درس‌نامه فیزیک پایه ۱

سید علی حسینی منصوری و مجید حسنی

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

۲۸ بهمن ۱۳۹۸

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

تماشای آسمان پُر ستاره‌ی شب و غوطه‌ور شدن در اقیانوس بی‌کرانه‌ی ستارگان همواره جذاب است. لذت بردن از تماشای این صحنه‌های بدیع می‌تواند این سوال را در ذهن تداعی کند که ما در کجای این پهنه‌ی گسترده قرار داریم؟ آیا در این زیبایی‌ها نظمی وجود دارد؟ راه شناخت این طبیعت بدیع چیست؟ کنجکاوی و کنکاش در این سوالات می‌تواند ذهن ما را با انبوهی سوال‌های دیگر در گیر کند. برای پرسیدن سوال‌هایی از این دست کافی است ساده‌ترین اتفاقاتی را که هر روزه در مقابل چشم‌های ما رخ می‌دهند، دقیق‌تر ببینیم. روزانه هزاران برگ از درختان جدا شده و به روی زمین می‌اُفتند و هزاران نفر نظاره‌گر این صحنه هستند ولی همگی به سادگی از کنار آن می‌گذرند. کافی است ذهن پرسش‌گر خود را فعال کرده و سوال‌هایی ساده از خود بپرسید. چرا برگ به زمین افتاده و به سمت بالا نمی‌رود؟ اگر قرار است رها شدن هر جسمی در اطراف زمین در نهایت به این منجر شود که آن جسم به زمین سقوط کند، پس چرا ماه به سطح زمین سقوط نمی‌کند؟

پرسیدن سوال‌هایی از این دست در طول تاریخ بشر سبب گسترش دانش ما از طبیعت اطراف شده است. طبیعتی که دامنه‌ی بسیار وسیعی دارد. می‌توان از کوچک‌ترین ذرات تشکیل‌دهنده‌ی عالم که هسته‌ی اتم‌ها هستند، شروع کرد. آیا واقعا هسته‌ی اتم با ابعاد 10^{-15} متر کوچک‌ترین جز است؟ می‌دانیم که هسته‌ها خود از پروتون‌ها و نوترون‌ها ساخته شده‌اند. ولی آیا پروتون‌ها و نوترون‌ها خود از ذرات دیگر تشکیل می‌شوند؟ پاسخ مثبت است. پروتون‌ها خود از ذرات بنیادی‌تری به نام کوارک ساخته شده‌اند. اگر به هسته‌ها ابری از الکترون‌ها اضافه شود، اتم‌ها ساخته می‌شوند. ابعاد اتم‌ها از مرتبه‌ی 10^{-10} متر است. می‌بینیم فضای بسیار زیادی که بین ابعاد هسته و اتم وجود دارد، توسط ابر الکترونی اشغال شده است.از کنار هم قرار گرفتن اتم‌ها مولکول‌ها و ساختار های درشت مقیاس تشکیل می‌شود. مثلا از کنار هم قرار گرفتن تعداد بسیار زیادی از مولکول‌ها در کنار هم، یک ذره‌ی خاک رُس تشکیل می‌شود که ابعاد نوعی در حدود 10^{-4} متر دارد و به زحمت با چشم قابل مشاهده است. اگر تعداد ذراتی را که در کنار هم قرار می‌گیرند، افزایش دهیم اجسامی که در اطراف ما قابل مشاهده هستند، به دست می‌آید. آن‌چه در زندگی روزمره با آن سروکار داریم، از ابعاد متر است. ولی به کوه‌های اطراف خود در روی کره‌زمین نگاه می‌کنیم، متوجه می‌شویم ارتفاع آن‌ها بسیار بیش‌تر از متر بوده و از مرتبه‌ی 10^{3} متر هستند. همه‌ی آن چه ما مشاهده می‌کنیم بر روی کره‌ی زمین قرار دارد که شعاع آن از مرتبه‌ی 10^{6} متر است. همان‌طور که می‌دانیم زمین یکی از چند سیاره‌ی دیگری است که به دور ستاره‌ی خورشید با ابعاد 10^{9} متر می‌چرخد. این مجموعه را منظومه‌ی شمسی می‌نامند. در کنار منظومه‌ی شمسی منظومه‌های دیگر وجود دارند. که همه‌ی آن‌ها در کهکشان راه شیری با ابعاد 10^{21} متر قرار دارند. در کنار کهکشان ما کهکشان‌های دیگری وجود دارد که نزدیک‌ترین آن‌ها کهکشان اندرومدا است. تعداد زیادی دیگر از کهکشان‌ها در کنار هم خوشه‌های کهکشانی را تشکیل می‌دهند که ابعاد آن از مرتبه‌ی 10^{24} متر است.

سفری که با هم شروع کردیم از 10^{-15}متر شروع شد و به 10^{24}متر ختم گردید. فیزیک علم مطالعه‌ی طبیعت در پهنه‌ی از 10^{-15}متر تا 10^{24}متر است؛ کار فیزیک‌دان مطالعه‌ی طبیعت و مدل‌سازی برای رفتار آن در این پهنه است. مدل‌هایی که توسط فیزیک‌دان‌ها نوشته می‌شود تنها زمانی با ارزش است که با نتایج آزمایشگاهی و تجربی سازگار باشد.

در این درس‌نامه مکانیک کلاسیک را مطالعه می‌کنیم که بر اساس دانش ما در ابعاد متر به درستی به توصیف طبیعت می‌پردازد. بنای عظیم که بسیاری از دستاوردهای مهندسی از نتایج آن است.

فصل ۲

کمیت‌های فیزیکی و تحلیل ابعادی

همان‌گونه که در قسمت قبل گفته شد مشاهده و اندازه‌گیری بخش جدایی‌ناپذیر نظریه‌های فیزیکی است. آن‌چه را که با یک ابزار مشخص قابل اندازه‌گیری است، کمیت فیزیکی می‌نامیم. کمیت‌های فیزیکی به دو دسته‌ی کمیت‌های اسکالر (عددی) و کمیت‌های برداری تقسیم می‌شوند. کمیت‌های اسکالر به کمیت‌هایی گفته می‌شود که مقدار آن‌ها تنها با یک عدد حقیقی بیان می‌شود، مانند جرم، زمان، دمای اتاق. در حالی که کمیت‌های برداری علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز هستند. برای نمونه نیرویی که توسط یک طناب به یک جسم وارد می‌کنید، دارای بزرگی و جهت است؛ یعنی هم مقدار نیروی صرف شده و هم کشیدگی طناب را (که نشان دهنده‌ی جهت نیرو است) در خود دارد.
نکته: بزرگی این کمیت‌ها اعم از اسکالر و برداری، به دو دسته کمیت‌های بُعددار و بدون‌بُعد تقسیم می‌شوند. کمیت‌های بُعددار به کمیت‌هایی گفته می‌شود که بزرگی آن‌ها با تغییر ابزار اندازه‌گیری تغییر می‌کند، مثلا فاصله شاهرود تا تهران با متر حدود ۴۰۰۰۰۰ متر است در صورتی که کیلومتر شمار ماشین عدد ۴۰۰ را نشان می‌دهد.

۱.۲ تحلیل ابعادی

در فیزیک هفت کمیت اصلی وجود دارد که کمیت‌های دیگر را می‌توان بر اساس آن‌ها نوشت. این کمیت‌ها عبارتند از طول (L)، جرم (M)، زمان (T)، جریان الکتریکی (A)، دما $(\mathcal{T})$، مقدار ماده (n)، و شدت روشنایی (I_v) . در سیستم استاندارد واحدها (SI) واحد این کمیت‌ها به ترتیب عبارتند از متر، کیلوگرم، آمپر، کلوین، مول، و کاندلا. البته می‌توان سیستم‌های دیگر انتخاب کرد که مقدار این واحدها در آن متفاوت است ولی بُعد آن‌ها همواره ثابت است (شکل ۱.۲ را مشاهده نمایید.). نوشتن کمیت بر حسب بُعد، تحلیل ابعادی [۱] نام دارد. وقتی می‌خواهیم کمیتی را تحلیل ابعادی کنیم، آن را در [ ] قرار می‌دهیم، مثلا

$$[x]=L \qquad [t]=T \qquad [i]=A \tag{۱.۲}$$

مثال: می‌دانیم که مساحت بُعد مربع طول دارد. بنابراین

$$[\mathcal{A}]=L^2, \tag{۲.۲}$$

است. تحلیل ابعادیِ سرعت برابر

$$v=\frac{x}{t}\longrightarrow [v]=LT^{-1}, \tag{۳.۲}$$

[۱] dimensional analysis

شکل ۱.۲: واحد های اصلی SI

است. تحلیل ابعادیِ شتاب برابر

$$a = \frac{v}{t} \longrightarrow [a] = LT^{-2}, \tag{۴.۲}$$

است. بنابراین تحلیل ابعادیِ نیرو

$$F = ma \longrightarrow [F] = MLT^{-2}, \tag{۵.۲}$$

و تحلیل ابعادیِ انرژی

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow [E] = ML^2T^{-2} \tag{۶.۲}$$

است. برای به دست آوردن بُعد بار الکتریکی از کمیت جریان الکتریکی کمک می‌گیریم، چون جریان کمیت اصلی است. پس

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \longrightarrow [q] = AT. \tag{۷.۲}$$

در نتیجه بُعد میدان الکتریکی به صورت

$$E = \frac{F}{q_0} \longrightarrow [E] = MLA^{-1}T^{-3}. \tag{۸.۲}$$

و بُعد میدان مغناطیسی

$$F = qvB \longrightarrow [B] = MA^{-1}T^{-2}. \tag{۹.۲}$$

است.

تمرین: به کمک آن‌چه در بالا گفته شد، استفاده از قانون کولن که $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$ و میدان مغناطیسی در مرکز حلقه‌ی جریان که $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ است، بُعد ϵ_0 و μ_0 را تعیین کنید. برای آن که در نهایت روابط خود را راستی‌آزمایی

کنید از رابطه‌ی $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ که c سرعت نور است و بُعد سرعت دارد، کمک بگیرید.
تمرین: به کمک رابطه‌ی $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ بُعد G (ثابت جهانی گرانش) را محاسبه کنید.
تمرین: به کمک رابطه‌ی $E = hf$ که در آن f بسامد و h ثابت پلانک است. بُعد h را محاسبه کنید.

به سادگی می‌توان دریافت که تحلیل ابعادی ابزاری قدرتمند در مطالعه‌ی فیزیک است. در دو سمت یک رابطه‌ی فیزیکی باید از لحاظ بُعد سازگاری وجود داشته باشد. حتی زمانی که اطلاعات بسیار کمی از یک کمیت در اختیار ما قرار دارد، تحلیل ابعادی به یافتن یک رابطه کمک فراوانی می‌کند. فرض کنید گلوله‌ی کوچکی به یک طناب آویزان است. از ما خواسته می‌شود تنها به کمک تحلیل ابعادی رابطه‌ای برای دوره‌ی تناوب این آونگ به دست آوریم. چون تنها ابزار ما تحلیل ابعادی است فقط باید از بُعد کمیت‌ها استفاده کنیم. از خود سوال می‌پرسیم که دوره‌ی تناوب آونگ به چه کمیت‌هایی می‌تواند بستگی داشته باشد؟ در پاسخ می‌توان از طول آونگ (l)، جرم آونگ (m)، زاویه‌ای که آونگ را به نوسان در آورده‌ایم (θ)، و شتاب گرانش زمین (g) یاد کرد. چون تنها ابزار ما تحلیل ابعادی است، باید تابعی از کمیت‌های بالا بسازیم که در نهایت فقط بُعد زمان داشته باشد. بنابراین دوره‌ی نوسان آونگ حاصل‌ضربی از توان‌های نامشخص کمیت‌های بالا است. پس

$$T = l^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma} \theta^{\lambda} \tag{۱۰.۲}$$

است. حاصل‌ضرب کمیت‌های سمت راست رابطه‌ی (۱۰.۲) در نهایت باید بُعد زمان داشته باشند تا با سمت چپ سازگار باشند. در ادامه به جای کمیت‌های رابطه‌ی (۱۰.۲) بُعد آن‌ها را قرار می‌دهیم. چون زاویه در یکاهای استاندارد بدون بُعد است، پس رابطه‌ی ما در مورد زاویه‌ی شروع نوسان اطلاعاتی به ما نمی‌دهد ($\lambda = 0$).

$$T = L^{\alpha} M^{\beta} L^{\gamma} T^{-2\gamma} = L^{\alpha+\gamma} M^{\beta} T^{-2\gamma} \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 0 \\ -2\gamma = 1 \longrightarrow \gamma = \frac{-1}{2} \end{cases} \tag{۱۱.۲}$$

در نتیجه رابطه‌ای که ما فقط به کمک تحلیل ابعادی برای دوره‌ی نوسان آونگ به دست آوردیم، برابر $T = \sqrt{\frac{l}{g}}$ است، که بسیار به رابطه‌ی دقیق آن شباهت دارد.
مثال ساده‌ی بالا نشان داد که تحلیل ابعادی ابزاری قدرتمند در فیزیک است. در هنگام استفاده از این تحلیل باید به نکات زیر دقت کرد:

- اگر در یک رابطه، عدد ثابت و یا کمیت‌های بدون بُعد مانند زاویه وجود داشته باشد، این مقادیر با تحلیل ابعادیِ صِرف به دست نخواهند آمد.

- در رابطه‌ای که به کمک تحلیل ابعادی به دست می‌آوریم، همواره کمیت‌ها در هم ضرب و یا بر هم تقسیم می‌شوند. به کمک تحلیل ابعادیِ صِرف نمی‌توان رابطه‌ای نوشت که کمیت‌ها با هم جمع شده‌اند (مگر آن‌که از جایی اطلاعات دیگری داشته باشیم). چون وقتی دو کمیت با هم جمع می‌شوند یعنی این که بُعد یکسانی دارند. در نتیجه نمی‌توانیم آن‌ها را از هم تمیز دهیم.

- ابزار قدرتمند تحلیل ابعادی در مسائلی که چند کمیت با بُعد یکسان در مسئله دخیل هستند، کارایی خود را از دست می‌دهد. مثلا فرض کنید در مسئله چند کمیت با بُعد طول بر نتایج تاثیر می‌گذارند.

تمرین: به کمک آن‌چه در بالا گفته شد، از سه ثابت جهانی فیزیک یعنی c, G, h کمیتی بسازید که
الف) بُعد طول داشته باشد.

Table 1.1 RADIUS R OF BLAST WAVE AFTER TIME T

T/msec	R/m
0.10	11.1
0.24	19.9
0.38	25.4
0.52	28.8
0.66	31.9
0.80	34.2
0.94	36.3
1.08	38.9
1.22	41.0
1.36	42.8
1.50	44.4
1.65	46.0
1.79	46.9
1.93	48.7
3.26	59.0
3.53	61.1
3.80	62.9
4.07	64.3
4.34	65.6
4.61	67.3
15.0	106.5
25.0	130.0
34.0	145.0
53.0	175.0
62.0	185.0

ب) بُعد زمان داشته باشد.
ج) بعد جرم داشته باشد.
تمرین: در سال ۱۹۴۷ میلادی، مجموعه‌ای عکس از نخستین انفجار اتمی در سال ۱۹۴۵ در نیومکزیگو در مجله‌ی لایف چاپ شد. این عکس‌ها شعاع موج شوکی کروی را در زمان‌های متوالی بر حسب میلی ثانیه نشان می‌داد. از عکس‌ها می‌توان شعاع موج کروی را به عنوان تابعی از زمان بدست آورد: نتایج در جدولِ ۱.۲ آمده است. با فرض این‌که سطح زمین در انتشار موج تاثیر چندانی ندارد، و حرکت موج فقط به انرژی آزاد شده از انفجار E و چگالی هوایِ بیرون ρ بستگی داشته باشد، شعاع موج انفجار را به عنوان تابعی از زمان محاسبه نمایید. به کمک جدول انرژی آزاد شده از انفجار را تخمین بزنید.

فصل ۳

جبر و محاسبات برداری

در این فصل مروری بر کاربردهای جبر برداری خواهیم داشت به طوری که مباحثی هم‌چون عملگرهای برداری و ویژگی‌های آن‌ها به همراه مثال‌های گوناگون ارائه می‌شود.

۱.۳ بردار و کمیت‌های برداری

کمیت‌های فیزیکی به دو دسته‌ی، کمیت‌های اسکالر و کمیت‌های برداری تقسیم می‌شوند. برای مثال دمای اتاق یک کمیت اسکالر است چون مقدار آن تنها با یک عدد حقیقی بیان می‌شود. زمانی که ساعت مچی شما نشان می‌دهد، جرم یک قوطی کنسرو، حجم همان قوطی، چگالی آهن، و فشار هوای داخل اتاق همگی کمیت‌های اسکالر هستند.
کمیت‌های برداری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

- کمیت برداری: به کمیت Q که دارای بزرگی و جهت است، کمیت برداری می‌گویند.

برای مثال جابه‌جایی ذره یک کمیت برداری است. فرض کنید ذره از نقطه‌ی A شروع به حرکت کرده و پس از طی مسیری به نقطه‌ی B رسیده است. در این صورت بزرگی این جابه‌جایی برابر فاصله‌ی AB و جهت این جابه‌جایی، راستای خطی است که نقطه‌ی A را به نقطه‌ی B وصل می‌کند. نیروی F که توسط طنابی به جسم وارد می‌شود، یک کمیت برداری است؛ چون بزرگی آن، اندازه‌ی نیرو با مقداری حقیقی و مثبت است. هم‌چنین جهت آن، راستایی است که طناب کشیده شده است. افزون بر این، کمیت‌هایی نظیر سرعت و شتاب نیز کمیت‌هایی برداری هستند.
بردار را می‌توان به عنوان یک مفهومی کلی به صورت زیر بیان کرد:

- بردار کمیتی نظری است که با دو ویژگیِ بزرگی و جهت مشخص می‌شود. دو بردار زمانی با هم برابرند که بزرگی و جهت یکسان داشته باشند.

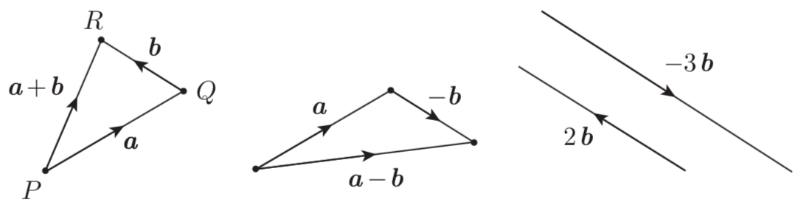
در این درس‌نامه تمام بردارها به صورت $\vec{a}$ و بزرگی آن‌ها را با $|a|$ یا a نمایش می‌دهیم.
همانند کمیت‌های عددی می‌توان اَعمال جبری نظیر جمع، تفریق، و ضرب را برای کمیت‌های برداری تعریف کرد.

جدول ۱.۳: قوانین جبری

خاصیت جابجایی	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
خاصیت شرکت پذیری	$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
خاصیت شرکت پذیری	$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$
خاصیت توزیع پذیری	$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$
خاصیت توزیع پذیری	$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

۲.۳ اَعمال جبری

- جمع برداری: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را در نظر بگیرید. مطابق شکل ۱.۳ قسمت PQ را با $\vec{a}$ و قسمت QR را با b نمایش می‌دهیم. در نتیجه $\vec{a}+\vec{b}$ نمایشی برای PR است.
- قرینه‌ی بردار: برای بردار دلخواه $\vec{b}$ همواره می‌توان برداری با اندازه‌ی یکسان ولی در جهت مخالف بردار $\vec{b}$ تعریف کرد، که به آن قرینه‌ی بردار می‌گویند. برای بردار قرینه از نماد $-\vec{b}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین تفریق برداری را می‌توان با رابطه‌ی زیر بیان کرد (تصویر وسط از شکل ۱.۳ را مشاهده کنید).
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \tag{۱.۳}$$
- ضرب اسکالر: بردار $\vec{a}$ و اسکالر (عدد حقیقی) λ را در نظر بگیرید. در این صورت ضرب اسکالر (ضرب عددی) به صورت $\lambda\vec{a}$ تعریف می‌شود. بزرگی بردار با برابر $|\lambda a|$ و جهت آن بسته به مثبت، منفی، و صفر بودن λ به ترتیب هم‌جهت، خلاف، و صفر است (تصویر سمت راست از شکل ۱.۳ را مشاهده کنید).



شکل ۱.۳: جمع، تفریق و ضرب اسکالر بردارها

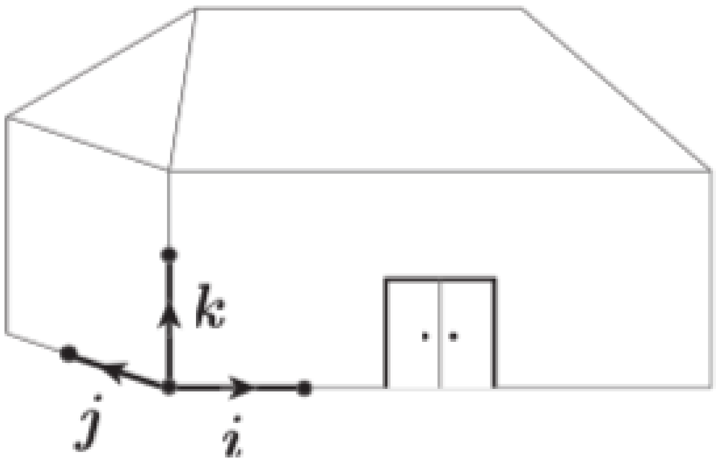
۳.۳ بردار واحد (بردار یکه)

برداری با بزرگی واحد (اندازه‌ی یک)، بردار واحد نام دارد. اگر بردار $\vec{a}$ را بر بزرگی اش تقسیم کنیم، بردار حاصل بردار واحد و هم‌جهت با بردار $\vec{a}$ است. بنابراین
$$\widehat{a}=\frac{\vec{a}}{|a|}. \tag{۲.۳}$$

۴.۳ مجموعه پایه‌های استاندارد

به مجموعه پایه‌ها (بردارهای یکه) متعامد $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ در دستگاه دکارتی، مجموعه پایه‌های استاندارد می‌گویند. هر بردار مانند $\vec{v}$ را در فضای سه بُعدی را می‌توان بر حسب این مجموعه بسط داد (شکل ۲.۳).

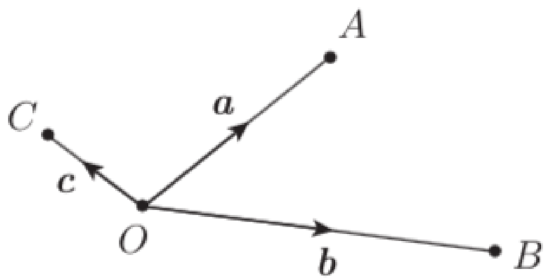
$$\vec{v} = \lambda\hat{i} + \mu\hat{j} + \nu\hat{k} \qquad (۳.۳)$$



شکل ۲.۳: بردار پایه استاندارد.

۵.۳ بردار مکان

نقطه ثابت O را در فضا را به عنوان مبدا مختصات (مبدا چارچوب مرجع) در نظر می‌گیریم. در این صورت مکان هر نقطه‌ی دیگر مانند A نسبت به مبدا را با بردار $\vec{OA}$ که با $\vec{a}$ نمایش داده شده، مشخص می‌کنیم، شکل ۳.۳.



شکل ۳.۳: نقاط A و B و C به ترتیب دارای بردار مکان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ نسبت به مبدا هستند.

جدول ۲.۳: قوانین جبری برای ضرب اسکالر

خاصیت جابجایی	$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$
خاصیت توزیع پذیری	$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$
خاصیت شرکت پذیری با ضرب اسکالر	$(\lambda\vec{a}).\vec{b} = \lambda(\vec{a}.\vec{b})$

۶.۳ ضرب اسکالر دو بردار

ضرب اسکالر دو بردار با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos(\theta) \tag{۴.۳}$$

که θ زاویه‌ی میان دو بردار است. نکته: ضرب اسکالر دو بردار یک کمیت اسکالر است یعنی تنها با عدد مشخص می شود. هم‌چنین ضرب داخلی به معنی انداختن سایه‌ی بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ است، یا به عبارتی معادل نوشتن مولفه‌های بردار $\vec{a}$ در راستای بردار $\vec{b}$ است.

۱.۶.۳ خواص ضرب اسکالر

- اندازه یا بزرگی یک بردار دلخواه را می‌توان از مجذور ضرب اسکالر بردار در خودش به دست آورد، یعنی
$$|a|^2 = a^2 = \vec{a}.\vec{a} \tag{۵.۳}$$

- دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود هستند اگر و تنها اگر ضرب اسکالر دو بردار صفر باشد،
$$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \tag{۶.۳}$$

- اگر $\{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}$ پایه‌های متعامد باشند، در این صورت
$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1 \qquad \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0 \tag{۷.۳}$$

- اگر $\vec{a}_1 = \lambda_1\hat{i} + \mu_1\hat{j} + \nu_1\hat{k}$ و $\vec{a}_2 = \lambda_2\hat{i} + \mu_2\hat{j} + \nu_2\hat{k}$ باشند، در این صورت داریم
$$\vec{a}_1.\vec{a}_2 = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 \tag{۸.۳}$$

علاوه بر خاصیت‌های ذکر شده می‌توانید دیگر خواص را در جدول ۲.۳ مشاهده کنید.

مثال

با توجه به تصویر سمت چپ از شکل ۱.۳ مطلوبست
الف: بزرگی بردار حاصل جمع
جواب

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b} = a^2 + 2ab\cos(\theta) + b^2 \tag{۹.۳}$$

ب: اگر فرض کنیم اندازه در بردار با هم برابر باشد ($a = b$) در این صورت رابطه بالا را ساده کنید. جواب: برای ساده سازی رابطه‌ی بالا استفاده از اتحادهای مثلثاتی زیر مفید هستند

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \tag{۱۰.۳}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y), \tag{۱۱.۳}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y). \tag{۱۲.۳}$$

حال با توجه به رابطه‌های بالا به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1. \tag{۱۳.۳}$$

اکنون با فرض هماندازه بودن بردارها داریم

$$|\vec{a} + \vec{b}| = a(2 + 2\cos(\theta))^{\frac{1}{2}} = 2a\cos(\frac{\theta}{2}). \tag{۱۴.۳}$$

تمرین

عملیات بالا را برای حاصل تفریق دو بردار (شکل میانی) تکرار کنید.

۷.۳ مؤلفه‌ی یک بردار

اگر فرض کنیم $\vec{n}$ یک بردار واحد باشد، در این صورت مؤلفه‌ی بردار $\vec{v}$ در راستای $\vec{n}$ با $\vec{v}.\vec{n}$ تعریف می‌شود. به طور کلی مؤلفه‌ی بردار $\vec{v}$ در راستای هر بردار دلخواه $\vec{a}$ با $\vec{v}.\widehat{a}$ به دست می‌آید.

تمرین

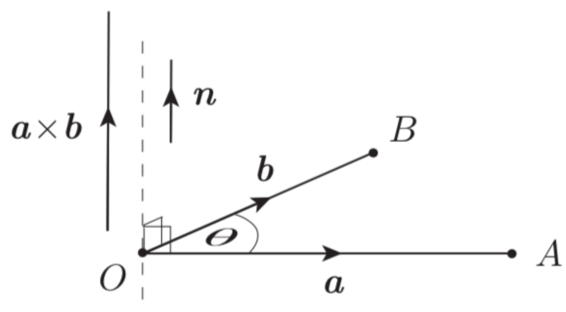
اگر $\vec{v} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 15\hat{k}$ و $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ باشد در این صورت مؤلفه‌ی بردار $\vec{v}$ در راستای $\vec{a}$ را به دست آورید.

۸.۳ ضرب برداری $\vec{a} \times \vec{b}$

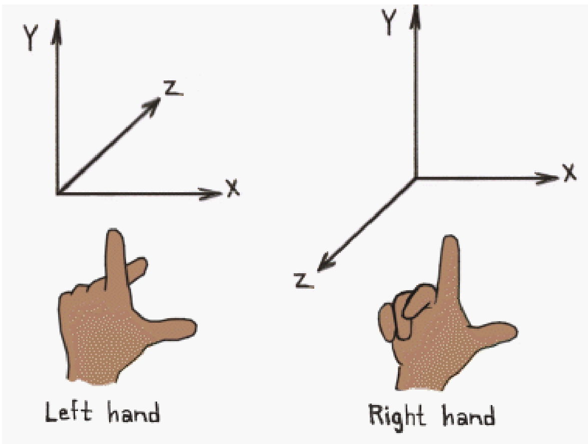
ضرب برداری: فرض کنید مطابق شکل ۱.۴ دو بردار، $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب دارای نمایش $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ باشند، هم‌چنین $\vec{n}$ بردار واحد عمود بر صفحه‌ی OAB باشد به طوری که مجموعه‌ی $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\}$ یک مجموعه راست دست باشد (۵.۳ را نگاه کنید)، در این صورت ضرب برداری به صورت زیر تعریف می شود

$$\vec{a} \times \vec{b} = (ab\sin(\theta))\vec{n}. \tag{۱۵.۳}$$

که θ زاویه میان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است. توجه داشته باشید ضرب برداری یک کمیت برداری است (شکل ۱.۴).



شکل ۴.۳: ضرب برداری دو بردار



شکل ۵.۳: در راست دستی، انگشت اشاره‌ی دست راست در سمت بردار اول و کف دست راست در سمت بردار دوم قرار دارند. در این صورت انگشت شست جهت بردار سوم را نشان می‌دهد. در چپ دستی چنین قواعد برای دست چپ به کار گرفته می‌شود.

از مهم‌ترین خواص ضرب برداری می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ضرب برداری هر بردار در خودش صفر است.

$$\vec{a}\times\vec{a}=0 \tag{۱۶.۳}$$

- اگر دو بردار موازی باشند، ضرب برداری آن‌ها صفر است

$$\vec{a}\times\vec{b}=0\rightarrow\vec{a}\|\vec{b}. \tag{۱۷.۳}$$

- اگر $\{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\}$ پایه های استاندارد باشند بنابراین

$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}\quad k\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}\quad j\times\hat{k}=\hat{\imath}\quad\hat{\imath}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}\times\hat{k}=0 \tag{۱۸.۳}$$

- اگر $\vec{a}_1=\lambda_1\hat{\imath}+\mu_1\hat{\jmath}+\nu_1\hat{k}$ و $\vec{a}_2=\lambda_2\hat{\imath}+\mu_2\hat{\jmath}+\nu_2\hat{k}$ باشد در این صورت خواهیم داشت،

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\\lambda_1&\mu_1&\nu_1\\\lambda_2&\mu_2&\nu_2\end{vmatrix} \tag{۱۹.۳}$$

در این رابطه دترمینان با سطر اول محاسبه می‌شود. همچنین دیگر خواص ضرب برداری را می‌توانید در جدول ۳.۳ دنبال کنید.

نکته: چون ضرب برداری خاصیت پادجابه‌جایی دارد. بنابراین ترتیب عبارات در ضرب برداری بایستی همواره حفظ شود. پس ضرب برداری خاصیت شرکت‌پذیری ندارد.

تمرین: اگر $a=2\hat{\imath}-\hat{\jmath}+2\hat{k}$ و $b=-\hat{\imath}-3\hat{k}$ باشند، در این صورت برداری واحد را که عمود بر هر دو بردار است، بیابید.

۹.۳ ضرب‌های سه‌گانه

ضرب سه‌گانه یک عملیات جدید نیست. در واقع برآمدی ساده از عملیات دیگر است. دو نوع ضرب سه‌گانه وجود دارد، ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر و ضرب سه‌گانه‌ی برداری از این جمله هستند.

جدول ۳.۳: قوانین جبری برای ضرب برداری

خاصیت پادجابجایی	$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
خاصیت توزیع پذیری	$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
خاصیت شرکت پذیری با ضرب اسکالر	$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

۱.۹.۳ ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

عبارتی به شکل $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$ را ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر می‌نامیم، زیرا مقدار آن یک عدد است.
خواص ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

- جایگشت‌های دوره‌ای از بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$، و $\vec{c}$ در ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر، مقدار یکسانی می‌دهند

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = c.(\vec{a} \times \vec{b}) = b.(\vec{c} \times \vec{a}). \tag{۲۰.۳}$$

علاوه براین رابطه، ضرب سه‌گانه به شکل دیگر نیز نوشته می‌شود،

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}. \tag{۲۱.۳}$$

این بدان معناست که جابه‌جایی ضرب اسکالر و ضرب برداری مقدار نهایی را تغییر نمی‌دهد. به علت این خاصیت تقارنی، ضرب سه‌گانه را می‌توان با نماد $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ نشان داد که دارای خواص زیر است:

- ضرب سه‌گانه‌ی $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ است اگر و تنها اگر بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$، و $\vec{c}$ داخل یک صفحه باشند (هم صفحه). البته اگر یکی از بردارها صفر باشد و هم‌چنین اگر دو تا از بردارها یکسان باشند، این ضرب باز هم صفر است.

- اگر $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$ باشد، مجموعه‌ی $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ راست دست و اگر $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] < 0$ باشد، مجموعه‌ی $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ چپ دست است.

- اگر $\vec{a}_1 = \lambda_1 \hat{i} + \mu_1 \hat{j} + \mu_1 \hat{k}$، $\vec{a}_2 = \lambda_2 \hat{i} + \mu_2 \hat{j} + \mu_2 \hat{k}$ و $\vec{a}_3 = \lambda_3 \hat{i} + \mu_3 \hat{j} + \mu_3 \hat{k}$ باشند در این صورت

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}. \tag{۲۲.۳}$$

تمرین: برای سه بردار $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$، $\vec{B} = -2\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}$، و $\vec{C} = -\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$، موارد زیر را محاسبه کنید.

الف) $\vec{A}.\vec{A}$
ب) $\vec{A}.\vec{C}$
پ) $(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$
ت) $\vec{B} \times \vec{C}$
ث) $(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$
ج) $(\vec{C} \times \vec{B}) \times \vec{A}$
د) حجم تشکیل‌شده از این سه بردار

فصل ۴

حرکت در خط مستقیم

در فصل‌های قبل مفاهیم ابتدایی در مکانیک کلاسیک بیان شد. در این فصل به بیان موضوع اصلی این درس‌نامه که مکانیک کلاسیک است می‌پردازیم و این کار را از حرکت در خط مستقیم آغاز می‌کنیم. مکانیک کلاسیک نظریه‌ی علمی است که به مطالعه‌ی حرکت اجسام می‌پردازد. حرکت خودروها در یک خیابان، حرکت توپ فوتبال در زمین بازی، حرکت سیارات به دور خورشید، و حرکت صفحات زمین نسبت به هم مثال‌هایی از حرکت هستند که در چارچوب مکانیک کلاسیک مطالعه می‌شوند. ابتدا به بیان فرض‌های بنیادین و اصلی مکانیک کلاسیک می‌پردازیم. در واقع مکانیک کلاسیک بر پایه‌ی این فرض‌ها استوار است.

۱.۴ فرض‌های بنیادین مکانیک کلاسیک

در مکانیک کلاسیک مفهوم پیوستگی در زمان و مکان وجود دارد. این بدان معناست که هر رویداد و اتفاق معین در یک مکان و زمان مشخصی رخ می‌دهد. به عنوان مثال یک بازی فوتبال در ساعت ۵ بعد از ظهر و از مرکز زمین مسابقه آغاز می‌شود. خودرویی در ساعت ۹ صبح از شاهرود به سمت تهران شروع به حرکت می‌کند.
از دیگر فرض‌های مکانیک کلاسیک آن است که اگر دو آزمایش‌گر ساعت‌های خود را با هم هم‌زمان کنند، در مورد زمان و بازه‌ی زمانی یک اتفاق توافق نظر دارند. فرض کنید شخص الف و شخص ب ساعت‌های خود را هم‌زمان می‌کنند. شخص الف در کنار جاده می‌ایستد و شخص ب سوار بر خودرویی می‌شود که با سرعت ثابت در حال حرکت است. در آن سوی جاده تصادفی رخ می‌دهد. هر دو شخص زمان تصادف و بازه‌ی زمانی تصادف را به صورت یکسان گزارش می‌کنند.
هم‌چنین در مکانیک کلاسیک فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی A و B با مختصات $(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B)$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}. \qquad (۱.۴)$$

در واقع هندسه‌ی فضا اقلیدسی است.
در مکانیک کلاسیک دقت اندازه‌گیری مکان و سرعت یک جسم بی‌نهایت است؛ یعنی با هر دقتی می‌توان مکان و سرعت یک ذره را به صورت هم‌زمان اندازه‌گیری کرد. این بدان معناست که برای خودرویی که با سرعت مشخص در جاده حرکت می‌کند، می توانیم در هر لحظه از زمان، هم سرعت و مکان آن را به صورت دقیق گزارش کنیم.
هرچند که فرض‌های بالا شهودی و ساده هستند و با درک روزمره‌ی ما از حرکت اجسام هم‌خوانی دارند ولی برخی از این فرض‌ها در دیگر نظریه‌های فیزیکی برقرار نیستند. به عنوان مثال در مکانیک کوانتومی که به مطالعه‌ی حرکت

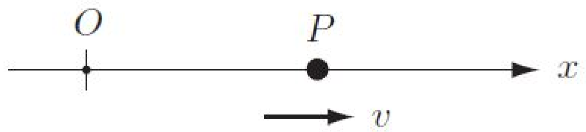
اجسام اتمی می‌پردازد، اندازه‌گیری هم‌زمان مکان و سرعت ذره‌ای مانند الکترون امکان‌پذیر نیست. یا در نسبیت بحث هم‌زمان کردن ساعت‌ها و هم‌چنین فاصله‌ی اقلیدسی برقرار نیستند.

۲.۴ حرکت در خط مستقیم

ذره‌ی P در حال حرکت در محور x به طوری که جابه‌جایی x از مبدا $\mathcal{O}$ تابع مشخصی از زمان است، را در نظر بگیرید. سرعت متوسط ذره P در طی بازه‌ی زمانی $t_1 \leq t \leq t_2$ به افزایش در جابه‌جایی ذره بر زمان سپری شده گفته می‌شود، یعنی

$$\overline{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad (۲.۴)$$

تمرین:



شکل ۱.۴: ذره P در خط مستقیم حرکت می‌کند و دارای جابه‌جایی x و سرعت v در زمان t است.

فرض کنید جابه‌جایی ذره P از مبدا $\mathcal{O}$ در زمان t با تابع $x = t^2 - 6t$ مشخص می‌شود. در این صورت سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $1 \leq t \leq 3$ چقدر است؟
سرعت متوسط یک ذره از درجه‌ی اهمیت کمتری نسبت به سرعت لحظه‌ای، سرعت در یک لحظه‌ی مشخص، برای ماست. در واقع با قرار دادن $t_1 = t_2$ در رابطه‌ی ۲.۴ نمی‌توانیم سرعت در لحظه‌ی t_1 را بیابیم، زیرا خارج قسمت آن تعریف نشده است. با این وجود، سرعت لحظه‌ای به عنوان حد سرعت لحظه‌ای زمانی که بازه‌ی زمانی به سمت صفر میل می‌کند، یعنی $t_2 \to t_1$ قابل تعریف است. بنابراین سرعت لحظه‌ای $v(t_1)$ ذره P در زمان t_1 به صورت زیر تعریف می‌شود

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \Big(\frac{x(t_2) - x_{t_1}}{t_2 - t_1} \Big). \qquad (۳.۴)$$

اما این رابطه دقیقا تعریف مشتق x نسبت به t است، که در $t = t_1$ محاسبه شده است. بنابراین می‌توان سرعت را به صورت زیر تعریف کرد:
تعریف: سرعت (لحظه‌ای) v ذره P در جهت مثبت x با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$v = \frac{dx}{dt}. \qquad (۴.۴)$$

نکته: تندی ذره‌ی P به آهنگ افزایش کل مسافت طی شده گفته می‌شود که برابر با بزرگی سرعت $|v|$ است. به طور مشابه، شتاب ذره P آهنگ افزایش سرعت v است و به صورت زیر تعریف می‌شود:
تعریف: شتاب (لحظه‌ای) ذره در جهت مثبت x با

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (۵.۴)$$

تمرین: فرض کنید جابه‌جایی ذره‌ای از مبدا مختصات با رابطه‌ی $x = t^3 - 6t^2 + 4$ داده شده است. سرعت و شتاب ذره را در لحظه‌ی t حساب کنید. با این نتیجه که ذره دوبار به حالت سکون می‌رسد، مکان و شتاب ذره در

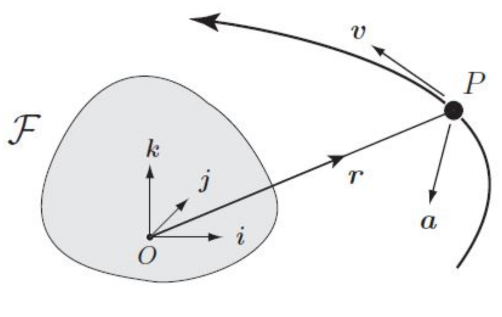
زمان آخرین سکون را محاسبه کنید.
تمرین: یک ذره در امتداد محور x با شتاب وابسته به زمان زیر حرکت می‌کند

$$a = 12t^2 - 6t + 6, \qquad (۶.۴)$$

در ابتدا در نقطه‌ی $x = 4m$ و با سرعت $8m/s$ در جهت منفی x شروع به حرکت می‌کند. سرعت و جابه‌جایی ذره در لحظه‌ی t را به دست آورید.

۳.۴ حرکت کلی یک ذره

زمانی که یک ذره‌ی P در دو یا سه بعد حرکت می‌کند، مکانش می‌تواند با بردار جابه‌جایی r از مبدا $\mathcal{O}$ که نقطه‌ی ثابتی در چارچوب مرجع صُلب $\mathcal{F}$ است، توصیف شود. خواه $\mathcal{F}$ متحرک یا ثابت باشد، بردار مکان r به سادگی نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ قابل اندازه‌گیری است. شکل ۲.۴ یک ذره P در حال حرکت در فضای سه بعدی با بردار مکان r (نسبت به چارچوب مرجع $\mathcal{F}$) در زمان t را نشان می‌دهد.
سوال: چارچوپ مرجع چیست؟ چرا به آن نیازمندیم؟
یک چارچوپ مرجع صلب لزوما یک جسم صلب است که ذراتش می‌توانند به منظور ایجاد نقطه مرجع برچسب گذاری شوند. معروف‌ترین مثال، زمین است. نسبت به یک ذره منفرد تنها چیزی که می‌توان مشخص کرد فاصله از آن ذره است. با این وجود، نسبت به یک جسم صلب می‌توان هم جهت و هم فاصله را مشخص کرد. بنابراین مقدار هر کمیت برداری نسبت به چارچوپ F قابل تعیین شدن است. خصوصا اگر ما برخی از ذرات جسم را به عنوان مبدا $\mathcal{O}$ برچسب‌گذاری کنیم، می‌توانیم مکان هر نقطه از فضا را به وسیله‌ی بردار مکان نسبت به چارچوپ $\mathcal{F}$ و مبدا مختصات $\mathcal{O}$ مشخص کنیم.
تشخیص بردارها نسبت به یک چارچوپ مرجع زمانی که ما دستگاه مختصات دکارتی (کارتزین) را معرفی می‌کنیم، به مراتب ساده تر می‌شود. این عمل به روش‌های مختلف نامتناهی قابل اجراست. تصور کنید $\mathcal{F}$ را به وسیله‌ی مجموعه‌ای از سه صفحه‌ی دوبه دو متعامد که به طور صلب در آن غوطه‌ور هستند، بسط می‌دهیم. سپس مختصات x, y, z از نقطه‌ی P فاصله نقطه‌ی P از سه صفحه هستند. اکنون اجازه دهید $\mathcal{O}$ مبدا این دستگاه مختصات باشد و $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ بردارهای یکه آن باشند. سپس به طور قراردادی مرجع $\mathcal{F}$ به همراه دستگاه مختصات غوطه‌ور شده $Oxyz$ را با نمادگذاری $\mathcal{F}\{O; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ نمایش می‌دهیم. در حالت کلی، سرعت و شتاب یک ذره کمیت‌های



شکل ۲.۴: ذره P در فضای سه بعدی نسبت به چارچوپ مرجع $\mathcal{F}$ و مبدا O حرکت می‌کند و دارای بردار مکان r در زمان t است.

برداری هستند که با روابط زیر تعریف می‌شوند

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad a = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (۷.۴)$$

سرعت و شتاب اسکالر تعریف شده در بخش قبل برای حرکت مستقیم الخط به طور ساده‌ای به کمیت‌های برداری تعریف شده در بالا مرتبط هستند. این امکان وجود دارد که با استفاده از فرمول‌بندی برداری در مورد حرکت در خط مستقیم، محور x ، $\vec{r}$، $\vec{v}$ و $\vec{a}$ را به شکل زیر نوشت

$$\vec{r} = x\hat{i} \quad \vec{v} = v\hat{i} \quad \vec{a} = a\hat{i}, \tag{۸.۴}$$

که $v = dx/dt$ و $a = dv/dt$ هستند.

تمرین: نسبت به چارچوب $\mathcal{F}\{O; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ مکان ذره P در زمان t به صورت

$$\mathrm{r} = (2t^2 - 3)\hat{i} + (4t + 4)\hat{j} + (t^3 + 3t^2)\hat{k}$$

داده شده است. مطلوبست: فاصله‌ی OP زمانی که $t = 0$ است؟ سرعت ذره در $t = 1$؟ شتاب ذره در $t = 2$ ؟

۴.۴ حرکت با شتاب ثابت در راستای افقی

در حرکت با شتاب ثابت متحرک به گونه‌ای حرکت می‌کند که در بازه‌های زمانی یکسان تغییرات سرعت آن یکسان باشد. با فرض ثابت بودن شتاب در راستای افقی (محور x) فرض کنید متحرکی در زمان $t = 0$ با سرعت $v_x = v_{0x}$ و از مکان $x = x_0$ شروع به حرکت می‌کند در این صورت سرعت متحرک در لحظه‌ی t چقدر است؟ با استفاده از تعریف شتاب لحظه‌ای می‌توان به رابطه زیر رسید.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Longrightarrow \int dv_x = \int a_x(t)dt \overset{a_x(t)=a}{=} a\int dt \Rightarrow v_x = at + c \tag{۹.۴}$$

توجه داشته باشید که زیر اندیس x به معنای حرکت در راستای افقی است. حال با با اعمال شرط اولیه $v_x(t = 0) = v_{0x}$ داریم

$$v_x(t = 0) = c = v_{0x} \Rightarrow c = v_{0x} \Rightarrow v_x = at + v_{0x} \tag{۱۰.۴}$$

اکنون مکان نهایی که متحرک به آن خواهد رسید چقدر است؟

$$v_x = \frac{dx}{dt} = at + c \Rightarrow x = a\int tdt + c\int dt = a\frac{t^2}{2} + ct + d. \tag{۱۱.۴}$$

حال با اعمال شرط اولیه، $x(t = 0) = x_0$ سرانجام به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید

$$x = \frac{a}{2}t^2 + v_{0x}t + x_0. \tag{۱۲.۴}$$

تمرین: با حذف شتاب و زمان در روابط بالا، معادله‌های زیر را استخراج کنید

$$x - x_0 = \frac{(v_x + v_{0x})}{2}t, \tag{۱۳.۴}$$

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a(x - x_0). \tag{۱۴.۴}$$

نکته: حرکت با سرعت ثابت معادل شتاب صفر است زیرا تغییرات سرعت که منجر به شتاب می‌شود در این حرکت وجود ندارد بنابراین حرکت با سرعت ثابت با $a = 0$ صورت می‌گیرد، در این صورت با قرار دادن $a = 0$ در روابط بالا به معادلات زیر خواهیم رسید

$$v_x = v_{0x} \qquad x = v_{0x}t + x_0. \tag{۱۵.۴}$$

نکته: به طور کلی انتگرال را می‌توان به عنوان مساحت زیر نمودار مربوط به هر تابع تعریف نمود. بنابراین رابطه‌ی $\int dv = \int adt = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$ نشان می‌دهد که تغیرات سرعت متحرک در بازه‌ی زمانی $[t_1, t_2]$ همان مساحت زیر نمودار مربوط به تابع شتاب، $a(t)$, در بازه‌ی مذکور است.

تمرین: مسئله‌های ۴۳، ۵۰، ۵۱ (فصل دوم) از کتاب مبانی فیزیک ویراست دهم را حل کنید.

۵.۴ حرکت با شتاب ثابت در راستای عمودی

تمام نکات گفته شده در بالا را می‌توان برای حرکت در راستای عمودی نیز بیان کرد. کافی است در روابط بالا اندیس x را به y تغییر دهید. این به معنای سرعت و شتاب در راستای y است. معروف‌ترین و پرکاربردترین مثال برای حرکت در راستای عمودی و با شتاب ثابت، سقوط آزاد اجسام در نزدیکی سطح زمین است. مشاهده‌ای که شما بارها و بارها انجام داده‌اید؛ افتادن سیب از درخت و افتادن خودکار از لبه‌ی میز نمونه‌های از سقوط آزاد هستند. اگر از وجود مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم، مشاهده خواهیم کرد که در هر نقطه در اطراف کره‌ی زمین، همه‌ی اجسام با هر شکل، اندازه، و ترکیبی با شتاب ثابت به سمت زمین سقوط می‌کنند. این شتاب ثابت را با نماد $a_y = -g$ مشخص می‌کنیم که علامت منفی یادآور این حقیقت است که جهت شتاب همواره رو به زمین است. اندازه‌ی g به فاصله از سطح زمین بستگی دارد و مقدار دقیق آن با تغییر طول و عرض جغرافیایی آن نقطه روی زمین عوض می‌شود. به عنوان مثال در استوای زمین $g = 9/780\frac{m}{s^2}$ و در قطب‌های زمین $g = 9/832\frac{m}{s^2}$ است. ولی چون با تقریب زمین را به صورت کروی در نظر می‌گیریم، مقدار این شتاب در نزدیکی سطح زمین $g = 9/8\frac{m}{s^2}$ است. هر چند که در مورد سقوط آزاد صحبت کردیم ولی اجسامی هم که در اطراف زمین به سمت بالا (مخالف سمت زمین) حرکت می‌کنند، شتاب g را تجربه می‌کنند. در این صورت روابط مربوط به مکان و سرعت برابر

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0, \tag{۱۶.۴}$$

$$v_y = -gt + v_{0y}. \tag{۱۷.۴}$$

است.

مثال: توپی را از بالای برجی به ارتفاع ۵۰ متر رها می‌کنیم ($v_{0y} = 0$). با صرف‌نظر از مقاومت هوا، جابه‌جایی توپ را در زمان‌های $t = 1s$ و $t = 3s$ محاسبه کنید.

پاسخ: مبدا مختصات را روی سطح زمین قرار می‌دهیم. بنابراین $y_0 = 50m$ است. پس

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \tag{۱۸.۴}$$

$$= -\frac{1}{2}9/8t^2 + 50. \tag{۱۹.۴}$$

پس در $t = 1s$ داریم

$$y_1 = -\frac{1}{2}9/8 + 50 = 45/1, \tag{۲۰.۴}$$

و در $t = 3s$ داریم

$$y_2 = -\frac{1}{2}9/8 * 9 + 50 = 5/9. \tag{۲۱.۴}$$

برای محاسبه‌ی جابه‌جایی داریم

$$50 - y_1 = 50 - 45/1 = 4/9m, \tag{۲۲.۴}$$

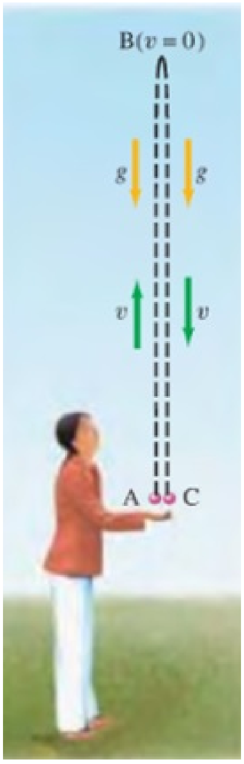
$$50 - y_2 = 50 - 5/9 = 44/1m. \tag{۲۳.۴}$$

تمرین: شخصی توپی را با سرعت $10\frac{m}{s}$ به سمت بالا پرتاب می‌کند، شکل ۳.۴.

الف) توپ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود.

ب) مدت زمانی که توپ در هوا است، را محاسبه کنید .

تمرین: برای اندازه‌گیری شتاب گرانش می‌توان آزمایشی به این صورت طراحی کرد: توپی را به بالا پرتاب می‌کنیم.



شکل ۳.۴: توپ با سرعت $10\frac{m}{s}$ به بالا پرتاب می‌شود.

دو نقطه‌ی A و B را در راستای عمودی حرکت که فاصله‌ی آن‌ها از هم h است، در نظر بگیرید. اگر T_A متناظر با زمانی باشد که جسم از نقطه‌ی A گذشته و دوباره به A برگردد و T_B متناظر با زمانی باشد که جسم از نقطه‌ی B گذشته و دوباره به B برگردد. نشان دهید مقدار

$$g = \frac{8h}{T_A^2 - T_B^2}. \qquad (۲۴.۴)$$

است.

تمرین: خرسی به ناگهان داخل چاهی به ارتفاع ۱۰۰ متر سقوط می‌کند. اگر در مدت زمان $t = 4/51s$ به ته چاه سقوط کند، خرس چه رنگی است؟