تعریف: فرض کنیم f یک تابع دو متغیره باشد و $P_0 \in D_f$

i) نقطه P_0 را نقطه max نسبی تابع f گوییم اگر همسایگی $N_\delta(P_0)$ موجود باشد که در آن $\forall p \quad f(p) \le f(P_0)$

ii) نقطه P_0 را نقطه min نسبی تابع f گوییم اگر همسایگی $N_\delta(P_0)$ موجود باشد که در آن $\forall p \quad f(p) \ge f(P_0)$

تعریف: نقطه P_0 را نقطه بحرانی تابع f گوییم اگر $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0}$

اگر تابع f در P_0 مشتق پذیر باشد و بعلاوه P_0 یک نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0}$$

قضیه: فرض کنیم f یک تابع دو متغیره باشد و $P_0 \in D_f$ و S یک همسایگی از نقطه P_0 باشد و بعلاوه: $\Delta(q) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \big|_q \,;\, q \in S$

i) نقطه P_0 یک نقطه max نسبی تابع f است اگر $\Delta(P_0) > 0$ و $f_{xx}|_{P_0} < 0$ (یا $f_{yy}|_{P_0} < 0$)

ii) نقطه P_0 نقطه min نسبی تابع f است اگر $\Delta(P_0) > 0$ و $f_{xx}|_{P_0} > 0$ (یا $f_{yy}|_{P_0} > 0$)

iii) اگر $\Delta(P_0) < 0$ آنگاه نقطه P_0 نقطه زینی (عطف) است.

iv) اگر $\Delta(P_0) = 0$ آزمون جوابگو نیست.

تمرین. اکسترمم تابع $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$ را بدست آورید

$f_x = 3x^2 - 12y = 0 \quad x^2 = 4y$

$f_y = -12x + 24y^2 = 0 \quad x = 2y^2 \quad \rightarrow P_0 = (0,0) \ \& \ P_1 = (2,1)$

$\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \qquad f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = 48y \quad f_{xy} = -12$

$\Delta(P_0) = 0 - 144 < 0$ نقطه زینی P_0

$\Delta(P_1) = 12 \times 48 - (12)^2 > 0 \qquad f_{xx}(P_1) = 6 \times 2 = 12 > 0$ نقطه P_1 min نسبی تابع است

$\text{Min} f = f(2,1) = \cdots$

تمرین. ابعاد جعبه سربازی به شکل مکعب مستطیل و با حجم ثابت را چنان مشخص کنید که جنس بکار رفته در ساختن این جعبه min باشد.

تذکر: در مسائل max ، min ابتدا برای تابعی که می‌خواهیم max یا min آنرا مشخص کنیم برحسب x ، y ، z بدست آورده و سپس با توجه به فرضهای مسئله یک رابطه بین x ، y ، z بدست آوریم (این رابطه را قید می‌نامیم) سپس با توجه به قید مسئله یک متغیر را برحسب دو متغیر دیگر بدست آورده و با جایگذاری در تابع اصلی max یا min آنرا مشخص می‌کنیم.

روش تکثیرکن‌های لاگرانژ (ضریبگرهای لاگرانژ)

فرض کنیم بخواهیم اکسترمم تابع $w = f(x,y,z)$ را با قید $g(x,y,z) = 0$ بدست آوریم برای

$$H(x,y,z;\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$$

و سپس مشتقات جزئی H را برابر صفر قرار می‌دهیم یعنی $H_x=H_y=H_z=H_\lambda=0$ جواب‌های از این دستگاه به دست می‌آید نقاط اکسترمم نسبی تابع f خواهد بود. در این روش نوع نقاط اکسترمم مشخص نمی‌شود، در این حالت باید با توجه به مفروضات مسئله نوع max یا min تابع f را تشخیص داد.

تذکر: این روش را می‌توان برای پیدا کردن اکسترمم تابع f با دو قید $g_1(x,y,z)=0$ و $g_2(x,y,z)=0$ نیز اعمال کرد. برای این منظور تابع H را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$H=f-\lambda g_1-\mu g_2$$

نقاط اکسترمم جواب دستگاه $H_x=H_y=H_z=H_\lambda=H_\mu=0$ خواهد بود.

تمرین. بزرگترین حجم مکعب مستطیلی را بیابید که بتوان آن را داخل بیضی‌گون به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ محاط کرد.

تمرین. نقاطی از منحنی $\begin{cases}4x+3y+z=6\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ را به دست آورید که بیشترین و کمترین فاصله را تا صفحه xoy داشته باشند.

۱) معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $P(1,1,1)$ عبور کرده و شامل فصل مشترک دو صفحه $x-y+2z=1$ و $2x-3y+z=1$ باشد.

۲) معادله رویه‌های زیر را به صورت نرمال بنویسید و آنها را بطور تقریبی رسم کنید

$\rho = 2\sin\varphi(\cos\theta - 2\sin\theta)$ $\qquad$ $\rho = \cos\varphi$

۳) معادله صفحه‌ای را بنویسید که از فصل مشترک دو صفحه $4x+3y-2z+13=0$ و $7x-4y+7z+16=0$ بگذرد و بر صفحه $x-y-2z+5=0$ عمود باشد.

۴) تابع f به صورت زیر داده شده است، بردارهای T، N، B را در نقطه $t=\frac{\pi}{2}$ بدست آورید

۵) انحنا و تاب منحنی زیر را در $t=0$ بنویسید $\qquad f(t)=\langle 6t+\cos^2 t,\ 3t-\cos 2t,\ 2t-3\rangle$

۶) معادله دایره بوسان بیضی $9x^2+4y^2=36$ را در نقطه $(0,3)$ بنویسید. $\qquad r(t)=\langle 1+t,\ 2\cos 2t,\ -2\sin 2t\rangle$

۷) بردار قائم بر سطح $\cos x - x^2y + e^{xz} + yz = 4$ در نقطه $(0,1,2)$ را $\vec{u}$ می‌نامیم، مشتق سوئی $f = x^2 - yz + xz^2$ را در نقطه $(2,-1,2)$ و در امتداد u محاسبه کنید.

۸) مشتق جهتی (سوئی) $f = 3x^2yz + 2yz^2$ را در جهت خط قائم بر رویه $x^2-y^2+z^2=1$ در نقطه $P(1,1,1)$ بدست آورید.

۹) اگر $z=f(u,v)$ و $\begin{cases} u=xy^2 \\ v=2x-y \end{cases}$ عبارت $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ را محاسبه کنید.

۱۰) اگر $z=f(u,v)$ و $\begin{cases} u=x^3-y^3 \\ v=x^4y^3 \end{cases}$ مقدار عبارت $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ را محاسبه کنید.

۱۱) فرض کنیم x، y، z سه عدد حقیقی باشند که $4=x^2+yz$ max تابع $f=xy+2yz+3zx$ را بدست آورید.

۱۲) max تابع $f = \ln x + \ln y + 3\ln z$ را روی سطح $5=x^2+y^2+z^2 ;\ x,y,z>0$ بیابید.

۱۳) مشتق سوئی $f = x^2+y^2-z^2$ در $(3,4,5)$ در امتداد منحنی فصل مشترک دو رویه $x^2+y^2=z^2$ و $5=2x^2+2y^2-z^2$ را بدست آورید.