5\pi}{12}} d\theta \sin \theta d\phi |\theta, \phi\rangle \langle \theta, \phi|, \quad E_{down} = \int_{\frac{7\pi}{12}}^{\pi} d\theta \sin \theta d\phi |\theta, \phi\rangle \langle \theta, \phi|, \quad E_{escape} = I - E_{up} - E_{down}.$$

الف- فرض کنید که ذرات با احتمال یکنواخت در همه جهات پخش می شوند. در این صورت احتمال اینکه آشکارساز بالایی کلیک کند چقدر است؟ احتمال اینکه هیچ کدام از آشکارسازهای بالا و پایین کلیک نکنند چقدر است؟ احتمال اینکه هر دو آشکارساز بالا و پایین کلیک کنند چقدر است؟

ب - فرض کنید که ذرات با احتمال  $\frac{2}{3}$  به طرف نیمکره بالا و با احتمال  $\frac{1}{3}$  در جهت نیم کره پایین تابیده می شوند. در این صورت پاسخ سوالات بالا چیست؟

ج - حال فرض کنید که ذرات با همان احتمالات گفته شده در قسمت ب، به ترتیب به طرف نیم کره دست راست و دست چپ تابانده می شوند. سوالهای قسمت ب را دوباره پاسخ دهید.

■ تمرین: دو ذره در حالت زیر قرار دارند:

$$\rho = \frac{1}{4}(I + t\sigma_x \otimes \sigma_x + t\sigma_y \otimes \sigma_y + t\sigma_z \otimes \sigma_z) \quad (58)$$

الف: محدوده مجاز پارامتر  $t$  را چنان تعیین کنید که این عبارت نشان دهنده یک ماتریس چگالی باشد.

ب - یک اندازه گیری انجام می دهیم که تعیین می کند آیا این دو ذره در یک حالت متقارن هستند یا یک حالت پادمقارن. این اندازه گیری با دو عملگر  $POVM$  مشخص می شود. این دو عملگر را بنویسید.

ج- احتمال هرکدام از دو رویداد را بدست آورید.

### ۱۰۰.۳ وقتی که آشکارسازها دقیق نیستند و در آنها اشتباه رخ می دهد.

در این بخش نشان می دهیم که چگونه اندازه گیری های POVM در توصیف اندازه گیری های متعامد ولی غیردقیق به کار می روند. در بعضی از موارد آشکارسازهای ما خیلی دقیق نیستند و یا قدرت تفکیک کاملی ندارند یا اینکه تابع موج ذرات پخش شده و با یکدیگر همپوشانی پیدا می کنند. در این موارد ذره ای که قرار بوده به آشکارساز  $D_0$  وارد شود با احتمالی به آشکارساز  $D_1$  وارد می شود و باعث ایجاد خطا می شود. در ساده ترین حالت می توانیم فرض کنیم اندازه گیری ما ترکیبی است از یک اندازه گیری تصویری ایده آل که با تصویرگرهای  $P_0$  و  $P_1$  توصیف می شود ولی بلافاصله بعد از خطاهایی در ثبت ذرات بوجود می آید. در این صورت می توانیم احتمال ثبت ذرات را در آشکارسازها به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} P(0) &= (1-p)Tr(\rho P_0) + pTr(\rho P_1) \\ P(1) &= (1-p)Tr(\rho P_1) + pTr(\rho P_0). \end{aligned} \quad (59)$$

در اینجا برای سادگی فرض کرده ایم که احتمال خطا به صورت متقارن و مطابق شکل (؟؟) است. در این صورت می توانیم روابط بالا را به شکل زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} P(0) &= Tr(\rho E_0) \\ P(1) &= Tr(\rho E_1). \end{aligned} \quad (60)$$

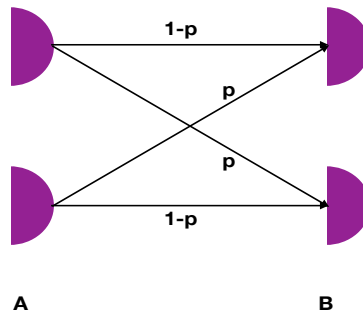
که در آن

$$\begin{aligned} E_0 &= (1-p)P_0 + pP_1 \\ E_1 &= (1-p)P_1 + pP_0. \end{aligned} \quad (61)$$

دقت کنید که این عملگرهای مثبت هستند و مجموع آنها نیز برابر با یک است. آنچه که در این مثال ساده گفته شد به صورت زیر تعمیم می یابد:

$$\mathcal{P}(\alpha) = \sum P(\alpha \leftarrow i)P(i) \quad (62)$$

$$\mathcal{P}(\alpha) = \sum_i P(\alpha \leftarrow i)Tr(\rho P_i) = Tr(\rho(\sum_i P(\alpha \leftarrow i)P_i)) = Tr(\rho E_\alpha) \quad (63)$$



شکل ۴: سمت چپ آشکارسازهای ایده آل و سمت راست آشکارسازی های واقعی را نشان می دهد.

که در آن

$$E_{\alpha} = \sum_i P(\alpha \leftarrow i) P_i. \quad (64)$$

معلوم است که این عملگرها همگمی مثبت هستند و مجموع آنها نیز برابر با یک است.

■ تمرین: ثابت کنید که  $M_{\alpha}$  ها مثبت هستند و مجموع آنها برابر با عملگر واحد است.

## ۴ تشخیص حالت ها از یکدیگر

فرض کنید که آلایس تعداد زیادی از حالت های  $|\psi_1\rangle$  و  $|\psi_2\rangle$  در اختیار دارد و این حالت ها را با احتمال مساوی به باب می فرستد. سوالی که باب با آن مواجه است این نیست که فلان مشاهده پذیر را از یک حالت معین اندازه گیری کند، بلکه می خواهد ببیند که آیا حالتی که اکنون آلایس



برایش فرستاده است  $|\psi_1\rangle$  است یا  $|\psi_2\rangle$ . این نمونه ای است از سوال های کلی ای که ما در اندازه گیری به آنها توجه داریم و به آن تشخیص حالت <sup>۸</sup> می گوئیم. بنابراین می بینیم که همیشه سوالهای مهم از نوع اندازه گیری یک مشاهده پذیر روی یک حالت معین نیستند. باب می بایست با انجام بهترین اندازه گیری ها بتواند تا حد ممکن تشخیص دهد که آیا آلیس حالت  $|\psi_1\rangle$  را برای وی فرستاده است یا حالت  $|\psi_2\rangle$  را.

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle). \quad (۶۵)$$

فرض می کنیم که باب در پایه  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  اندازه گیری می کند و بسته به نتیجه ای که بدست آورده است حدسی در باره حالتی که آلیس برایش فرستاده می زند و این حدس را اعلام می کند. دقت کنید که باب می تواند استراتژی های گوناگونی را به کار ببرد. در زیر دو نمونه از این استراتژی ها را توضیح می دهیم:

استراتژی الف: هرگاه باب نتیجه 0 بدست می آورد اعلام می کند که حالت ارسال شده توسط الیس  $|0\rangle$  است (البته ممکن است باب در بعضی از موارد اشتباه کند) و هرگاه که نتیجه 1 بدست آورد اعلام می کند که آلیس حالت  $|+\rangle$  را فرستاده است. در این استراتژی احتمال موفقیت باب برابر است با:

$$P_{success} = P(0|0\rangle)P(|0\rangle) + P(1|+\rangle)P(|+\rangle). \quad (۶۶)$$

که در آن

$$P(|0\rangle) = P(|+\rangle) = \frac{1}{2}$$

احتمال این است که آلیس هرکدام از حالت های فوق را به باب بفرستد که در این مثال آنها را برابر گرفته ایم و  $P(a|b)$  نیز احتمال این است که باب نتیجه  $a$  بدست بیاورد وقتی که حالت  $|b\rangle$  دریافت کرده است. با توجه به رابطه (۶۶) بدست می آوریم:

$$P_{success} = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \quad (۶۷)$$

دقت کنید که در این استراتژی گاهی اوقات باب اشتباه می کند و نتیجه را غلط اعلام می کند و این همان مواردی است که آلیس حالت  $|+\rangle$  را برای او می فرستد و او نتیجه 0 را بدست می آورد و اعلام می کند که حالت فرستاده شده  $|0\rangle$  است. این خطا با احتمال  $1/4$  رخ می دهد.

استراتژی ب: در این استراتژی باب تنها وقتی نتیجه را می گوید که از درستی حدس اش کاملاً مطمئن باشد. در نتیجه تنها وقتی که نتیجه 1 را دریافت می کند اعلام می کند که حالت  $|+\rangle$  برایش ارسال شده و در غیر این صورت سکوت می کند. در این جا او تنها در  $1/4$  موارد اعلام نظر قطعی می کند. اگر این را موفقیت بنامیم می توانیم بنویسیم:

$$P_{no-error} = P(1|+))P(|+\rangle) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \quad (68)$$

۹

■ تمرین: حال فرض کنید که آلیس هر بار دو نسخه از هر حالت برای باب می فرستد. و باب بازهم در پایه محاسباتی اندازه گیری می کند. حساب کنید که این بار باب در چند درصد موارد می تواند با قطعیت بگوید که آلیس کدام جفت حالت را برایش فرستاده است. یک استراتژی دیگر را نیز طرح و احتمال موفقیت آن را محاسبه کنید.

■ تمرین: حال فرض کنید که آلیس هر بار یک بسته  $N$  تایی از هر حالت برای باب می فرستد و باب بازهم در پایه محاسباتی اندازه گیری می کند. حساب کنید که این بار باب در چند درصد موارد می تواند با قطعیت بگوید که آلیس کدام بسته را برایش فرستاده است. یک استراتژی دیگر را نیز طرح و احتمال موفقیت آن را محاسبه کنید. اگر  $N$  به سمت بی نهایت میل کند نتیجه شما چه می شود؟

اما اگر آلیس فقط بتواند هر بار یکی از حالت ها را برایش بفرستد و منبعی نداشته باشد که از حالت های فوق تعداد دلخواهی درست کند، آیا باب می تواند اندازه گیری بهتری انجام دهد و حالت ها را از هم تشخیص دهد؟ در این قسمت می خواهیم نشان دهیم که در واقع یک چنین اندازه گیری هایی وجود دارند. وی می بایست یک اندازه گیری  $POVM$  با عملگرهای زیر را انجام می دهد:

$$E_1 = \alpha|1\rangle\langle 1|, \quad E_2 = \beta(|-\rangle\langle -|) \quad (69)$$

که در آن  $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$  و

$$E_3 = I - E_1 - E_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\beta}{2} & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & 1 - \alpha - \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \quad (70)$$

<sup>۹</sup>البته اندازه گیری در پایه محاسباتی بهترین روش برای تشخیص این دو حالت از یکدیگر نیست. باب می بایست پایه ای به کار برد که نسبت به حالت های ارسال شده تقارن داشته باشد. رجوع کنید به تمرین های آخر ای درسو

که در آن  $E_3$  در پایه محاسباتی یعنی پایه  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  نوشته شده و  $\alpha$  و  $\beta$  اعداد مثبتی هستند که می بایست چنان انتخاب شوند که عملگر  $E_3$  نیز مثبت باشد. می خواهیم ببینیم که باب در چند درصد موارد می تواند با قطعیت نوع حالت ارسال شده را تشخیص دهد. برای این کار دقت می کنیم که آزمابل حالت های ارسال شده به صورت زیر است.

$$\rho = \frac{1}{2}(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) \quad (71)$$

هم چنین می دانیم که وقتی نتیجه ۱ بدست آید وی با اطمینان می گوید که حالت  $|\psi_2\rangle$  ارسال شده است زیرا  $\langle\psi_1|E_1|\psi_1\rangle = 0$ . به همین دلیل وقتی که نتیجه ۲ را بدست می آورد مطمئن است که حالت  $|\psi_1\rangle$  برای وی ارسال شده است. تنها در حالت بدست آوردن نتیجه ۳ است که وی هم چنان مردد باقی خواهد ماند. بنابراین احتمال موفقیت برابر است با  $P(1) + P(2)$  که در آن

$$\begin{aligned} P(1) &= \text{tr}(\rho E_1) = \frac{1}{2}\langle\psi_2|E_1|\psi_2\rangle = \frac{1}{4}\alpha \\ P(2) &= \text{tr}(\rho E_2) = \frac{1}{2}\langle\psi_1|E_2|\psi_1\rangle = \frac{1}{4}\beta. \end{aligned} \quad (72)$$

به عبارت دیگر داریم:

$$P_{no-error} = \text{tr}(\rho(1 - E_3)) = 1 - \text{tr}(\rho E_3). \quad (73)$$

برای بیشینه کردن احتمال موفقیت می بایست مقدار  $\alpha + \beta$  را بیشینه کنیم. اما این بیشینه کردن می بایست تا جایی ادامه پیدا کند که عملگر  $E_3$  هم چنان مثبت باقی بماند. ویژه مقدارهای عملگر  $E_3$  برابرند با:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 2 - \alpha - \beta \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) \quad (74)$$

بدلیل تقارنی که نسبت به تعویض  $\alpha$  و  $\beta$  وجود دارد می توانیم آن ها را مساوی بگیریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$P_{noerror} = \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda_{\pm} = 1 - \alpha \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha \quad (75)$$

هدف ما زیاد کردن  $\alpha$  است تا جاییکه هیچکدام از ویژه مقادیر منفی نشوند. برای این کار باید به مقدار صفر برای  $\lambda_-$  نگاه کنیم چون که این مرز ناحیه ای است که این ویژه مقدار شروع به منفی شدن می کند. با چنین محاسبه ای معلوم می شود که مقدار ممکن برای  $\alpha$  برابر است با:

$$\alpha = \beta = 2 - \sqrt{2}. \quad (76)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$P_{noerror} = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2}) = 0.29. \quad (77)$$

یعنی این بار برخلاف قبل باب می تواند در ۲۹ درصد از موارد حالت ها را به دقت تشخیص دهد. دقت کنید که ما در این مثال استراتژی (ب) را مطالعه کردیم. در واقع اگر بخواهیم استراتژی (الف) با این نوع اندازه گیری ها دنبال کنیم، یعنی اینکه باب بتواند حدس بزند و بعضی وقت ها نیز این حدس ها اشتباه از آب درآید، آنگاه اندازه گیری های از نوع گفته شده در این مثال خوب نیستند و احتمال موفقیت آنها کمتر از مواردی است که اندازه گیری فقط دو نتیجه خروجی دارد.

■ تمرین: حال فرض کنید که آلیس حالت ها را با احتمال یکسان نمی فرستد بلکه با احتمال  $p$  حالت  $|0\rangle$  و با احتمال  $1-p$  حالت  $|+\rangle$  ارسال می کند. حساب کنید که در این صورت احتمال موفقیت باب برای تشخیص حالت چقدر است. پاسخ شما می بایست چنان باشد که در حالت حدی  $1 \rightarrow p$  یا  $0 \rightarrow p$  احتمال تشخیص حالت به سمت یک و در حد  $p = \frac{1}{2}$  به سمت مقدار 0.29 میل کند.

پاسخ:

$$P_{correct} = 1 - \sqrt{2p(1-p)}. \quad (78)$$

■ تمرین: آلیس دو حالت  $|\psi_1\rangle := \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$  و  $|\psi_2\rangle := \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle$  را به صورت تصادفی و با احتمالات مساوی برای باب می فرستد. دقت کنید که هر دو حالت دلخواهی را همواره می توان به این شکل پارامتر بندی کرد. آلیس یک اندازه گیری متعامد در پایه  $|u_1\rangle := \cos\alpha|0\rangle + \sin\alpha|1\rangle$  و  $|u_2\rangle := -\sin\alpha|0\rangle + \cos\alpha|1\rangle$  انجام می دهد. هرگاه نتیجه  $u_i$  را بدست آورد حدس می زند که آلیس حالت  $|\psi_i\rangle$  را برای او فرستاده است. برای آنکه به طور متوسط حدس باب بیشترین تطابق را با واقعیت داشته باشد  $\alpha$  چه مقداری را باید اختیار کند. با یک تعریف مناسب مقدار موفقیت باب را تعیین کنید.

■ تمرین: همان حالت های مسئله قبلی را در نظر بگیرید اما این بار مشابه با راه حلی که در درس ارائه دادیم یک اندازه گیری  $POVM$  به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$E_\phi := \alpha|\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|, \quad E_\psi := \alpha|\phi^\perp\rangle\langle\phi^\perp|, \quad E_0 = I - E_\psi - E_\phi. \quad (79)$$

آلیس دو حالت  $|\psi_1\rangle := \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$  و  $|\psi_2\rangle := \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle$  را به صورت تصادفی و با احتمالات مساوی برای باب می فرستد. احتمال این که باب حالت ها را بدون هیچ گونه خطایی تعیین کند، یعنی کمیت  $P_{no-error}$  را در این حالت حساب کنید. در حالت های حدی باید نتیجه شما از نظر فیزیکی نتیجه معقولی داشته باشد.

■ تمرین: در این تمرین می خواهیم یاد بگیریم که برای تشخیص حالت ها آیا باب می تواند پایه مناسب تری انتخاب کند یا نه. پاسخ این سوال مثبت است و برای آنکه مسئله را به شکل کلی تری طرح کرده باشیم فرض کنید که آلیس هر بار  $N$  نسخه از حالت های  $|0\rangle$  یا  $|+\rangle$

را برای باب ارسال می کند. بنابراین بردارهایی که برای باب ارسال می شود عبارتند از :

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle^{\otimes N}, \quad |\psi_2\rangle = |+\rangle^{\otimes N}. \quad (۸۰)$$

دقت کنید که هرچه  $N$  زیاد تر می شود این دو بردار به دو بردار عمود برهم نزدیک تر می شوند زیرا ضرب داخلی آنها به صفر نزدیک تر می شود. این امر نشان می دهد که تشخیص آنها نیز می بایست آسان تر شود.

الف: دو بردار  $|a_1\rangle$  و  $|a_2\rangle$  را در صفحه دو بردار فوق چنان تعیین کنید که اولاً برهم عمود باشند و ثانياً از نظر شکلی نسبت به این دو بردار یک نوع تقارن داشته باشند. به عبارت دیگر بردار  $|a_1\rangle$  می بایست نزدیک به  $|\psi_1\rangle$  و بردار  $|a_2\rangle$  نزدیک به بردار  $|\psi_2\rangle$  باشد. این که این تقارن چگونه با روابط ریاضی تعیین می شود به عهده شماست.

ب: حال استراتژی ای که باب طی می کند این است که باب اندازه گیری اش را در پایه متعامدی که ساخته است انجام می دهد. اگر نتیجه  $|a_1\rangle$  بدست آمد اعلام می کند که بردار  $|\psi_1\rangle$  برایش ارسال شده و اگر نتیجه  $|a_2\rangle$  بدست آمد اعلام می کند که بردار  $|\psi_2\rangle$  برایش ارسال شده. میزان خطایی که باب مرتکب می شود را بدست آورید. نشان دهید که با افزایش  $N$  این خطا به سمت صفر میل می کند.

پ: مقدار این خطا را برای وقتی که  $N = 1$  است حساب کنید.

■ تمرین: یک  $POVM$  به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}|z, +\rangle\langle z, +|, & E_2 &= \frac{1}{2}|z, -\rangle\langle z, -|, \\ E_3 &= \frac{1}{2}|x, +\rangle\langle x, +| & E_4 &= \frac{1}{2}|x, -\rangle\langle x, -| \end{aligned} \quad (۸۱)$$

نشان دهید که این  $POVM$  را می توان به عنوان یک اندازه گیری متعامد در یک فضای دوکیوبیتی در نظر گرفت.

■ تمرین: می خواهیم حالت های  $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  و  $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|1\rangle$  را با اندازه گیری از هم تمیز دهیم. یک اندازه گیری  $POVM$  که به کمک آن می توان این دو حالت را از هم تمیز داد بدست آورید. هم چنین تعیین کنید که در چند درصد موارد

قضایوت شما درمورد نوع حالت بطور قطع درست است.

■ تمرین: فرض کنید که یک حالت خالص  $|\psi\rangle$  با احتمال یکنواخت از روی کره بلوخ به شما داده می شود. شما حدس می زنید که حالت  $|\phi\rangle$  به شما داده شده است. به طور متوسط، تشابه یا به اصطلاح *Fidelity* مربوط به این حدس شما که با عبارت زیر داده می شود چقدر است؟

$$F := |\langle\phi|\psi\rangle|^2. \quad (۸۲)$$

■ تمرین: فیدلیته یا تشابه دو حالت  $\rho$  و  $\sigma$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$F := \text{tr} \sqrt{\sigma^{\frac{1}{2}} \rho \sigma^{\frac{1}{2}}}. \quad (۸۳)$$

برای دو حالت  $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$  و  $\sigma = \frac{1}{2}(I + \vec{s} \cdot \vec{\sigma})$  در کره بلوخ، فیدلیته را حساب کنید. پاسخ شما می بایست تابعی از فاصله بردارهای  $r$  و  $s$  باشد. اگر درست محاسبه کرده باشید، نتیجه نهایی می بایست علیرغم فرم تعریف  $F$  نسبت به  $\rho$  و  $\sigma$  متقارن باشد. در حالیکه هر دو حالت خالص هستند نشان دهید که این تابع تشابه به همان رابطه ای منجر می شود که در درس مکانیک کوانتومی دیده اید.

■ تمرین: یک حالت دلخواه و خالص مثل  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  را در نظر بگیرید. روی این حالت یک اندازه گیری تصویری در پایه  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  انجام می دهیم، بدون اینکه از نتیجه اندازه گیری آگاه شویم. فیدلیته حالت بعد از اندازه گیری را با حالت قبل از اندازه گیری بدست آورید. به ازای چه مقدارهایی از  $a$  و  $b$  این فیدلیته بیشترین مقدار را دارد؟

■ تمرین: حالت خالص زیر را در نظر بگیرید:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \left( \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \left( \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle \right). \quad (۸۴)$$

تجزیه اشمیت این حالت را بدست آورید.

■ تمرین: یک ذره اسپین  $2/1$  در حالت  $|\psi\rangle = a|z, +\rangle + b|z, -\rangle$  قرار دارد. این ذره را در کنار ذره دومی که در حالت  $|z, -\rangle$  قرار دارد، گذاشته و یک اندازه گیری روی هر دودره در پایه  $|l, m\rangle$  که پایه های تکانه زاویه ای کل است انجام می دهیم. از نتایج اندازه گیری نیز مطلع نیستیم.

الف: ماتریس چگالی ذره اول را قبل و بعد از اندازه گیری مشخص کنید.

ب: از دید ذره اول اندازه گیری که انجام شده است با چه عملگرهایی مشخص می شود؟

## ۵ تخمین حالت ها

در این بخش به مسئله تخمین حالت <sup>۱۰</sup> می پردازیم. صورت مسئله این است. تعداد زیادی حالت یکسان به ما داده شده است و ما می خواهیم با انجام آزمایش و اندازه گیری این حالت را مشخص کنیم. طبیعی است که دقت تخمین ما بستگی به عوامل متعدد دارد. آیا تعدادی که به ما داده شده است بی نهایت است یا متناهی؟ آیا فقط یک نوع اندازه گیری می توانیم انجام دهیم یا اینکه می توانیم اندازه گیری های متعدد انجام دهیم؟ همه این ها در تخمین نهایی ما نقش ایفا می کنند. در زیر بخش های زیر شرایط گوناگونی را بررسی می کنیم:

### ۱.۵ وقتی که اندازه گیری های دلخواه را می توانیم روی تعداد نامحدودی از حالت ها انجام دهیم.

برای سادگی فرض می کنیم که با یک کیوبیت سروکار داریم. حالت یک کیوبیت به صورت زیر نوشته می شود:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (۸۵)$$

<sup>۱۰</sup>State Estimation

برای مشخص کردن این حالت می بایست بردار  $r$  را تعیین کنیم. مولفه های بردار  $r$  برابرند با

$$x := \langle \sigma_x \rangle = \text{tr}(\sigma_x \rho), \quad y := \langle \sigma_y \rangle = \text{tr}(\sigma_y \rho), \quad z := \langle \sigma_z \rangle = \text{tr}(\sigma_z \rho). \quad (۸۶)$$

بنابراین کافی است که سه آزمایش جداگانه انجام دهیم تا مقادیر متوسط های بالا را بدست آوریم. (فعلا فرض می کنیم که تعداد بسیار زیادی از این حالت های یکسان در اختیار داریم و در محاسبه متوسط های بالا هیچ نوع محدودیتی نداریم. بعدا این محدودیت را به تفصیل بررسی خواهیم کرد. ) واضح است که سه مشاهده پذیر بالا تنها انتخاب ممکن نیستند و بی نهایت انتخاب برای اندازه گیری وجود دارد.

■ تمرین: روی یک کیوبیت اندازه گیری های انجام شده متوسط های زیر را بدست داده است:

$$\langle H \rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad \langle X - Z \rangle = \frac{1}{3}, \quad \langle X \rangle = \langle Y \rangle. \quad (۸۷)$$

این کیوبیت با چه برداری در کره بلوخ مشخص می شود؟

■ تمرین: یک حالت دو کیوبیتی به شما داده شده است.

الف: شکل کلی این حالت را برحسب ماتریس های پاولی بنویسید.

ب: مشخص کنید که چند تا اندازه گیری لازم است که حالت به طور کامل مشخص شود. فرض کنید که تعداد نامحدودی حالت یکسان در اختیار دارید.

■ تمرین: یک حالت کیودیتی با بعد  $d$  به شما داده شده است.

الف: چند تا اندازه گیری لازم است که شکل حالت به طور کامل مشخص شود؟

ب: یک مجموعه عملگر هرمیتی مشخص کنید که با اندازه گیری متوسط آنها حالت مشخص شود.

■ تمرین: یک حالت  $n$  کیوبیتی به شما داده شده است.

الف: شکل کلی این حالت را برحسب ماتریس های پاولی بنویسید.



ب: مشخص کنید که چند تا اندازه گیری لازم است که حالت به طور کامل مشخص شود. فرض کنید که تعداد نامحدودی حالت یکسان در اختیار دارید.

## ۲.۵ وقتی که فقط بعضی از اندازه گیری ها را می توانیم روی تعداد نامحدودی از حالت ها انجام دهیم.

باز می گردیم به مثال کیوبیت. دیدیم که برای اندازه گیری حال فرض کنید که در آزمایشگاه امکان انجام سه نوع اندازه گیری بالا را نداریم. مثلاً می توانیم فقط متوسط مشاهده پذیرهای  $\sigma_x$  و  $\sigma_z$  را که دو جهت مشخص هستند اندازه بگیریم. در این صورت می پرسیم که بهترین تخمینی که برای حالت کوانتومی می توانیم بدست بدهیم چیست؟

واضح است که در این جا حالت کوانتومی را نمی توانیم به طور دقیق مشخص کنیم و تنها باید به یک تخمین اکتفا کنیم. این مسئله را به طور کلی مطالعه می کنیم. بنابر این فرض کنید که حالت سیستم کوانتومی، که می تواند یک ذره یا چند ذره باشد، با  $\rho$  نشان داده می شود و در آزمایشگاه امکان اندازه گیری متوسط مشاهده پذیرهای  $G_1$  تا  $G_K$  را داریم. یعنی کمیت های زیر را می توانیم در آزمایشگاه تعیین کنیم:

$$g_i := \langle G_i \rangle = \text{tr}(G_i \rho), \quad i = 1, \dots, K. \quad (88)$$

سوال این است که با دانشی که از روابط بالا در مورد  $\rho$  داریم بهترین تخمین برای  $\rho$  چیست؟ اگر هیچ اطلاعی در مورد حالت نداشته باشیم، این حالت می تواند در فضای ماتریس های چگالی هر جایی باشد. و هیچ نوع ماتریس چگالی بر دیگری برتری ندارد. بنابراین بهترین تخمین آن است که  $\rho$  را متناسب با واحد اختیار کنیم. این ماتریس بیشترین مقدار عدم یقین را منعکس می کند. این بیشینه عدم یقین نیز ناشی از این است که ما هیچ گونه اطلاع خاصی در باره حالت نداریم. در واقع حالت  $\rho = \frac{1}{d}I$  که در آن  $d$  بعد فضای هیلبرت مربوط به سیستم است حالتی است که عدم یقین یا آنتروپی  $S$  را که به صورت زیر تعریف می شود، بیشینه می کند:

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \ln \rho). \quad (89)$$

این جا برای اولین بار با تعریف آنتروپی فون نویمان<sup>۱۱</sup> روبرو می شویم ولی در درسهای آینده به خصوص در درس اطلاعات کوانتومی به تفصیل در باره آنتروپی سخن خواهیم گفت. برای بحث کنونی کافی است به یک خاصیت کلی آن اشاره کنیم و آن اینکه هرگاه آنتروپی شانون را

<sup>۱۱</sup> von Neumann Entropy

بر حسب ویژه مقدارهای  $\rho$  بسط دهیم به صورت زیر در می آید:

$$S(\rho) = - \sum_i p_i \log p_i, \quad (90)$$

که در واقع کاملاً با آنتروپی کلاسیکی که از درسهای مکانیک آماری با آن آشنا هستیم و می دانیم که نشان دهنده بی نظمی است، یکسان است.

■ تمرین: نشان دهید که برای یک حالت خالص مقدار آنتروپی برابر با صفر و برای یک حالت کاملاً آمیخته آنتروپی برابر است با  $\log_2 d$ ، که در آن  $d$  بعد فضای هیلبرت است.

در واقع می توانید  $p_i$  ها را مقادیر احتمال برای یک متغیر تصادفی تصور کنید که  $d$  مقدار ممکن را اختیار می کند. هرچقدر که این مقادیرها پراکنده تر و بی نظم تر باشند مقدار آنتروپی بیشتر و هر چقدر که به هم نزدیک تر باشند میزان آنتروپی کمتر است.

حال که می دانیم حالت  $\rho$  چنان است که مقید به روابط ۸۸ است می بایست آنتروپی را با توجه به قیدهای بالا و هم چنین با توجه به این که  $tr(\rho) = 1$  است در فضای ماتریس های هرمیتی بیشینه کنیم. این کار را با استفاده از ضرایب لاگرانژ انجام می دهیم. (همان کاری که بارها در مکانیک آماری انجام داده ایم). بنابراین قرار می دهیم:

$$F(\rho) = -tr(\rho \log \rho) - \sum_i \lambda_i (tr(\hat{G}_i \rho) - g_i) - \lambda (tr \rho - 1), \quad (91)$$

و تقاضا می کنیم که تغییرات مرتبه اول این تابع نسبت به تغییرات  $\rho$  برابر با صفر باشد. وردش  $F$  نسبت به  $\rho$  منجر می شود به:

$$\delta F(\rho) = -tr(\delta \rho \ln \rho + \delta \rho) - \sum_i \lambda_i tr(\hat{G}_i \delta \rho) - \lambda tr(\delta \rho), \quad (92)$$

از آنجا که این وردش می بایست برای هر  $\delta \rho$  برابر با صفر باشد با قرار دادن ضریب  $\delta \rho$  مساوی با صفر در رابطه بالا به نتیجه زیر می رسم:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\sum_i \lambda_i \hat{G}_i}, \quad (93)$$

که در آن  $Z$  یک ضریب عددی است. می دانیم که مطابق با روش ضرایب لا گرانژ می بایست مشتق  $F$  را نسبت به  $\lambda_i$  ها و  $\lambda$  مساوی با صفر قرار دهیم. این دو معادله منجر به همان قیدهایی می شوند که از آن ها شروع کرده ایم یعنی اینکه  $tr(\rho) = 1$  و  $tr(\hat{G}_i \rho) = g_i$ . معادله اول مقدار  $Z$  را بدست می دهد که در نتیجه

$$Z = tr \left( e^{-\sum_i \lambda_i \hat{G}_i} \right). \quad (94)$$

معادله دوم هم منجر به این می شود که :

$$g_i = \frac{1}{Z} tr \left( \hat{G}_i e^{-\sum_i \lambda_i \hat{G}_i} \right). \quad (95)$$

این معادله اخیر را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$g_i = -\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \ln Z. \quad (96)$$

حل کردن دسته معادلات اخیر که البته یک دسته جفت شده غیرخطی است مقادیر  $\lambda_i$  ها را بر حسب  $g_i$  ها بدست می دهد. به این ترتیب بهترین تخمین برای  $\rho$  با استفاده از آزمایش هایی که انجام داده ایم بدست می آید.

■ تمرین: فرض کنید که روی حالت یک کیوبیت آزمایش انجام شده است و مقدار زیر در دست است:

$$\langle \sigma_x \rangle = a. \quad (97)$$

بهترین تخمین برای حالت کیوبیت چیست؟

■ تمرین: در تمرین قبلی فرض کنید که دو آزمایش انجام شده و مقادیر زیر را در اختیار داریم:

$$\langle \sigma_x \rangle = a, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \sigma_y + \sigma_z \rangle = b. \quad (98)$$

بهترین تخمین حالت کیوبیت چیست؟

■ تمرین: در یک کاواک الکترومغناطیسی که شامل فوتون های با یک فرکانس معین است، مقدار متوسط فوتون ها را تعیین کرده ایم. با استفاده از روش بالا بهترین تخمینی که برای حالت  $\rho$  را تعیین کنید.

■ تمرین: می خواهیم حالت کوانتومی یک نوسانگر هارمونیک را تنها با داشتن متوسط مختصه مکان یعنی  $\langle X \rangle$  تخمین بزنیم. برای سادگی پارامترهایی نظیر جرم و فرکانس نوسانگر و هم چنین ثابت پلانک را چنان بگیرد که داشته باشیم:  $X = a + a^\dagger$ . راهنمایی: برای محاسبه  $Z$  می توانید از رابطه کامل بودن حالت های همدوس یعنی

$$\frac{1}{\pi} \int dz d\bar{z} |z\rangle \langle z| = I \quad (99)$$

که در آن  $|z\rangle$  نشان دهنده حالت بهنجار همدوس است.

### ۳.۵ وقتی که تنها روی تعداد محدودی از حالت ها می توانیم آزمایش انجام دهیم.

در بخش قبلی فرض ما این بود که می توانیم متوسط مشاهده پذیر را به طور دقیق تعیین کنیم. محاسبه درست و دقیق متوسط یک مشاهده پذیر از روی آزمایش نیازمند داشتن بی نهایت کپی از یک حالت است که هیچ وقت در عمل ممکن نیست. در واقع مسئله اصلی ما این است که حتی اگر آلیس تعداد خیلی زیادی حالت یکسان به آزمایشگاه ما ارسال کرده باشد ما نمی خواهیم روی تمام آنها آزمایش انجام دهیم زیرا این کار باعث رمبش و وادوسی این حالت ها می شود. آنچه که ما می خواهیم این است که روی تعداد کمی از حالت ها آزمایش کنیم و با استفاده از این تعداد محدود حالت تمام ذرات را تعیین کنیم. بنابراین می بایست از حالت ایده آلی که در بخش قبل به آن پرداختیم فاصله بگیریم و حالت واقعی تری را بررسی کنیم که در آن تنها تعداد محدودی حالت در دسترس داریم و می خواهیم با انجام آزمایش روی آنها حالت کوانتومی را تخمین بزنیم. برای آشنا شدن با این موضوع نخست یک مثال از دنیای کلاسیک را بررسی می کنیم.

#### ۱.۳.۵ استنتاج آماری کلاسیک

فرض کنید که چندین سکه نامتوازن در اختیار داریم که با شماره های 1 تا  $m$  شماره گذاری شده اند. سکه  $k$  ام دارای احتمالات  $p_k$  برای شیر آمدن و  $q_k = 1 - p_k$  برای خط آمدن است. یکی از این سکه ها را به ما می دهند و ما حق داریم که آن را  $N$  بار بیندازیم. در این  $N$  بار آزمایش  $N_+$  بار سکه شیر آمده است. می خواهیم از نتیجه آزمایش حدس بزنیم که کدام سکه را به ما داده اند. می دانیم که روابط زیر برقرارند:

$$P(N_+|k) = \binom{N}{N_+} p_k^{N_+} q_k^{N-N_+}, \quad k = 1, m, \quad (100)$$

که در آن  $P(N_+|k)$  احتمال آمدن  $N_+$  تا شیر است اگر سکه  $k$  ام را به ما داده باشند.

می دانیم که رابطه زیر بین احتمالات شرطی برای دو متغیر تصادفی به صورت زیر برقرار است:

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)P(x)}{P(y)} = \frac{P(y|x)P(x)}{\sum_x P(y, x)} \quad (101)$$

بنابراین با استفاده از این رابطه و رابطه قبلی می توانیم مجهول مسئله یعنی  $P(k|N_+)$  را بدست بیاوریم. این کمیت یعنی  $P(k|N_+)$  همان چیزی است که ما می خواهیم یعنی احتمال اینکه سکه  $k$  را در دست داشته باشیم اگر  $N_+$  تا شیر آورده باشیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$P(k|N_+) = \frac{P(N_+|k)P(k)}{\sum_{k=1}^m P(N_+|k)P(k)}. \quad (102)$$

می توان یک متغیر تصادفی  $K$  تعریف کرد که همان شماره سکه مربوطه باشد. در این صورت بعد از انجام آزمایش و محاسبه احتمالات بالا می توانیم بهترین مقدار  $K$  را تخمین بزنیم. این مقدار را با  $K_{est}$  نشان می دهیم و مقدار آن را برابر با متوسط متغیر تصادفی  $K$  می گیریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$K_{est} = \sum_{k=1}^m P(k|N_+)k = \frac{\sum_{k=1}^K P(N_+|k)P(k)}{\sum_{k=1}^K P(N_+|k)P(k)} \quad (103)$$

در صورتی که سکه ها را با احتمال یکنواخت به ما داده باشند قرار می دهیم  $P(k) = const$  و در نتیجه رابطه بالا به شکل ساده زیر درمی آید:

$$K_{est} = \frac{\sum_{k=1}^K p_k^{N_+} q_k^{N-N_+} k}{\sum_{k=1}^K p_k^{N_+} q_k^{N-N_+}}. \quad (104)$$

به این ترتیب از روی نتیجه ای که از آزمایش بدست آمده است می توانیم محتمل ترین سکه ای را که به ما داده شده است استنتاج کنیم.

■ تمرین: یکی از دو سکه زیر را به ما داده اند: سکه  $A$  که احتمالات شیر و خط شان به ترتیب عبارتند از  $p = 1/3$  و  $q = 2/3$  و سکه  $B$  که احتمالاتش برابرند با  $p = 2/5$  و  $q = 3/5$ .  
این سکه را ۱۰۰۰ بار می اندازیم و ۶۰۰ بار شیر می آوریم. احتمال اینکه سکه  $A$  را به ما داده باشند چقدر است؟ احتمال اینکه سکه  $B$  را به ما داده باشند چقدر است؟

بعد از این مثال کلاسیک می خواهیم این نحوه استنتاج را به دنیای کوانتومی و مسئله تخمین حالت تعمیم دهیم. فرض می کنیم که آلایس  $N$  نسخه از یک حالت  $\rho$  برای باب می فرستد. باب یک اندازه گیری  $POVM = \{E_1, E_2, \dots, E_K\}$  روی هر نسخه از این حالت ها انجام می دهد. در این  $N$  بار اندازه گیری  $m_1$  بار نتیجه ۱،  $m_2$  بار نتیجه ۲، و بطور کلی  $m_i$  بار نتیجه  $i$  بدست می آید. طبیعی است که

$$m_1 + m_2 + \dots + m_K = N.$$

احتمال این که این نتایج در اندازه گیری ها بدست آید برابر است با:

$$P_N(m_1, m_2, \dots, m_K | \rho) = \frac{N!}{m_1! m_2! \dots m_K!} tr(E_1 \rho)^{m_1} tr(E_2 \rho)^{m_2} \dots tr(E_K \rho)^{m_K}. \quad (105)$$

آنچه که ما می خواهیم احتمال زیر است:

$$P(\rho | m_1, m_2, \dots, m_K) \quad (106)$$

یعنی احتمال اینکه آلایس حالت  $\rho$  را برای باب ارسال کرده باشند اگر باب نتایج  $m_1, m_2, \dots$  را در  $N$  بار اندازه گیری بدست آورده باشد. بهتر است که نمادهای خلاصه ای را تعریف کنیم، بنابراین قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} P_N(\rho | m_1, m_2, \dots, m_K) &\equiv P_N(\rho | \mathbf{m}) \\ P_N(m_1, m_2, \dots, m_K | \rho) &\equiv P_N(\mathbf{m} | \rho). \end{aligned} \quad (107)$$

با این نمادهای اختصاری می توانیم بنویسیم:

$$P_N(\rho | \mathbf{m}) = \frac{P_N(\mathbf{m} | \rho) P(\rho)}{\int d\rho P_N(\mathbf{m} | \rho) P(\rho)} \quad (108)$$

برای وقتی که  $P(\rho)$  ثابت است این رابطه ساده تر شده و به شکل زیر در می آید:

$$P_N(\rho | \mathbf{m}) = \frac{P_N(\mathbf{m} | \rho)}{\int d\rho P_N(\mathbf{m} | \rho)}. \quad (109)$$

در نتیجه حالتی که تخمین زده می شود برابر است با:

$$\rho_{est} = \int P_N(\rho | \mathbf{m}) \rho d\rho. \quad (110)$$

■ تمرین:  $N$  نسخه از یک کیوبیت که در حالت خالص  $|\psi\rangle$  قرار دارد برای ما ارسال می شود. روی این حالت های یک اندازه گیری تصویری با تصویرگرهای  $\{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$  انجام می دهیم و  $m$  بار نتیجه 0 و  $N - m$  بار نتیجه 1 بدست می آوریم. بهترین تخمینی را که برای  $\rho$  می توانیم بزنیم چیست؟ پاسخ:

$$\rho_{est} = \frac{1}{2} \left( I + \frac{2m - N}{N} \sigma_z \right) \quad (111)$$

دقت کنید که اگر چه حالت های خالص برای ما فرستاده شده ولی بهترین تخمین ما یک حالت آمیخته است.

■ تمرین: آلیس یکی از دو حالت  $|0\rangle$  یا  $|+\rangle$  را با احتمال مساوی آنهم برای یک بار برای باب می فرستد. باب روی این حالت ها در پایه محاسباتی  $^{12}$  یا همان پایه  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  اندازه گیری انجام داده و  $|0\rangle$  بدست می آورد. از نظر او احتمال این که آلیس حالت  $|0\rangle$  را فرستاده باشد چقدر است و احتمال اینکه حالت  $|+\rangle$  را فرستاده باشد چقدر؟

■ تمرین: آلیس یکی از دو حالت  $|0\rangle$  یا  $|+\rangle$  را با احتمال مساوی ولی برای دو بار به باب می فرستد. باب روی این حالت ها در پایه محاسباتی اندازه گیری انجام داده و در هر دو بار  $|0\rangle$  بدست می آورد. از نظر او احتمال این که آلیس حالت  $|0\rangle$  را فرستاده باشد چقدر است و احتمال اینکه حالت  $|+\rangle$  را فرستاده باشد چقدر؟

■ تمرین: آلیس یکی از دو حالت  $|0\rangle$  یا  $|+\rangle$  را با احتمال مساوی ولی برای  $n$  بار به باب می فرستد. باب روی این حالت ها در پایه محاسباتی اندازه گیری انجام داده و در هر  $n$  بار  $|0\rangle$  بدست می آورد. از نظر او احتمال این که آلیس حالت  $|0\rangle$  را فرستاده باشد چقدر است و احتمال اینکه حالت  $|+\rangle$  را فرستاده باشد چقدر؟

دو تمرین گذشته راه ما را برای صورت بندی حالت کلی تر هموار می کنند. فرض کنید که آلیس  $n$  نسخه از حالت  $\rho$  را برای باب ارسال می کند. باب روی این حالت ها اندازه گیری  $POVM$  با عملگرهای

$$POVM = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k\} \quad (112)$$

انجام می دهد. حالتی که آلیس ارسال کرده عبارت است از  $\rho^{\otimes N}$  و اندازه گیری ای که باب نیز انجام می دهد روی همه نسخه ها باهم است. البته این اندازه گیری می تواند یک اندازه گیری در هم تنیده یا جدا از هم باشد. در این صورت داریم:

$$P_N(k|\rho) = \text{tr}(\mathcal{E}_k \rho^{\otimes N}). \quad (113)$$

منظور از  $P_N(k|\rho)$  احتمال این است که وقتی آلیس  $N$  نسخه از حالت  $\rho$  برای باب می فرستد و باب روی آنها اندازه گیری می کند نتیجه  $k$  بدست آورد.

مثل قبل بدست می آوریم:

$$P_N(\rho|k) = \frac{P_N(k|\rho)P(\rho)}{\int P_N(k|\rho)P(\rho)d\rho} = \frac{\text{tr}(\mathcal{E}_k \rho^{\otimes N})P(\rho)}{\int \text{tr}(\mathcal{E}_k \rho^{\otimes N})P(\rho)d\rho} \quad (114)$$

باز هم وقتی که احتمال انتخاب حالت  $\rho$  یکنواخت باشد، رابطه بالا ساده می شود.

## ۶ ضمیمه: قضیه نویمارک

قضیه نویمارک بیان می کند که هر اندازه گیری  $POVM$  را می توان از یک اندازه گیری تصویری در یک فضای بزرگ تر بازسازی کرد. برای این کار نخست به یک مقدمه کوتاه احتیاج داریم. فرض کنید که در یک فضای  $d$  بعدی  $V$  یک اندازه گیری  $POVM$  با عملگرهای  $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$  انجام دهیم. این عملگرها می بایست نامنفی بوده و جمع همه آنها برابر با عملگر واحد باشد. این عملگرها را می توان بدون نقض کلیت عملگرهایی با رتبه یک (یعنی با حداکثر یک ویژه مقدار غیر صفر) در نظر گرفت. برای فهم این نکته فرض کنید که عملگری مثل  $E_1$  دارای رتبه ۲ باشد. در این صورت می توان نوشت

$$E_1 = E'_1 + E''_1 \quad (115)$$



که در آن  $E'$  و  $E''$  عملگرهای رتبه یک هستند. در این صورت داریم

$$P(1) = \text{tr}(E_1 \rho) = \text{tr}(E'_1 \rho) + \text{tr}(E''_1 \rho) =: P(1') + P(1''). \quad (116)$$

که احتمالات  $P(1')$  و  $P(1'')$  را در طرف راست تعریف کرده‌ایم. بنابراین هرگاه اندازه‌گیری  $\{E'_1, E''_1, E_2, \dots, E_k\}$  را انجام دهیم و احتمالات  $P(1')$  و  $P(1'')$  را باهم جمع کنیم و آن را مساوی  $P(1)$  قرار دهیم مثل این است که اندازه‌گیری  $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$  را انجام داده‌ایم. با این مقدمه می‌توانیم تمام عملگرهای  $POVM$  را عملگرهایی با رتبه یک در نظر بگیریم. هم چنین می‌توانیم تعداد این عملگرها را از بعد فضای  $V$  بیشتر بگیریم زیرا با افزودن عملگرهای نامنفی  $E = 0$  می‌توانیم این کار را انجام دهیم. با این مقدمه به سراغ اثبات قضیه نویمارک می‌رویم. ایده اثبات را می‌توان با یک مثال در بعد کم نشان داد. این اثبات مطلقاً هیچ چیزی از اثبات کلی کم ندارد.

فضای  $V$  را دو بعدی در نظر می‌گیریم و یک اندازه‌گیری  $POVM$  با عملگرهای  $\{E_1, E_2, E_3\}$  که در این فضا انجام می‌شود. از آنجا که این عملگرها مثبت بوده و رتبه یک دارند می‌توان آنها را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} E_1 &:= \lambda_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \equiv |\tilde{\psi}_1\rangle\langle\tilde{\psi}_1|, \\ E_2 &:= \lambda_2 |\psi_2\rangle\langle\psi_2| \equiv |\tilde{\psi}_2\rangle\langle\tilde{\psi}_2|, \\ E_3 &:= \lambda_3 |\psi_3\rangle\langle\psi_3| \equiv |\tilde{\psi}_3\rangle\langle\tilde{\psi}_3|. \end{aligned} \quad (117)$$

این عملگرها در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$E_1 + E_2 + E_3 = |\tilde{\psi}_1\rangle\langle\tilde{\psi}_1| + |\tilde{\psi}_2\rangle\langle\tilde{\psi}_2| + |\tilde{\psi}_3\rangle\langle\tilde{\psi}_3| = I. \quad (118)$$

فرم صریح برداری  $|\tilde{\psi}_1\rangle$ ،  $|\tilde{\psi}_2\rangle$  و  $|\tilde{\psi}_3\rangle$  به شکل زیر هستند:

$$|\tilde{\psi}_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad |\tilde{\psi}_2\rangle = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad |\tilde{\psi}_3\rangle = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (119)$$

در نتیجه فرم صریح عملگرهای  $POVM$  به ترتیب زیر است:

$$E_1 = \begin{pmatrix} a_1 \bar{a}_1 & a_1 \bar{b}_1 \\ b_1 \bar{a}_1 & b_1 \bar{b}_1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} a_2 \bar{a}_2 & a_2 \bar{b}_2 \\ b_2 \bar{a}_2 & b_2 \bar{b}_2 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} a_3 \bar{a}_3 & a_3 \bar{b}_3 \\ b_3 \bar{a}_3 & b_3 \bar{b}_3 \end{pmatrix}. \quad (120)$$

فرم صریح شرط (۱۱۸) می شود

$$E_1 + E_2 + E_3 = \begin{pmatrix} a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_2 + a_3\bar{a}_3 & a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + a_3\bar{b}_3 \\ b_1\bar{a}_1 + b_2\bar{a}_2 + b_3\bar{a}_3 & b_1\bar{b}_1 + b_2\bar{b}_2 + b_3\bar{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (۱۲۱)$$

که به معنای آن است که ستون های ماتریس زیر تشکیل دو بردار متعامد و یکپاره در فضای سه بعدی می دهند:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad (۱۲۲)$$

براحتی می توان بردار سومی به این دو بردار اضافه کرد که مجموعاً تشکیل سه بردار متعامد و یکپاره در فضای سه بعدی بدهند. از این سه

بردار ماتریس زیر را تشکیل می دهیم

$$U := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (۱۲۳)$$

درنتیجه شرط زیر برآورده می شود

$$U_{ij}U_{ik}^* = \delta_{ik} \quad (۱۲۴)$$

که به معنای رابطه  $U^\dagger U = I$  است. اما رابطه  $UU^\dagger = I$  نیز برقرار می شود. زیرا با توجه به اینکه دترمینان  $U$  مخالف صفر است، عمل  $U$  روی فضای سه بعدی وارون پذیر است و برای هر بردار دلخواه مثل  $|\alpha\rangle$  می توان برداری مثل  $|\beta\rangle$  چنان یافت که  $|\alpha\rangle = U|\beta\rangle$ . درنتیجه

$$UU^\dagger|\alpha\rangle = UU^\dagger(U|\beta\rangle) = U(U^\dagger U)|\beta\rangle = U|\beta\rangle = |\alpha\rangle. \quad (۱۲۵)$$

که به معنای آن است که  $UU^\dagger = I$ ، یعنی اینکه ماتریس  $U$  یکانی است. یکانی بودن  $U$  به ما اجازه می دهد که سطرهای ماتریس  $U$  را نیز

به عنوان سه بردار متعامد و یکپاره در نظر بگیریم. این سه بردار را با  $|u_1\rangle$ ،  $|u_2\rangle$  و  $|u_3\rangle$  نشان می دهیم:

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad |u_3\rangle = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (۱۲۶)$$

این سه بردار به ترتیب زیر تجزیه می شوند:

$$\begin{aligned} |u_1\rangle &= |\tilde{\psi}_1\rangle + |\tilde{\psi}_1^\perp\rangle \\ |u_2\rangle &= |\tilde{\psi}_2\rangle + |\tilde{\psi}_2^\perp\rangle \\ |u_3\rangle &= |\tilde{\psi}_3\rangle + |\tilde{\psi}_3^\perp\rangle. \end{aligned} \quad (۱۲۷)$$

به این ترتیب سه برداری را بدست آورده ایم که اولاً متعامد یک‌ه هستند و ثانیاً تصویر آنها در فضای دو بعدی همان بردارهای غیر متعامدی است که اندازه گیری  $POVM$  را تعریف می کنند. اندازه گیری تصویری در امتداد این بردارها با عملگرهای تصویر گر زیر تعریف می شود:

$$P_1 = |u_1\rangle\langle u_1|, \quad P_2 = |u_2\rangle\langle u_2|, \quad P_3 = |u_3\rangle\langle u_3|. \quad (۱۲۸)$$

احتمال بدست آمدن نتیجه‌ی  $m$  برابر است با

$$P(m) = \text{tr}(P_m \rho P_m) = \langle u_m | \rho | u_m \rangle = \langle \tilde{\psi}_m | \rho | \tilde{\psi}_m \rangle = \text{tr}(E_m \rho). \quad (۱۲۹)$$

که در آن از این مطلب استفاده کرده ایم که حالت مورد اندازه گیری یعنی  $\rho$  برحالت های  $|\tilde{\psi}_m^\perp\rangle$  عمود است. به این ترتیب نشان داده ایم اندازه گیری  $POVM$  را می توان ناشی از یک اندازه گیری تصویری در فضای بزرگ تر دانست. این محاسبه نشان می دهد که چگونه عملگرهای  $POVM$  در فضای  $V$  با عملگرهای تصویر گر در فضای بزرگ تر رابطه دارند. هرگاه عملگر تصویر روی فضای  $V$  را با  $P_V$  نشان دهیم خواهیم داشت:

$$E_m = |\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}| = P_V |u_m\rangle\langle u_m| P_V = P_V P_m P_V. \quad (۱۳۰)$$

با استفاده از این رابطه می توان حالت نهایی را نیز به شکل زیر بدست آورد.

$$\rho \longrightarrow P_V \rho' P_V \longrightarrow P_V \sum_m P_m \rho P_m P_V = \sum_m E_m \rho E_m^\dagger. \quad (۱۳۱)$$

اثبات قضیه نویمارک در اینجا کامل می شود.